



I. Fonction polynôme du second degré (*Quadratic function*)

I.1 Définition

Définition 1 (Fonction polynôme du second degré)

Une **fonction polynôme du second degré** ou **polynôme du second degré** est une fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ où } a, b, c \text{ sont des réels fixés avec } a \neq 0$$

Un **polynôme du second degré** est aussi appelé un **trinôme du second degré**.

Les constantes a, b et c sont les coefficients de ce polynôme.

**Exemple**

- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ est un trinôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \end{cases}$$

- La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -3x^2 + 9$ est un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \end{cases}$$

- La fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2 + 2x$ est un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \end{cases}$$

- La fonction k définie sur \mathbb{R} par $k(x) = 2x - 7$

I.2 Discriminant (*Discriminant*)

Définition 2 (Discriminant)

Soit une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, le réel Δ est appelé **discriminant** :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

**Exemples**

- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ est un trinôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \end{cases} \implies \Delta_1 = \dots$$

- La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -3x^2 + 9$ est un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$, on a :

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \end{cases} \implies \Delta_2 = \dots$$

- La fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2 + 2x$ est un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$, on a :

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \end{cases} \implies \Delta_3 = \dots$$

I.3 Forme canonique (Vertex Form)**I.3.1 Exemple type****Exemple : Forme canonique (Vertex Form)**

$$2x^2 + 6x + 4 = 2(x^2 + 3x) + 4$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 2\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right) + 4$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 4$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$(x + \dots)^2 = x^2 + 3x + \dots$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

donc on peut écrire que

$$x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

**Exercice 1**

Déterminer la forme canonique des polynôme suivants définis sur \mathbb{R} par :

1. $f(x) = x^2 - 6x + 4$

.....

.....

.....

.....

2. $g(x) = 2x^2 + 6x + 4$

.....

.....

.....

.....

I.3.2 Propriété

Propriété 1 (Forme canonique)

Soit un polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

On montre que :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = \frac{-\Delta}{4a}$$

**Preuve exigible! (peut être demandée en DS)**

I.3.3 Exemples



Exercice 2

On va retrouver les formes canoniques de l'exercice précédent :

- Soit f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 6x + 4$.
 f est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = \dots \\ \alpha = \dots \\ \beta = \dots \end{cases}$$

Soit $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = \dots\dots\dots$

- Soit g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 2x^2 + 6x + 4$.
 g est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = \dots \\ b = \dots \\ c = \dots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = \dots \\ \alpha = \dots \\ \beta = \dots \end{cases}$$

Soit $g(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = \dots\dots\dots$

I.4 Conséquence : Étude d'une fonction polynôme du second degré (seconde)

On retrouve les résultats obtenus en seconde.

Propriété 2

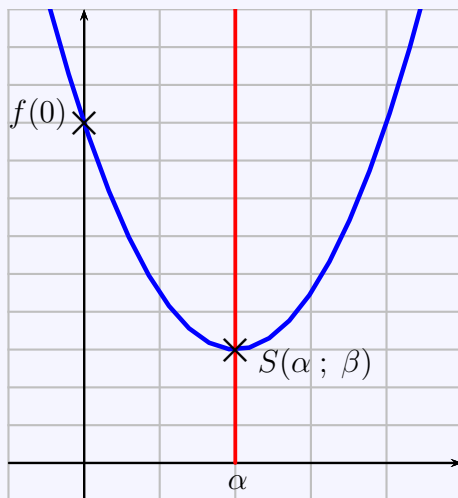
Les variations sur \mathbb{R} d'une fonction polynôme de degré 2 sont de deux types selon le signe de a :

$$f : x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2a} \\ \beta = -\frac{\Delta}{4a} = f(\alpha) \end{cases}$$

Si $a > 0$

- f est décroissante puis croissante ;
- f atteint son **minimum** β
pour $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.

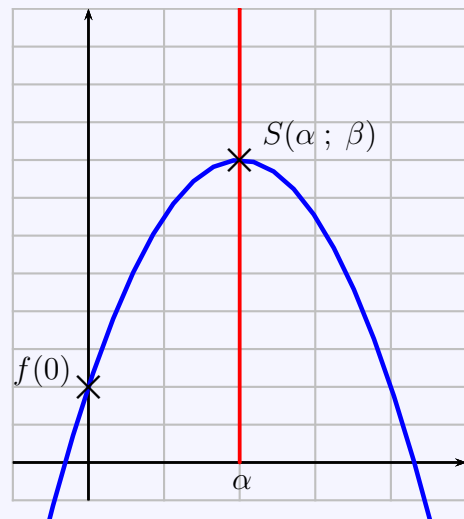
x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	$+\infty$	β	$+\infty$



Si $a < 0$

- f est croissante puis décroissante ;
- f atteint son **maximum** β
pour $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	$-\infty$	β	$-\infty$



Dans tous les cas :

- La courbe représentative de f , \mathcal{C}_f , est une **parabole** de **sommet** $S(\alpha ; \beta)$;
- La courbe \mathcal{C}_f admet la droite $D : x = \alpha$ comme axe de symétrie.
L'équation de D s'écrit aussi $D : x = \frac{-b}{2a}$.

