Math93.com

Fonction exponentielle

1re Maths Spécialité

ROC
Les **ROC, (Restitution Organisée de Connaissances)**, sont les démonstrations du cours à connaître indiquées explicitement dans le nouveau programme de terminale. Ce chapitre compte 2 ROC.

I. La fonction exponentielle : une définition

I.1 Une approche historique

La naissance de la fonction exponentielle se produit à la fin du XVIIe siècle avec l'objectif de compléter la fonction puissance.
Cependant, l'idée de combler les trous entre plusieurs puissances d'un même nombre est bien plus ancienne.
Il faut attendre 1694 et le mathématicien français Jean Bernouilli (1667-1748) pour une introduction des fonctions exponentielles, cela dans une correspondance avec le mathématicien allemand Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).
Le mot « exponentielle » quant à lui apparaît pour la première fois dans la réponse de Leibniz.
C'est le génial mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) utilisa pour la première fois la notation e.

Leonhard Euler (1707-1783)

I.2 Une approche ... mathématique

La façon d'introduire la fonction exponentielle au lycée a varié au cours des années. Sachez qu'il existe de nombreuses présentations possibles. Par exemple :

1. Comme Euler avec des suites géométriques.
2. En décrivant introduisant une fonction égale à sa dérivée comme dans ce cours (et dans le programme en vigueur).
3. A partir de la relation fonctionnelle que nous verrons : $f(x+y)=f(x)f(y)$ (voir exercice du TD).

I.3 Une introduction

De nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou autres sont modélisés par une fonction qui est proportionnelle à sa dérivée. Par exemple, le phénomène de désintégration de noyaux radioactifs.
Nous allons ici nous intéresser à l'une des fonctions de ce type. Plus particulièrement, que peut-on dire d'une fonction qui serait égale à sa dérivée ?
Nous connaissons déjà au moins une fonction égale à sa dérivée : la fonction nulle, notre objectif est d'en rechercher d'autres et de les étudier.

I.4 Une fonction égale à sa dérivée

Théorème 1 (Existence(Admis))

Il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui est égale à sa dérivée, c'est-à-dire telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=f(x)$.

Lemme 1 (ROC 1)

Soit f une fonction telle que :

$$\begin{cases} f \text{définie et dérivable sur } \mathbb{R} \\ f(0) = 1 \\ f'(x) = f(x) \text{ pour tout réel } x \end{cases}$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) \times f(-x) = 1 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}$$

Remarque : un lemme, en mathématiques et en logique mathématique, est un résultat intermédiaire sur lequel on s'appuie pour conduire la démonstration d'un théorème plus important.

ROC 1 : Exigible

Soit Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\Phi(x) = f(x) \times f(-x)$, où f vérifie les données du théorème 1 .

1. Démontrer que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Puisque f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto f(-x)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
La fonction Φ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions qui le sont.

2. Démontrer que Φ est une fonction constante.

Pour tout réel x on a :

$$\Phi'(x) = f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x)$$

Puisque f est égale à sa dérivée on a pour tout réel x :

$$\Phi'(x) = f(x)f(-x) - f(x)f(-x) = 0$$

La fonction Φ est donc constante sur $\mathbb{R}$.

3. Conclure.

- Puisque :

  $$\Phi(0) = f(0) \times f(-0) = f(0)^2 = 1$$

  On obtient pour tout réel x :

  $$\Phi(x) = 1 = f(x) \times f(-x) \iff \boxed{f(x) \times f(-x) = 1}$$

- Si il existe un réel a tel que $f(a) = 0$, alors on a $f(a) \times f(-a) = 0$ ce qui est incompatible avec la relation précédente en effet :

  $$\begin{cases} f(a) = 0 \Longrightarrow f(a) \times f(-a) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}, f(x)f(-x) = 1 \end{cases}$$

  De ce fait f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2 (ROC 2)

Il existe **une unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

ROC 2 : Exigible

Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On veut montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$.

1. **Démontrer que la fonction $h = \frac{f}{g}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.**
   D'une part f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
   D'autre part, les fonction f et g ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$.
   De ce fait, la fonction quotient $h = \frac{f}{g}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car f et g le sont et g ne s'annule pas.
2. **Démontrer que la fonction $h = \frac{f}{g}$ est constante.** Pour tout réel x on a :
$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x)^2}$$
   Or puisque f et g sont égales à leurs dérivées on obtient :
$$h'(x) = \frac{f(x)g(x) - f(x)g(x)}{(g(x)^2} = 0$$
   De ce fait la fonction h est constante sur $\mathbb{R}$.
3. **Conclure.**
   La fonction h est constante sur $\mathbb{R}$ et $h(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = 1$ donc pour tout réel x on a :
$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff f(x) = g(x)$$
   Il existe donc **une unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Définition 1 (Fonction exponentielle)

On appelle fonction exponentielle, et on note $\exp$, l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, qui vérifie :
$$\begin{cases} \exp' = \exp \\ \exp(0) = 1 \end{cases}$$

II. Propriétés et relation fonctionnelle

II.1 Premières propriétés

Propriété 1 (Propriétés immédiates)

1. La fonction exp étant dérivable et continue sur $\mathbb{R}$.
2. $\exp(0) = 1$.

Pour tout réel x :

3. $\exp'(x) = \exp(x)$;
4. $\exp(x) \neq 0$;
5. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

II.2 La relation fonctionnelle

Propriété 2 (Relation fonctionnelle)

Pour tout couple de réels $(x\ ;\ y)$:

$$\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y).$$

Preuve

Soit y un réel quelconque fixé. Soit β la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\beta(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$.

