Math93.com

Produit Scalaire (*Dot product*)

1re Spé Maths

I. Norme d'un vecteur du plan (*Norm of a Vector*)

Définition 1

Dans le plan, $\overrightarrow{u}$ est un vecteur, A et B deux points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

La **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $\|\overrightarrow{u}\|$, est la distance AB.

On rappelle la propriété suivante :

Propriété 1 (Norme d'un vecteur (*Norm of a Vector*))

Dans un repère **orthonormé** du plan, si $A(x_A\,;\,y_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B)$ sont deux points et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur, alors :

- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :

$$\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\end{pmatrix}}$$

- La nome des vecteur $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{u}$ sont :

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\left\|\overrightarrow{u}\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

- Pour k réel on a :

$$\boxed{\left\|k\overrightarrow{u}\right\| = |k| \times \left\|\overrightarrow{u}\right\|}$$

II. Produit scalaire de deux vecteurs du plan (*Dot Product*)

II.1 Formule avec le cosinus

Définition 2

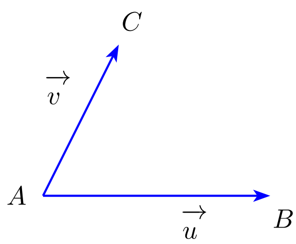
L'angle (orienté) formé par deux représentants de même origine des vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ se note :

$$\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\right) \text{ ou } \left(\widehat{\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}}\right)$$

Définition 3 (Produit scalaire (*Dot Product*))

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non nuls du plan, alors le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le réel noté $\overrightarrow{u}\,.\overrightarrow{v}$ et défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}\,,\,\overrightarrow{v}\right)}$$



Le produit scalaire se note aussi :

$$\left(\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\right) \quad \text{ou} \quad \langle\overrightarrow{u}\mid\overrightarrow{v}\rangle \quad \text{ou} \quad \langle\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v}\rangle$$

Vocabulaire

- Pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan,
$$\vec{u}\cdot\vec{u}=\left\|\vec{u}\right\|^2$$
En effet $\cos\left(\vec{u},\vec{u}\right)=\cos 0=1$.

- Le réel positif $\vec{u}\cdot\vec{u}$ est noté $\left(\vec{u}\right)^2$ ou simplement $\vec{u}^{\,2}$ et est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$.
$$\boxed{\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^{\,2}=\left\|\vec{u}\right\|^2}$$

- Si $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$, alors le carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au carré de la distance AB.
$$\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}^{\,2}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}$$

Remarque

1. Cas particulier où l'un des deux vecteurs est nul :
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
$$\vec{0}\cdot\vec{u}=\vec{u}\cdot\vec{0}=0$$
2. ATTENTION : Le produit scalaire de deux vecteurs peut être nul sans qu'aucun des deux vecteurs ne soit nul.

Exercice 1

Soit ABC un triangle équilatéral de côté $a\in\mathbb{R}_+^*=]0\,;\,+\infty[$.
Montrer que :
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{a^2}{2}$$

Correction

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=AB\times AC\times\cos\frac{\pi}{3}\\&=a^2\times\frac{1}{2}\\\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=\frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

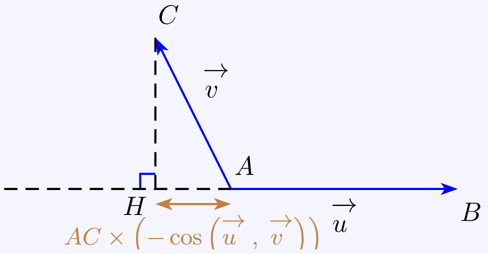
II.2 Formule du projeté orthogonal

Propriété 2 (Formule du projeté orthogonal ())

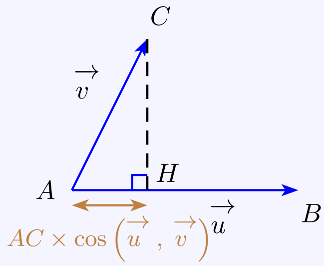
Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs non nuls du plan et si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), alors

$$\boxed{\vec{u} \,.\, \vec{v} = \overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AH}}$$

