Math93.com

Fonctions Trigonometriques

1re Spé Maths

Remarque

Pour ce dernier chapitre de l'année, nous débordons un peu du programme de première ... Lest's Have Fun

I. Définition et dérivabilité

I.1 Définition

On se place dans tout le chapitre dans un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

Définition 1

1. La **fonction sinus**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\sin \ : \ x \longmapsto \sin x$.
2. La **fonction cosinus**, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\cos \ : \ x \longmapsto \cos x$.

I.2 Dérivabilité

Propriété 1 (Dérivabilité en 0 (Admis))

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables en 0 et on a :

$$\boxed{\cos'(0) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin'(0) = 1}$$

Propriété 2 (Dérivabilité (preuve à connaître))

Les fonctions sinus et cosinus sont **dérivables sur** $\mathbb{R}$, et pour tout réel x on a :

$$\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$$

Remarque : puisque les fonctions sont dérivables, elles sont continues sur $\mathbb{R}$ *nous le verrons en terminale.*

Propriété 3 (Dérivabilité (preuve à connaître))

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$f'(x) = a\cos(ax+b)$$

- La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :

$$g'(x) = -a\sin(ax+b)$$

- Plus généralement, si u est dérivable sur $\mathbb{R}$ on a :

$$\boxed{(\sin u)' = \cos u \times u'} \quad \text{et} \quad \boxed{(\cos u)' = -\sin u \times u'}$$

Démonstration(à connaître) de la propriété 2

Propriété 4

Pour tous les réels a et b on a :

1. $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
2. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
4. $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

Mnémotechnique pour (1) et (2) : SI-CO-CO-SI / CO-CO-SI-SI / Priorité sinus et addition / (-1) dernière

1. Soit x un nombre réel et h un nombre réel non nul. On a en appliquant les formules de trigonométrie de la propriété 4 :

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \frac{\cos x\Big(\cos h - 1\Big) - \sin x \sin h}{h} \\ &= \cos x \times \frac{(\cos h - 1)}{h} - \sin x \times \frac{\sin h}{h} \\ &= \cos x \times \frac{(\cos h - \cos 0)}{h} - \sin x \times \frac{\sin h - \sin 0}{h}\end{aligned}$$

Or, cosinus et sinus sont dérivables en 0 de dérivées respectives 0 et 1 donc

$$\begin{cases}\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\cos h - \cos 0)}{h} = \cos' 0 = 0 \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin h - \sin 0}{h} = \sin' 0 = 1\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \cos x \times \left(\lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - \cos 0)}{h}\right) - \sin x \times \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h}\right) \\ &= \cos x \times 0 - \sin x \times 1 \\ \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} &= \underline{-\sin x = \cos'(x)}\end{aligned}$$

2. Soit x un nombre réel et h un nombre réel non nul. On a en appliquant les formules de trigonométrie de la propriété 4 :

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \frac{\sin x\Big(\cos h - 1\Big) + \cos x \sin h}{h} \\ &= \sin x \times \frac{(\cos h - 1)}{h} + \cos x \times \frac{\sin h}{h} \\ &= \sin x \times \frac{(\cos h - \cos 0)}{h} + \cos x \times \frac{\sin h - \sin 0}{h}\end{aligned}$$

Or, cosinus et sinus sont dérivables en 0 de dérivées respectives 0 et 1 donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - \cos 0)}{h} = \cos' 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h} = \sin' 0 = 1$$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \ \sin x \times \left(\lim_{h\to 0} \frac{(\cos h - \cos 0)}{h}\right) + \cos x \times \left(\lim_{h\to 0} \frac{\sin h - \sin 0}{h}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \ \sin x \times 0 + \cos x \times 1 \\ &= \underline{\cos x = \sin' x}\end{aligned}$$

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{2x+1}{3}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle est de la forme $f(x) = \cos(ax+b)$, donc de dérivée $f(x) = -a\sin(ax+b)$. Pour tout réel x on a :

$$f'(x) = -\frac{2}{3}\sin\left(\frac{2x+1}{3}\right)$$

I.3 Application : Limite de $\frac{\sin x}{x}$

Propriété 5 (Limite de $\frac{\sin x}{x}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

Démonstration(à connaître)

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc d'après la propriété 2 on a :

$$\sin'(x) = \cos(x) \Longrightarrow \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

Or

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$$

I.4 Application : Limite de $\frac{\cos x - 1}{x}$

Propriété 6 (Limite de $\frac{\cos x - 1}{x}$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Démonstration(à connaître)