Remarque : Le terme parabole vient du grec *parabolê*, para = à côté et *ballein* = lancer, jeter. La parabole correspond à la trajectoire d'un projectile lancé hors la verticale, et retombant à terre. Le terme est d'Apollonius de Perge (v. 262-v. 190 av. J.-C.).

II. Équation du second degré (*quadratic equation*)

II.1 Définition

Définition 3 (Équation du second degré (*quadratic equation*))

On appelle :

1. **Équation du second degré** toute équation qui peut s'écrire sous la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
2. **Racine du trinôme (Root)** $f(x) = ax^2 + bx + c$, tout réel solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
3. **Racines d'une fonction polynôme f** tout réel qui a 0 pour image, c'est-à-dire tout réel qui vérifie l'équation $f(x) = 0$.

Propriété 3 (Interprétation graphique)

Soit une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Les solutions, si elles existent, d'une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection éventuels de \mathcal{C}_f , la courbe représentative de f , avec l'axe des abscisses.

II.2 Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

On a toujours $a \neq 0$. A partir de la forme canonique obtenue lors de la propriété (I.3.2) on obtient :

Théorème 1

Le signe du discriminant Δ permet de déterminer le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation du second degré a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

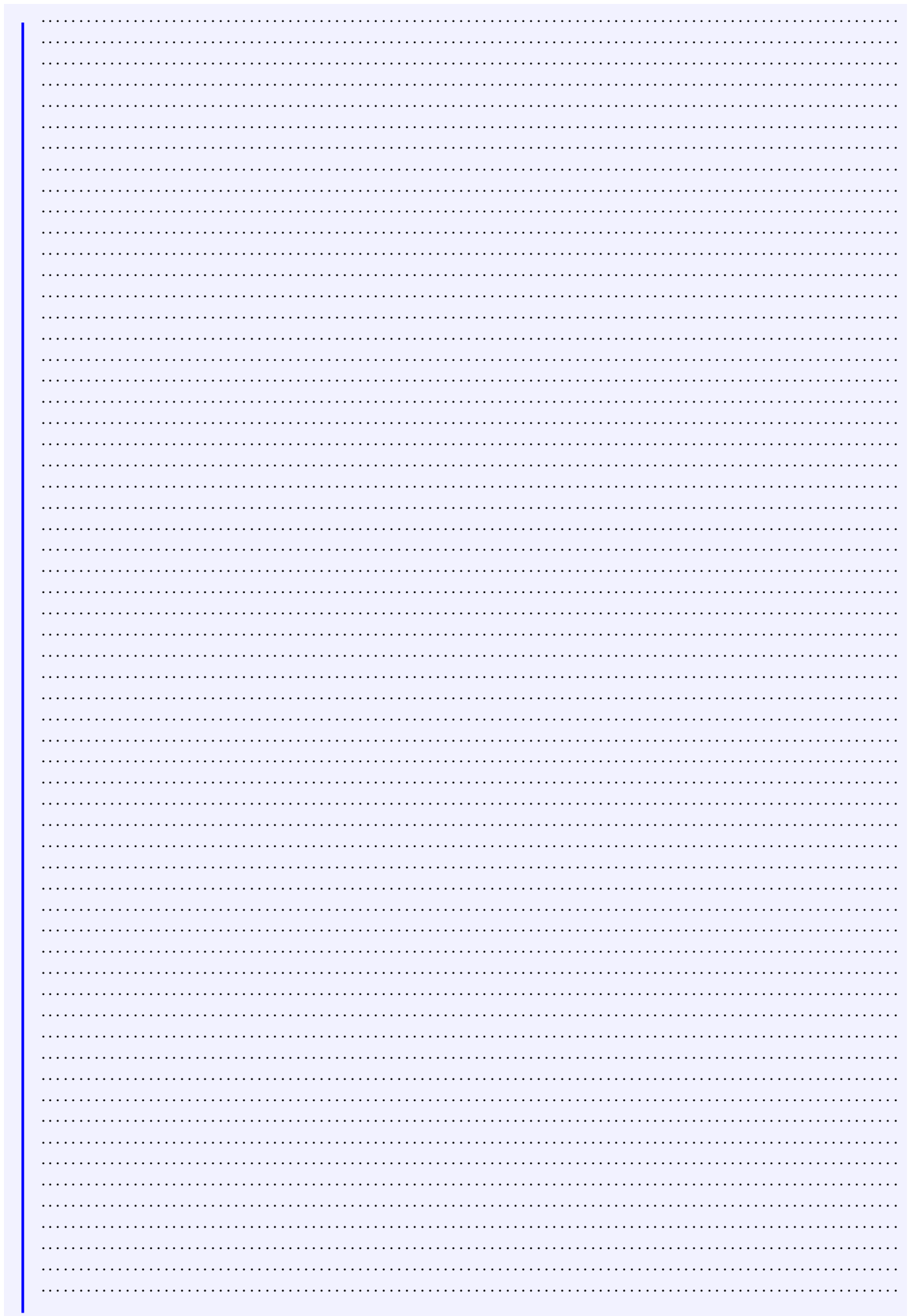
- Si $\Delta = 0$, l'équation du second degré a une seule solution réelle. On parle de racine double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation du second degré n'a pas de solution réelle.