Cas où $\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right) \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, le cosinus est négatif donc :



Cas où $\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right) \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$, le cosinus est positif donc :



En conséquence :

- si $H \in [AB]$,

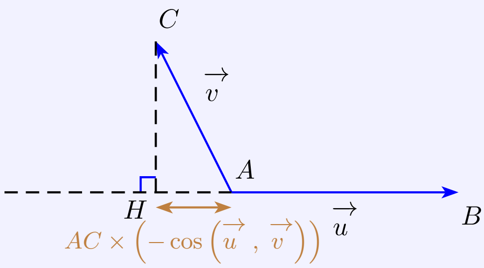
$$\boxed{\vec{u} \,.\, \vec{v} = AB \times AH}$$

- et si $H \notin [AB]$,

$$\boxed{\vec{u} \,.\, \vec{v} = -AB \times AH}$$

Preuve

1. Cas où $\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right) \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$, le cosinus est négatif donc :



D'une part :

$$\vec{u} \,.\, \vec{v} = AB \times AC \times \cos\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AH}\right)$$

or $\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AH}\right) = \pi$ donc $\cos\left(\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AH}\right) = -1$ d'où

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AH} = -AB \times AH$$

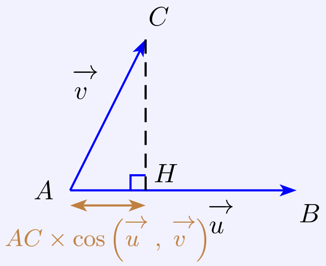
Et dans le triangle ABH rectangle en H on obtient :

$$AH = AC \times \left(-\cos\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)\right)$$

ce qui nous donne

$$\overrightarrow{AB} \,.\, \overrightarrow{AH} = AB \times AC \times \cos\left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$$

2. Cas où $\left(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\right) \in \left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, le cosinus est positif donc :



La démonstration est similaire .

D'une part :

$$\overrightarrow{u}\,.\,\overrightarrow{v} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH} = AB \times AH \times \cos\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AH}\right)$$

or $\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AH}\right) = 0$ donc $\cos\left(\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AH}\right) = 1$ d'où

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH} = AB \times AH$$

Et dans le triangle ABH rectangle en H on obtient :

$$AH = AC \times \cos\left(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\right)$$

ce qui nous donne

$$\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH} = AB \times AC \times \cos\left(\overrightarrow{u}\ ,\ \overrightarrow{v}\right)$$

III. Propriétés du produit scalaire

III.1 Symétrie et bilinéarité

Propriété 3

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan et pour tout réel k :

1. Symétrie

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}}$$

Bilinéarité :

2.

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\left(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}}$$

3.

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\left(k\overrightarrow{v}\right) = \left(k\overrightarrow{u}\right).\overrightarrow{v} = k\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)}$$

Preuve

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan et pour tout réel k :

1. Puisque $\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = \cos\left(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}\right)$ on a directement le résultat.
2. On montrera cette propriété en exercice.
3. Soit k un réel.
   - Si $k > 0$ alors $\overrightarrow{v}$ et $k\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens donc $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = \left(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}\right)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\left(k\overrightarrow{v}\right) &= \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{kv}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}\right)\\ &= \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{kv}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)\\ &= \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times |k| \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)\end{aligned}$$

   et puisque $k > 0$ on a $|k| = k$ donc :

$$= k \times \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$$

   - Si $k < 0$ alors $\overrightarrow{v}$ et $k\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de sens opposé donc $\left(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}\right) = \pi - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ et les cosinus sont opposés :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\left(k\overrightarrow{v}\right) &= \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{kv}\right\| \times \cos\left(\overrightarrow{u}, k\overrightarrow{v}\right)\\ &= \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{kv}\right\| \times \cos\left(\pi - \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)\right)\\ &= \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times |k| \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \left(-\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)\right)\end{aligned}$$

   et puisque $k < 0$ on a $|k| = -k$ donc :

$$\begin{aligned}&= \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times (-k) \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \left(-\cos\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)\right)\\ &= k \times \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\end{aligned}$$

   - On obtient l'autre par symétrie.

