Math93.com

Probabilités Conditionnelles (*Conditional probability*)(élève)

1re Spé Maths

I. Probabilités conditionnelles (*Conditional probability*)

La notion de probabilité conditionnelle intervient quand pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une information est fournie modifiant ainsi la probabilité d'un évènement.

I.1 Définition

Théorème 1

Soient A et B deux évènements d'un même univers tel que $p(A) \neq 0$.
La probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé se note $p_A(B)$ et on a :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarque :
Si $p(B) \neq 0$ on définit de même $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

Exercice 1

Une usine produit des articles en grande quantité, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage. Une étude statistique a permis de constater que 12% des articles sont défectueux, 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage.
Un article choisi au hasard présente un défaut d'emballage. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi un défaut de fabrication ?

Corrigé

Notons F l'évènement « un article prélevé au hasard présente un défaut de fabrication » et E l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente un défaut d'emballage ». La probabilité cherchée est donc :

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

- 12% des articles ont a un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage d'où $p(F \cup E) = \cdots\cdots$.
- 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage d'où $p(F) = \cdots\cdots$ et $p(E) = \cdots\cdots$.
- La probabilité qu'un article ait les deux défauts est :

$$p(F \cap E) = \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p(F \cap E) = \cdots\cdots\cdots\cdots$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est égale à $\cdots\cdots$.

I.2 Formule des probabilités composées

La relation définissant la probabilité conditionnelle peut s'écrire de la manière suivante

$$p\left(A \cap B\right) = p_A(B) \times p(A)$$

Cette écriture s'appelle la formule des probabilités composées

Théorème 2

Soient A et B deux évènements d'un même univers tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors :

$$p\left(A \cap B\right) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

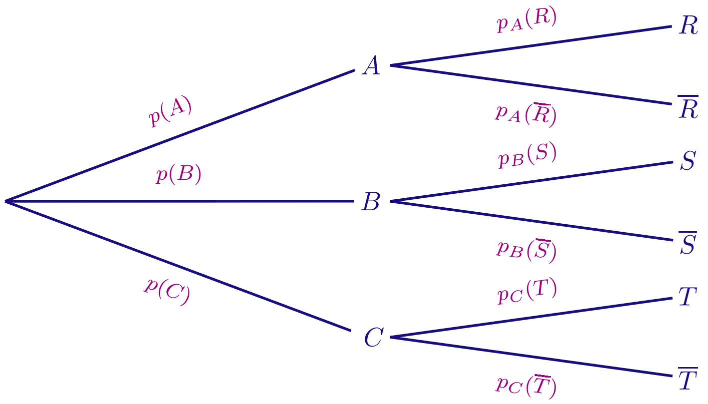
Exercice 2

85 % d'une population est vaccinée contre une maladie. On a constaté que 2% des individus vaccinés n'ont pas été immunisés contre cette maladie.
Quelle est la probabilité qu'un individu soit vacciné et malade ?

Corrigé

II. Représentation sous forme d'un arbre pondéré (*tree diagram*)

Une expérience aléatoire mettant en jeu des probabilités conditionnelles peut être schématisée par un arbre pondéré dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.



$\Longrightarrow \quad p(R \cap A) = p(A) \times p_A(R)$

Définition 1 (Vocabulaire)

- La racine (*root node*) de l'arbre est l'univers Ω.
- Une branche relie deux évènements.
- Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des évènements qui le composent.
  Par exemple, le chemin dont l'extrémité est R représente l'évènement $A \cap R$.
- Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
  Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé.

Règle 1

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.

III. Formule des probabilités totales

III.1 Cas de deux évènements

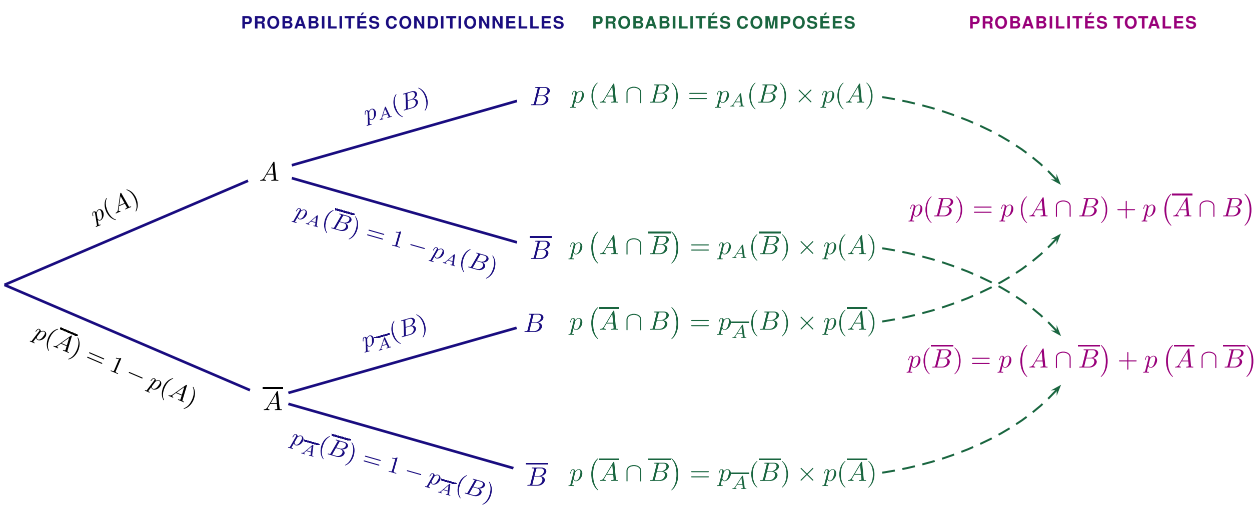
Théorème 3 (Probabilités totales)