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc d'après la propriété 2 on a :

$$\cos'(x) = -\sin(x) \Longrightarrow \cos'(0) = -\sin(0) = 0$$

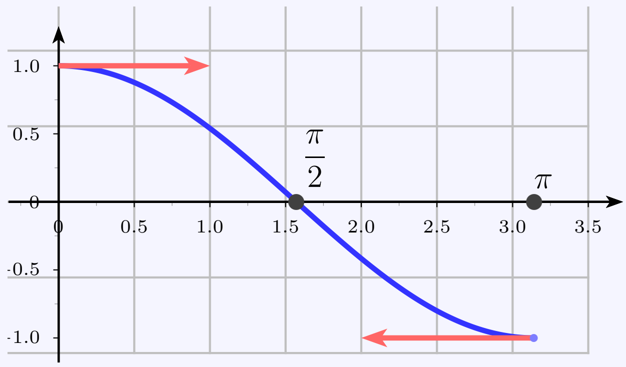
Or

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 0}{x-0} = \cos'(0) = \sin(0) = 0$$

II. Les fonctions sinus et cosinus sur $[0\ ;\ \pi]$

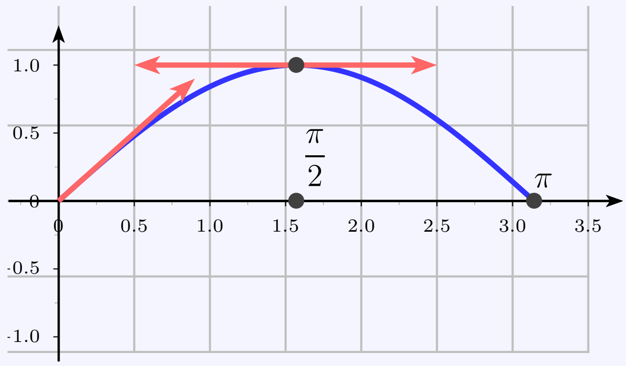
Propriété 7 (Variation de la fonction cosinus)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $\cos' x = \sin x$	0		$-$		0
Variations de $x \longmapsto \cos x$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



Propriété 8 (Variation de la fonction sinus)

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
Signe de $\sin' x = \cos x$		$+$	0	$-$	
Variations de $x \longmapsto \sin x$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



La tangente à la courbe en O est d'équation $y = x$.

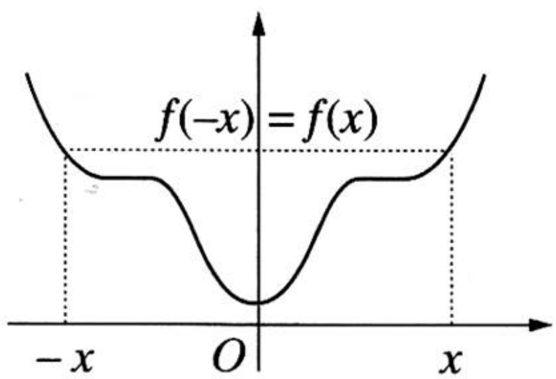
III. Les fonctions sinus et cosinus sur $\mathbb{R}$, parité et périodicité

III.1 Parité : définitions générales

Définition 2 (Fonctions paires)

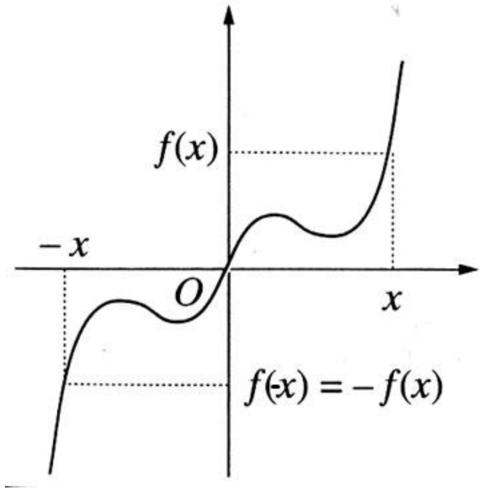
1. **Définition** :
Un fonction f définie sur I est **paire** si :
   - Pour tout réel x et I, alors $(-x) \in I$;
   - et $f(-x) = f(x)$

2. **Propriété** :
Si on se place dans un repère orthogonal $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.



Définition 3 (Fonctions impaires)

1. **Définition** :
Un fonction f définie sur I est **impaire** si :
   - Pour tout réel x et I, alors $(-x) \in I$;
   - et $f(-x) = -f(x)$
2. **Propriété** :
Si on se place dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine O**.



III.2 Parité des fonctions sinus et cosinus

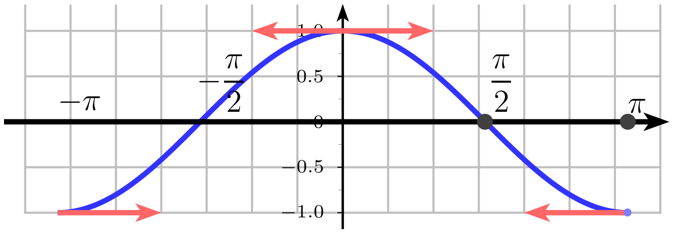
III.2.1 Propriété

Propriété 9

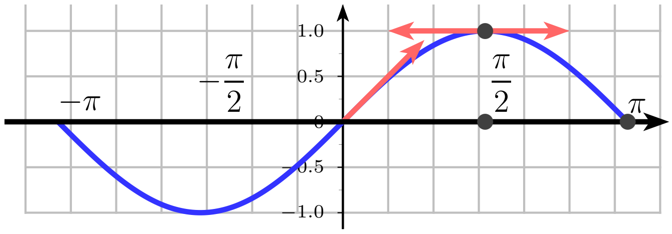
1. La fonction **cosinus est paire**.
Donc dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.
2. La fonction **sinus est impaire**.
Donc dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, sa courbe représentative est **symétrique par rapport à l'origine O**.