III.2 Identités remarquables

Propriété 4

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan :

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
2. $(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
3. $(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

Preuve

1.

$$\begin{aligned}\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 &= \left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\\ &= \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v}\end{aligned}$$

En appliquant la propriété de symétrie du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$

2. En remplaçant $\vec{v}$ par $-\vec{v}$ dans l'expression précédente :

$$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$$

3.

$$\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \vec{u}.\vec{u} - \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} - \vec{v}.\vec{v}$$

En appliquant la propriété de symétrie du produit scalaire : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$

$$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

III.3 Produit scalaire et orthogonalité

Définition 4

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux à condition que les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires.

Propriété 5

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est égal à zéro.

Preuve

1. Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux alors $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \frac{\pi}{2}$ ou $\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = -\frac{\pi}{2}$ et donc $\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0$ ce qui montre que $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
2. Réciproquement, si le produit scalaire de deux vecteurs non nuls est nul alors $\cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = 0$ et les vecteurs sont orthogonaux.

IV. Autres expressions du produit scalaire de deux vecteurs non nuls du plan

IV.1 Formules analytiques du produit scalaire

Propriété 6

Dans un repère **orthonormé** du plan, si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs, alors

$$\boxed{\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = xx' + yy'}$$

Preuve

On se place dans un repère **orthonormé** du plan $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs, on a alors par définition des coordonnées dans un repère :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$$

De ce fait en utilisant la propriété de bilinéarité :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} &= \left(x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}\right).\left(x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}\right)\\ &= x\overrightarrow{i}.x'\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{i}.y'\overrightarrow{j} + y\overrightarrow{j}.x'\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}.y'\overrightarrow{j}\\ &= xx'\overrightarrow{i}.\overrightarrow{i} + xy'\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} + yx'\overrightarrow{j}.\overrightarrow{i} + yy'\overrightarrow{j}.\overrightarrow{j}\end{aligned}$$

Or puisque le repère est orthogonal, on a $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = 0 = \overrightarrow{j}.\overrightarrow{i}$ donc :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = xx'\overrightarrow{i}^2 + yy'\overrightarrow{j}^2$$

Or puisque le repère est orthonormé, on a $\left|\left|\overrightarrow{i}\right|\right|^2 = \overrightarrow{i}^2 = 1$ et $\left|\left|\overrightarrow{j}\right|\right|^2 = \overrightarrow{j}^2 = 1$ donc :

$$\boxed{\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix} = xx' + yy'}$$

IV.2 Expression du produit scalaire à l'aide de normes

Propriété 7

Pour tout vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ on a :

1.

$$\boxed{\left|\left|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right|\right|^2 = \left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right|^2 + 2 \times \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \left|\left|\overrightarrow{v}\right|\right|^2}$$

2.

$$\boxed{\left|\left|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right|\right|^2 = \left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right|^2 - 2 \times \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \left|\left|\overrightarrow{v}\right|\right|^2}$$

Preuve

1.

$$\begin{aligned}\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 &= \left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2\\ &= \left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\\ &= \vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}\\ &= \vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2\\ &= \left\|\vec{u}\right\|^2+2\times\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2 &= \left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2\\ &= \vec{u}.\vec{u}-\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}\\ &= \vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2\\ &= \left\|\vec{u}\right\|^2-2\times\vec{u}.\vec{v}+\left\|\vec{v}\right\|^2\end{aligned}$$

Propriété 8

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan est le **nombre réel**, noté $\vec{u}.\vec{v}$, défini par :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}\right\|^2+\left\|\vec{v}\right\|^2-\|\vec{v}-\vec{u}\|^2\right)}$$

Preuve

Il suffit d'utiliser les deux expressions de la propriété 7.

Propriété 9

1.

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}\right\|^2-\left\|\vec{v}\right\|^2\right)}$$

2.

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{4}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2-\left\|\vec{u}-\vec{v}\right\|^2\right)}$$

Preuve

Il suffit d'utiliser les deux expressions de la propriété 7.

Fin du cours