1. **Montrer que β est dérivable sur $\mathbb{R}$.**
Puisque exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour y réel, la fonction $x \longmapsto \exp(x+y)$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$.
D'autre part, la fonction exp ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$.
De ce fait, la fonction quotient β est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. **Démontrer que β est constante.**
Pour tout réel x on a facilement :
$$\beta(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(x+y)\exp(-x)$$
Pour tout réel :
$$\beta'(x) = exp'(x+y)exp(-x) - exp(x+y)exp'(-x)$$
or on a $exp' = exp$ donc
$$\beta'(x) = exp(x+y)exp(-x) - exp(x+y)exp(-x) = 0$$
Puisque la dérivée de β est nulle, la fonction β est constante sur $\mathbb{R}$.

3. **Conclure.**
La fonction β est constante sur $\mathbb{R}$ et $\beta(0) = \exp(y)$ donc pour tout réel x on a $\beta(x) = \exp(y)$. On en déduit donc que :
$$\beta(x) = \exp(y) \iff \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y) \iff \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

Corollaire 1

Pour tout réel x, on a :

1. $\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
2. $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.
3. $\exp(x) > 0$.
4. $\exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$.

Preuve

1. Calculer $\exp(x + (-y))$ et conclure.

D'après la relation fonctionnelle on a pour x et y réels :

$$\exp(x + (-y)) = \exp(x)\exp(-y)$$

Or on sait que : $\exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$

Donc

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

2. Démonstration en deux étapes.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Notons pour tout entier naturel $n \geqslant 0$ la propriété

$$P(n) \;:\; \exp(nx) = (\exp(x))^n$$

- **Initialisation**
  Pour $n = 0$, la propriété $P(n)$ est vraie puisque : $\exp(0.x) = \exp(0) = 1$ et $(\exp(x))^0 = 1$.
- **Hérédité**
  Supposons que pour n entier fixé, $P(n)$ soit vérifiée et montrons qu'alors elle est aussi vraie au rang $n+1$.

  Remarque

  On admet que :
  - $\exp(nx) = (\exp(x))^n$
  - $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$ (relation fonctionnelle)

  Et on cherche à montrer que :

  $\boxed{\exp((n+1)x) = (\exp(x))^{n+1}}$ à prouver

$$\begin{aligned}\exp\Big((n+1)x\Big) &= \exp(nx+x)\\ &= \exp(nx).\exp(x) \quad \text{(relation fonctionnelle)}\\ &= (\exp(x))^n.\exp(x) \quad \text{(Hypothèse de récurrence HR)}\\ &= (\exp(x))^{n+1}\end{aligned}$$

  On a alors montré que $\exp((n+1)x) = (\exp(x))^{n+1}$ et donc que $P(n+1)$ est vraie. La propriété est donc héréditaire.
- **Conclusion**
  On a montré que $P(0)$ est vraie. De plus, la propriété est héréditaire. De ce fait la relation est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

$$\boxed{\exp(nx) = (\exp(x))^n}$$

2. b. Pour n entier négatif, on pose $p = -n \geqslant 0$. Montrer que $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

Pour n entier négatif on a en posant $p = -n \geqslant 0$:

$$\exp(nx) = \frac{1}{\exp(-nx)} = \frac{1}{\exp(px)}$$

Puisque $p=-n \geqslant 0$ on peut appliquer le résultat précédent soit :

$$\frac{1}{\exp(px)} = \frac{1}{(\exp(x))^p} = (\exp(x))^{(-p)}$$

Et donc

$$\exp(nx) = \frac{1}{\exp(px)} = (\exp(x))^{(-p)} = \Big(\exp(x)\Big)^n$$

On a donc montré que pour tout entier relatif n :

$$\boxed{\exp(nx) = \Big(\exp(x)\Big)^n}$$

3. Exprimer $\exp(x)$ en fonction de $\exp\left(\frac{x}{2}\right)$ et conclure.

Pour tout réel x on a :

$$\exp(x) = \exp\left(2\times\frac{x}{2}\right)$$

On applique alors le résultat précédent :

$$\exp(x) = \exp\left(2\times\frac{x}{2}\right) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

On en déduit que $\exp(x) \geqslant 0$.
Or on a déjà montré que la fonction exponentielle ne s'annulait pas et donc pour tout réel :

$$\boxed{\exp(x) > 0}$$

4. Exprimer $\exp(x)$ en fonction de $\exp\left(\frac{x}{2}\right)$, utiliser le résultat précédent et conclure.

On reprend le calcul précédent. On a démontré que :

$$\exp(x) = \left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2$$

Or on a montré que : $\exp(x) > 0$ donc :

$$\left(\exp\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 = \exp(x) \Longrightarrow \exp\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\exp(x)}$$

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes : $A=\left(\frac{\exp(x)+\exp(-x)}{2}\right)^2$ et $B=\frac{\exp(2x+3)}{\exp(2x-1)}$

Corrigé

II.3 Nouvelle notation : $\exp(x) = \mathrm{e}^{x}$

La notation e^{x}

- Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$,
$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = (\exp(1))^n$$
- On notera e le réel $\exp(1)$; on a alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = e^n$.
- On notera, par convention, $\exp(x) = e^x$ pour tout réel x.
- Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle assurent que cette notation reste cohérente avec la notation usuelle des puissances.