III.2.2 Conséquence : Courbes représentatives sur $[-\pi~;~\pi]$

Fonction cosinus



Fonction sinus



III.3 Périodicité des fonctions sinus et cosinus

Propriété 10 (Périodicité)

Pour tout réel x on a :

- $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$

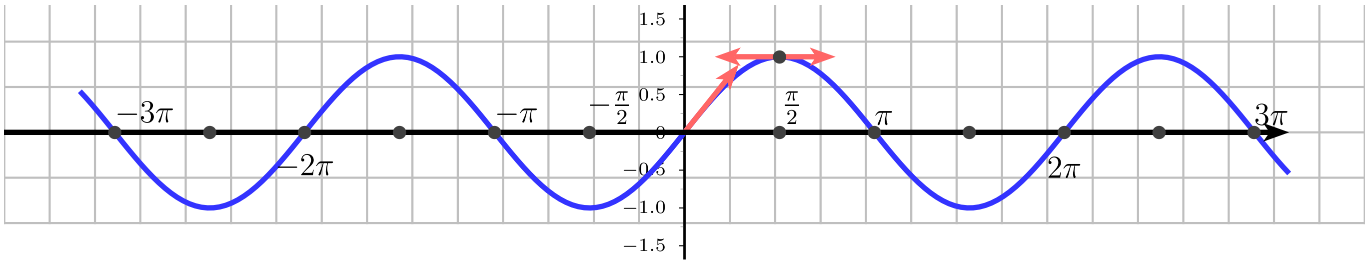
On dit que les fonction sinus et cosinus sont **périodiques de période $T = 2\pi$**.

Propriété 11 (Conséquence)

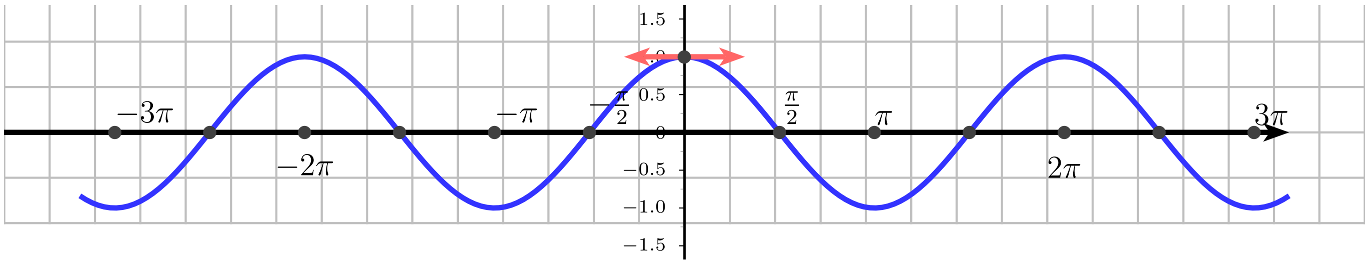
On se place dans un repère $\left(O,~\vec{\imath}~,~\vec{\jmath}\right)$.
Les fonction sinus et cosinus sont **périodiques de période $T = 2\pi$** donc il y a invariance des courbes représentatives par translation de vecteur $2\pi\vec{\imath}$.

Pour faire simple, pour les courbes il y répétition du même motif « tous les 2π ».

Fonction sinus



Fonction cosinus

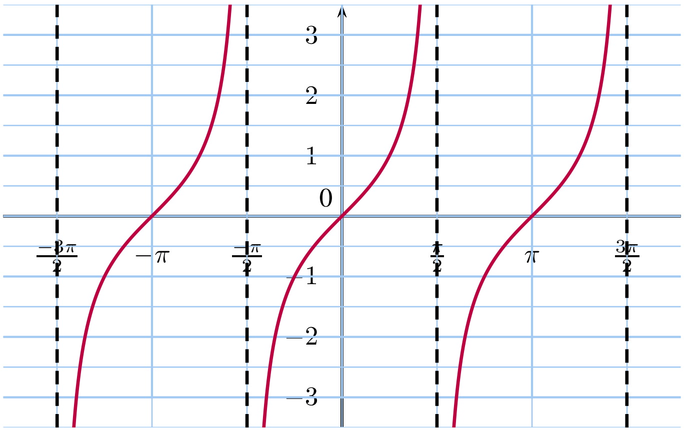


IV. Étude de la fonction tangente

Étude de la fonction tangente

La fonction tangente est la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Quel est son ensemble de définition ?
Sur quel intervalle peut-on réduire l'étude de ses variations ?
Quelles sont ses variations sur cet intervalle ?



↫ **Fin du cours** ↬