Math93.com

Dérivation - Partie 2 : Étude de Fonctions (*Derivative*)

1re Spé Maths

I. Dérivées d'une fonction composée

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g la fonction affine définie sur J par $g(x) = ax + b$ telle que pour tout réel $x \in J$ on a $g(x) \in I$

Définition 1

On appelle fonction composée la fonction h définie pour tout réel x de I par :

$$x \longmapsto f\Big(g(x)\Big) = f(ax+b)$$

Cette fonction h se note : $f\,o\,g$, et se lit "f rond g".

Exemple

Par exemple si f est définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g affine définie sur $J = \mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 3$, on a pour tout réel $x \in I = \mathbb{R}$:

$$f\Big(g(x)\Big) = f(2x+3) = (2x+3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$$

Le fonction $h = f\,o\,g$ est donc la fonction

$$x \longmapsto 4x^2 + 12x + 9$$

Propriété 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g la fonction affine définie sur J par $g(x) = ax + b$ telle que pour tout réel $x \in J$ on a $g(x) \in I$.
La fonction composée $h = f\,o\,g$ définie pour tout réel x de I par :

$$x \longmapsto f\Big(g(x)\Big) = f(ax+b)$$

est de dérivée dans le cas général :

$$\boxed{h'(x) = f'\Big(g(x)\Big) \times g'(x)}$$

Et puisque $g(x) = ax + b$

$$\boxed{h'(x) = f'\Big(g(x)\Big) \times a}$$

Exemple

Par exemple si f est définie sur $I = \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et g affine définie sur $J = \mathbb{R}$ par $g(x) = 2x + 3$

- Méthode 1 : La fonction composée $h = f\,o\,g$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec pour tout réel x :

$$h'(x) = f'\Big(g(x)\Big) \times g'(x)$$

Or

$$f'(x) = 2x \text{ et } g'(x) = 2$$

Donc

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'\Big(g(x)\Big) \times g'(x) \\ &= 2(2x+3) \times 2 \\ \boxed{h'(x) = 8x+12} \end{aligned}$$

- Méthode 2 :
  On a pour tout réel $x \in I = \mathbb{R}$:

$$f\Big(g(x)\Big) = f(2x+3) = (2x+3)^2 = 4x^2+12x+9$$

La fonction $h = f\,o\,g$ est donc la fonction

$$x \longmapsto 4x^2+12x+9$$

Et h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\boxed{h'(x) = (4x^2+12x+9)' = 8x+12}$$

II. Dérivabilité : Rappel

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est **dérivable sur J** si f est dérivable en tout point de J.
Alors, la fonction qui à tout x de J associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f'.

$$\begin{cases} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{cases}$$

Attention : une fonction peut être définie sur un intervalle I et dérivable sur un autre intervalle $J \subseteq I$.

Propriété 2

1. Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Toute fonction rationnelle (f de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec u et v polynômes) est dérivable sur chaque ensemble contenu dans son ensemble de définition, donc sur tout intervalle I sur lequel $v \neq 0$
3. Soit f une fonction de la forme $\sqrt{u}$. Alors f est définie sur tout intervalle I sur lequel $u \geqslant 0$ et dérivable sur $J \subseteq I$ tel que $u > 0$.

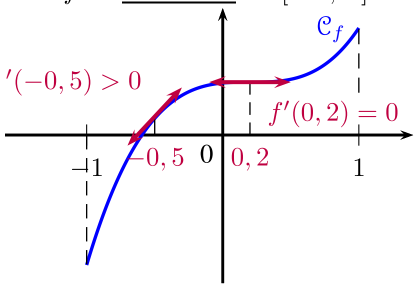
III. Lien entre les variations d'une fonction sur un intervalle et le signe de sa fonction dérivée

Propriété 3 (Admis)

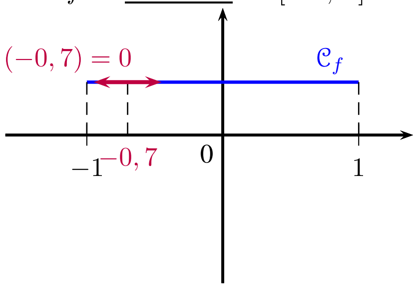
f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors $f'(x) \geqslant 0$ pour tout réel x de I.
- Si f est décroissante sur I, alors $f'(x) \leqslant 0$ pour tout réel x de I.
- Si f est constante sur I, alors $f'(x) = 0$ pour tout réel x de I.

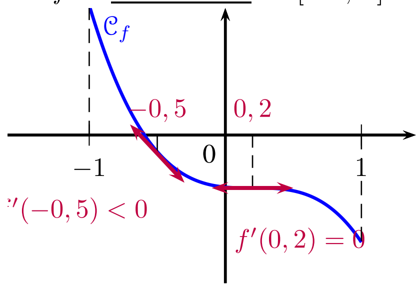
- f est **croissante** sur $[-1\ ;\ 1]$.



- f est **constante** sur $[-1\ ;\ 1]$.



- f est **décroissante** sur $[-1\ ;\ 1]$.

