



Second Degré

1re Spé Maths

I. Fonction polynôme du second degré (*Quadratic function*)

I.1 Définition

Définition 1 (Fonction polynôme du second degré)

Une **fonction polynôme du second degré** ou **polynôme du second degré** est une fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ où } a, b, c \text{ sont des réels fixés avec } a \neq 0$$

Un **polynôme du second degré** est aussi appelé un **trinôme du second degré**.

Les constantes a, b et c sont les coefficients de ce polynôme.

**Exemple**

- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ est un trinôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

- La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -3x^2 + 9$ est un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 9 \end{cases}$$

- La fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2 + 2x$ est un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases}$$

- La fonction k définie sur \mathbb{R} par $k(x) = 2x - 7$ n'est pas un polynôme du second degré mais une fonction affine.

I.2 Discriminant (*Discriminant*)

Définition 2 (Discriminant)

Soit une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, le réel Δ est appelé **discriminant** :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

**Exemples**

- La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ est un trinôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases} \implies \Delta_1 = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16$$

- La fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -3x^2 + 9$ est un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$, on a :

$$\begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 9 \end{cases} \implies \Delta_2 = 0^2 - 4 \times (-3) \times 9 = 108$$

- La fonction h définie sur \mathbb{R} par $h(x) = x^2 + 2x$ est un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases} \implies \Delta_3 = 2^2 - 4 \times 1 \times 0 = 4$$

I.3 Forme canonique (Vertex Form)**I.3.1 Exemple type****Exemple : Forme canonique (Vertex Form)**

$$2x^2 + 6x + 4 = 2(x^2 + 3x) + 4$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 2\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right) + 4$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 4$$

$$2x^2 + 6x + 4 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$(x + \dots)^2 = x^2 + 3x + \dots$$

$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

donc on peut écrire que

$$x^2 + 3x = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

**Exercice 1**

Déterminer la forme canonique des polynôme suivants définis sur \mathbb{R} par :

1. $f(x) = x^2 - 6x + 4$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 6x + 4 \\ &= x^2 - 6x + 9 - 5 \end{aligned}$$

$$f(x) = (x - 3)^2 - 5$$

2. $g(x) = 2x^2 + 6x + 4$

$$\begin{aligned} g(x) &= 2x^2 + 6x + 4 \\ &= 2 \left[x^2 + 3x + 2 \right] \\ &= 2 \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4} + 2 \right] \\ &= 2 \left[\left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \end{aligned}$$

$$g(x) = 2 \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}$$

I.3.2 Propriété

Propriété 1 (Forme canonique)

Soit un polynôme de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, il existe deux réels α et β tels que :

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$$

On montre que :

$$\alpha = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad \beta = f(\alpha) = \frac{-\Delta}{4a}$$



Preuve exigible! (peut être demandée en DS)

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \\ f(x) &= a \left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right] \\ f(x) &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2} \right] \\ f(x) &= a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] \\ f(x) &= a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \end{aligned}$$

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2a} \\ \beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = \frac{-\Delta}{4a} \end{cases}$$

I.3.3 Exemples



Exercice 2

On va retrouver les formes canoniques de l'exercice précédent :

- Soit f définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 6x + 4$.
 f est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 20 \\ \alpha = \frac{6}{2} = 3 \\ \beta = \frac{-20}{4} = -5 \end{cases} \text{ soit } \boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = (x - 3)^2 - 5}$$

- Soit g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = 2x^2 + 6x + 4$.
 g est une fonction polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ avec :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = 4 \\ \alpha = -\frac{3}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ soit } \boxed{g(x) = 2 \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}}$$

I.4 Conséquence : Étude d'une fonction polynôme du second degré (seconde)

On retrouve les résultats obtenus en seconde.

Propriété 2

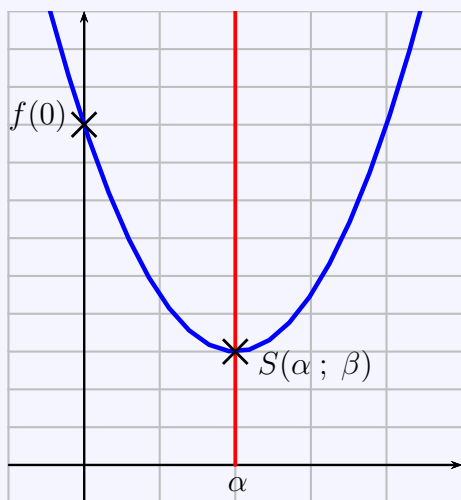
Les variations sur \mathbb{R} d'une fonction polynôme de degré 2 sont de deux types selon le signe de a :

$$f : x \mapsto f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2a} \\ \beta = -\frac{\Delta}{4a} = f(\alpha) \end{cases}$$

Si $a > 0$

- f est décroissante puis croissante ;
- f atteint son **minimum** β
pour $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.

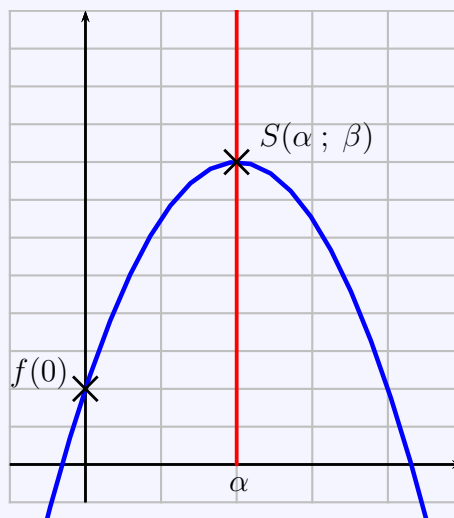
x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	$+\infty$	β	$+\infty$



Si $a < 0$

- f est croissante puis décroissante ;
- f atteint son **maximum** β
pour $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$.