Règles de calculs

$$\mathrm{e} \approx 2,718 \qquad \mathrm{e}^{0} = 1 \qquad \mathrm{e}^{1} = \exp(1) = \mathrm{e} \qquad \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{e} \qquad \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}}$$

Pour tous réels x et y, et pour tout entier relatif n,

$$\boxed{\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^{x}}} \qquad \boxed{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x} = 1} \qquad \boxed{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} = \sqrt{\mathrm{e}^{x}}}$$

$$\boxed{\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{y}} \qquad \boxed{\mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}}} \qquad \boxed{\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^{x})^{n}}$$

Exercice 2

Démontrer les égalités suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{4\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{2x} + 3} = \frac{4}{1 + 3\,\mathrm{e}^{-2x}}.$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}\right)^2 = 4.$$

III. Étude de la fonction exponentielle

III.1 Variations

Propriété 3

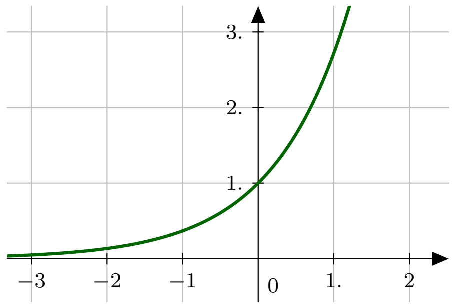
La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve

La fonction exponentielle est strictement positive d'après le corollaire 1 (page 5) de la propriété 2. Puisque elle est égale à sa dérivée, la dérivée est aussi strictement positive ce qui assure la stricte croissance de la fonction exponentielle.

III.2 Tableau de variation et représentation graphique (les limites sont admises, pour l'instant)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
Signe de $(e^x)' = \mathrm{e}^x$		+		
Variations de exp	0	1	$\mathrm{e} \approx 2.718$	$+\infty$



Propriété 4

Du sens de variation de la fonction exponentielle on en déduit que :

1. $\mathrm{e}^x < 1 \iff x < 0$; **2.** $\mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0$; **3.** $\mathrm{e}^x = 1 \iff x = 0$.

Exercice 3

1. Calculer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la représentation graphique $\mathscr{C}_{\exp}$ de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.
2. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$.
   Aide *: étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - (x+1)$.*

III.3 La fonction e^u

Propriété 5 (Admis)

Si la fonction u définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la fonction $\mathrm{e}^u : x \longmapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et :

$$\boxed{(\mathrm{e}^u)' = u'\,\mathrm{e}^u}$$

Exercice 4

Étudier la fonction ϕ définie par $\phi(x) = \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$.

IV. Équations et inéquations

IV.1 Inéquations

Propriété 6

Du sens de variation de la fonction exponentielle on en déduit que :

1. $\mathrm{e}^{x} < \mathrm{e}^{y} \iff x < y$; **2.** $\mathrm{e}^{x} > \mathrm{e}^{y} \iff x > y$; **3.** $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{y} \iff x = y$.

x	$-\infty$	x		y		$+\infty$
Signe de $(e^x)' = \mathrm{e}^{x}$			$+$			
Variations de exp	0	e^{x}		e^{y}		$+\infty$

Exercice 5

1. Calculer l'équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la représentation graphique $\mathscr{C}_{\exp}$ de la fonction exponentielle au point d'abscisse 1.

2. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{T}$ et $\mathscr{C}_{\exp}$.
Aide *: étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{x} - e.x$.*

IV.2 La fonction logarithme népérien

Propriété 7 (Logarithme (Admis))

Pour tout réel $k > 0$, l'équation $\mathrm{e}^{x} = k$ admet une unique solution α.
On note $\ln(k)$ et on lit **logarithme népérien** de k, la solution de cette équation.

On en déduit que : $\ln 1 = 0$ et $\ln \mathrm{e} = 1$

x	$-\infty$	$\ln 1 = 0$		$\ln \mathrm{e} = 1$	$\alpha = \ln k$		$+\infty$
Signe de $(e^x)' = \mathrm{e}^{x}$				$+$			
Variations de exp	0	1		$\mathrm{e} \approx 2.718$	k		$+\infty$

Remarque : pour la démonstration on utilise le corollaire du TVI.

Exercice 6

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\mathrm{e}^{x^2} = \mathrm{e}$;

2. $5\,\mathrm{e}^{2x} - 4\,\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$;

3. $\mathrm{e}^{x^2 - x} < \mathrm{e}$;

4. $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} < 0$.

Fin du cours