Preuve exigible! (peut être demandée en DS)



.....
.....
.....

III.2 Étude de signe

Théorème 2 (Factorisation et tableau de signe)

Selon le signe du discriminant Δ et de a on obtient avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cas 1 ($\Delta > 0$)

Si $\Delta > 0$:

Le trinôme du second degré $f(x) = (ax^2 + bx + c)$, présente deux racines réelles et la factorisation est :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

En notant X_1 et X_2 les racines avec $X_1 < X_2$ on a :

x	$-\infty$	X_1	X_2	$+\infty$
signe de $(ax^2 + bx + c)$	signe de a	0	signe de $(-a)$	signe de a

Cas 2 ($\Delta = 0$)

Si $\Delta = 0$:

Le trinôme du second degré $f(x) = (ax^2 + bx + c)$, présente une racine réelle et la factorisation est :

$$x_1 = \frac{-b}{2a} \text{ et } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
signe de $(ax^2 + bx + c)$	signe de a	0	signe de a

Cas 3 ($\Delta < 0$)

Si $\Delta < 0$:

Le trinôme du second degré $f(x) = (ax^2 + bx + c)$, n'a pas de racine réelle et on ne peut pas factoriser, on a juste la factorisation canonique :

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ ou } \begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2a} \\ \beta = -\frac{\Delta}{4a} = f(\alpha) \end{cases}$$

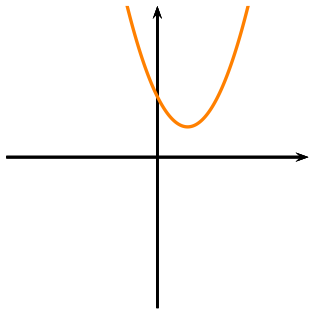
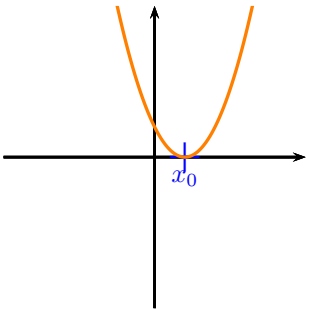
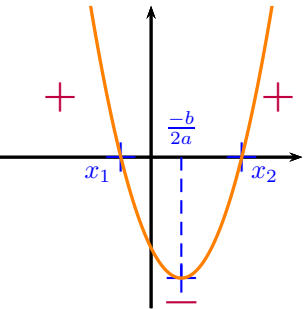
Tableau de signe :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $(ax^2 + bx + c)$	signe de a	

Mémo : Signe de a à l'extérieur des racines.

IV. Bilan

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Nombre de racines	0	1 (racine double)	2 (2 racines distinctes)
Racines		$x_0 = \frac{-b}{2a}$	$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$
Factorisation		$f(x) = a(x - x_0)^2$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Signe	f est du signe de a sur \mathbb{R}	f est du signe de a sur \mathbb{R} et f est nul pour $x = x_0$	f est du signe de a en dehors de l'intervalle des racines
Représentation graphique Cas où $a > 0$			
Représentation graphique Cas où $a < 0$	