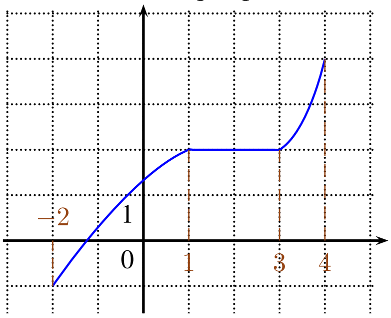


Propriété 4 (Admis)

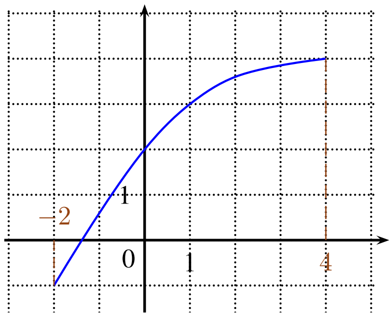
f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

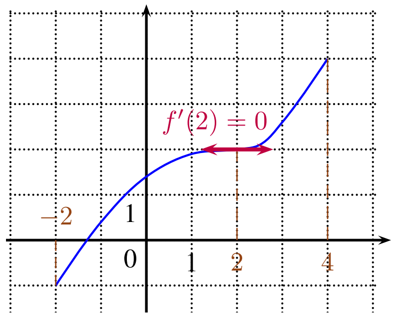
- Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout réel x de I, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout réel x de I, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout réel x de I, alors f est constante sur I.

Dans chaque cas, la courbe tracée représente une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.
Cette fonction est telle que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$, $f'(x) \geqslant 0$.



$f'(x)$ s'annule sur l'intervalle $[1\ ;\ 3]$ contenu dans $[-2\ ;\ 4]$.
On dit que f est **croissante** sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.





$f'(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$, ou bien seulement en quelques points isolés.
On dit que f est **strictement croissante** sur l'intervalle $[-2\ ;\ 4]$.

On peut en déduire :

Propriété 5

Une fonction définie et dérivable sur un intervalle I est constante, **si et seulement si**, sa fonction dérivée est nulle sur I.

IV. Notion d'extremum d'une fonction

IV.1 Extremum d'une fonction sur un intervalle

Définition 3

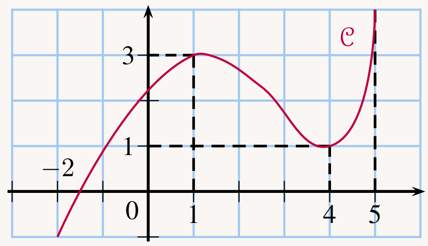
f est une fonction définie sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de I.
On dit que $f(x_0)$ est le maximum de f sur I (respectivement le minimum de f sur I) à condition que :

pour tout x de I, $f(x) \leqslant f(x_0)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(x_0)$).

Vocabulaire : On parle d'extremum sur un intervalle pour désigner un maximum ou un minimum sur un intervalle.

Exemple

La courbe ci-contre représente une fonction f définie sur $[-2; 5]$.



IV.2 Extremum local d'une fonction

Définition 4

f est une fonction définie sur un intervalle I. Soit c un réel de I.
Dire que $f(c)$ est un **maximum local** (respectivement **minimum local**) de f signifie qu'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant c tel que :

pour tout réel x de J, $f(x) \leqslant f(c)$ (respectivement $f(x) \geqslant f(c)$).

Exercice 1

Reprise de l'exemple ci-dessus : ....

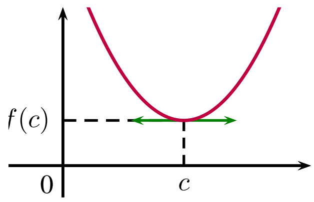
V. Extremum local et fonction dérivée

Propriété 6

f est une fonction **dérivable** sur un intervalle I.
Si $f(c)$ est un extremum local de f (maximum ou minimum), alors $f'(c) = 0$.

Conséquence graphique :

Si $f(c)$ est un extremum local, alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse c est parallèle à l'axe des abscisses.



ATTENTION

Attention ! La réciproque de cette propriété est fausse.
Voici un contre-exemple : ....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Propriété 7

f est une fonction **dérivable** sur un intervalle **ouvert** I.
Si f' s'annule et change de signe en c, alors $f(c)$ est un extremum local de f.

Exemple

Sur un intervalle ouvert $]a\ ;\ b[$ contenant c, on peut avoir :

- $f(c)$ minimum local :

x	$-\infty$	a		c		b	$+\infty$
Signe de $f'(x)$			$-$	0	$+$		
Variations de f		$f(a)$ ↘		$f(c)$	↗	$f(b)$ ↗	

$$\forall x \in \,]a\,;b[\,,\quad f(x) \geqslant f(c)$$

- <u>$f(c)$ maximum local</u> :

x	$-\infty$		a		c		b		$+\infty$
Signe de $f'(x)$				$+$	0			$-$	
Variations de f		$\nearrow$	$f(a)$	$\nearrow$	$f(c)$	$\searrow$	$f(b)$	$\searrow$	

$$\forall x \in \left]a\,;b\right[,\quad f(x) \leqslant f(c)$$

↫ Fin du cours ↬