Si A est un évènement de Ω tel que $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω

$$\boxed{p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{p(B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p\left(\overline{A}\right)}$$

Remarque *: on pourra lors de l'application de cette formule des probabilités totales indiquer que A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers, comme on va le voir ci-après.*

Preuve


PROBABILITÉS CONDITIONNELLES
PROBABILITÉS COMPOSÉES
PROBABILITÉS TOTALES
$p(A)$
$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
A
$\overline{A}$
$p_A(B)$
$p_A(\overline{B}) = 1 - p_A(B)$
$p_{\overline{A}}(B)$
$p_{\overline{A}}(\overline{B}) = 1 - p_{\overline{A}}(B)$
B $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$
$\overline{B}$ $p(A \cap \overline{B}) = p_A(\overline{B}) \times p(A)$
B $p(\overline{A} \cap B) = p_{\overline{A}}(B) \times p(\overline{A})$
$\overline{B}$ $p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p_{\overline{A}}(\overline{B}) \times p(\overline{A})$
$p(B) = p(A \cap B) + p(\overline{A} \cap B)$
$p(\overline{B}) = p(A \cap \overline{B}) + p(\overline{A} \cap \overline{B})$

III.2 Partition

Définition 2

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n\}$ un ensemble d'évènements de probabilités non nulles d'un même univers Ω.
A_1, A_2, …, A_n forment une partition de l'univers Ω si, et seulement si, tout évènement élémentaire de Ω appartient à l'un des évènements A_i et à un seul. C'est à dire si, et seulement si,

1. Pour tous entiers i et j tels que $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.

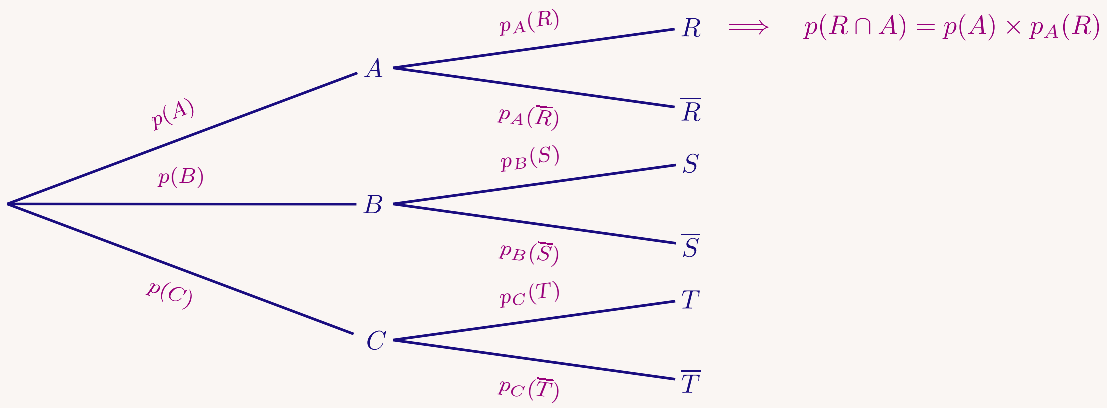
2. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Remarques :

- Un évènement A de probabilité non nulle et son évènement contraire $\overline{A}$ forment une partition de Ω.
- Si les évènements $A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n$ forment une partition de Ω alors

$$\sum_{i=1}^{n} p(A_i) = p\left(A_1\right) + p\left(A_2\right) + \dots + p\left(A_n\right) = 1$$

Exemple



Les évènements qui se trouvent aux extrémités des branches issues d'un même nœud forment une partition de l'évènement situé à ce nœud.
Par exemple, $\{A, B, C\}$ est une partition de l'univers Ω et $\{S, \overline{S}\}$ est une partition de l'évènement B.

III.3 Formule des probabilités totales

Théorème 4

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 si $\{A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n\}$ est une partition de Ω alors pour tout évènement B de Ω,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B)$$

Exercice 3

Le parc informatique d'une entreprise est constitué d'ordinateurs de marques A, B ou C référencés au service de maintenance. 60% des ordinateurs sont de la marque A et parmi ceux-ci, 15 % sont des portables. 30 % des ordinateurs sont de la marque B et 20 % d'entre eux sont des portables. Les autres ordinateurs sont de la marque C et 50 % d'entre eux sont des portables.

On consulte au hasard la fiche d'un ordinateur, quelle est la probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable ?

Preuve

IV. Évènements indépendants (*Statistical independence*)

IV.1 Indépendance de deux évènements

Définition 3

Dire que deux évènements évènements A et B sont indépendants signifie que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Dire que deux évènements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'évènement de l'autre.

IV.2 Propriété

Théorème 5

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ on a les équivalences :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants } \Leftrightarrow p_B(A) = p(A) \Leftrightarrow p_A(B) = p(B)$$

Preuve

Fin du cours