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	$-\infty$	β	$-\infty$



Dans tous les cas :

- La courbe représentative de f , \mathcal{C}_f , est une **parabole** de **sommet** $S(\alpha ; \beta)$;
- La courbe \mathcal{C}_f admet la droite $D : x = \alpha$ comme axe de symétrie.
L'équation de D s'écrit aussi $D : x = \frac{-b}{2a}$.

Remarque : Le terme parabole vient du grec *parabolê*, para = à côté et *ballein* = lancer, jeter. La parabole correspond à la trajectoire d'un projectile lancé hors la verticale, et retombant à terre. Le terme est d'Apollonius de Perge (v. 262-v. 190 av. J.-C.).

II. Équation du second degré (*quadratic equation*)

II.1 Définition

Définition 3 (Équation du second degré (*quadratic equation*))

On appelle :

- Équation du second degré** toute équation qui peut s'écrire sous la forme : $ax^2 + bx + c = 0$ où a , b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
- Racine du trinôme (Root)** $f(x) = ax^2 + bx + c$, tout réel solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
- Racines d'une fonction polynôme f** tout réel qui a 0 pour image, c'est-à-dire tout réel qui vérifie l'équation $f(x) = 0$.

Propriété 3 (Interprétation graphique)

Soit une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Les solutions, si elles existent, d'une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont les abscisses des points d'intersection éventuels de \mathcal{C}_f , la courbe représentative de f , avec l'axe des abscisses.

II.2 Résolution de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$

On a toujours $a \neq 0$. A partir de la forme canonique obtenue lors de la propriété (I.3.2) on obtient :

Théorème 1

Le signe du discriminant Δ permet de déterminer le nombre de solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation du second degré a deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

- Si $\Delta = 0$, l'équation du second degré a une seule solution réelle. On parle de racine double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a} \quad \text{et} \quad ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation du second degré n'a pas de solution réelle.



Preuve exigible! (peut être demandée en DS)

On a toujours $a \neq 0$. A partir de la forme canonique obtenue lors de la propriété (I.3.2) on obtient :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = 0 \\ &\iff a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0 \end{aligned}$$

On a alors 3 possibilités :

- 1^{er} cas : $\Delta < 0$

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] = 0$$

Alors puisque $\Delta < 0$:

$$\begin{cases} \frac{\Delta}{4a^2} < 0 \implies -\frac{\Delta}{4a^2} > 0 \\ \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \geq 0 \end{cases} \implies \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

et donc puisque $a \neq 0$:

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right] \neq 0$$

Conclusion : L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.

- 2^{ème} cas : $\Delta \geq 0$

Alors $\frac{\Delta}{4a^2} \geq 0$ et donc on va pouvoir factoriser avec l'identité $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] = 0 \\ &\iff a \left[\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \right] = 0 \end{aligned}$$

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un, au moins, des facteurs est nul, et comme $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} &\iff x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \\ &\iff \boxed{x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}} \end{aligned}$$

Conclusion : L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions réelles, $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.
On peut même obtenir la forme factorisée de l'expression polynôme :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

- 3^{ème} cas : $\Delta = 0$.

Alors

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c = 0 &\iff a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \right] = 0 \\ &\iff a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 \right] = 0 \\ &\iff \left(x + \frac{b}{2a} \right) = 0 \quad \text{car } a \neq 0 \\ &\iff \boxed{x = \frac{-b}{2a}} \end{aligned}$$

Conclusion : L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une seule solution (on parle de racine double) $x_1 = \frac{-b}{2a}$ et l'on a :

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2}$$

II.2.1 Exemples

**Exemple**

Soit l'équation : $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 16 > 0$$

L'équation admet donc deux solutions réelles qui sont :

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{6} = -1 \text{ et } x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow \mathcal{S} = \left\{ -1 ; \frac{1}{3} \right\}$$

**Exercice 3**

1. Résoudre l'équation $x^2 - 3x - 10 = 0$ dans \mathbb{R} .

**Corrigé**

L'équation $x^2 - 3x - 10 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -10 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 49 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} = -2 \in \mathbb{R} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} = 5 \in \mathbb{R}$$

2. Déterminer les racines de la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = -2x^2 + 6x + 20$.

**Corrigé**

L'expression $(-2x^2 + 6x + 20)$ est une expression du second degré de la forme $(ax^2 + bx + c)$. Avec :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \\ c = 20 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 196 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \mapsto (-2x^2 + 6x + 20)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{196}}{-4} = 5 \in [0 ; +\infty[\text{ et } x_2 = \frac{-6 + \sqrt{196}}{-4} = -2 \notin [0 ; +\infty[$$

Donc l'unique racine de la fonction f est 5.

III. Factorisation et tableau de signe

III.1 Une étude de signe

On va par exemple étudier le signe de l'expression g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = -2x^2 + 12x - 10$.

Pour cela on détermine les racines de g , puis à partir de la forme factorisée obtenue comme dans la preuve précédente, on étudie le signe de chaque facteur :



Corrigé

L'expression $(-2x^2 + 12x - 10)$ est une expression du second degré de la forme $(ax^2 + bx + c)$. Avec :

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 12 \\ c = -10 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 64 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \mapsto (-2x^2 + 12x - 10)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-12 - \sqrt{64}}{-4} = 5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-12 + \sqrt{64}}{-4} = 1$$

On en déduit la factorisation de $g(x)$:

$$g(x) = -2(x - 1)(x - 5)$$

Il reste à étudier le signe de chaque facteur :

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
signe de (-2)		-	-	-	
signe de $(x - 1)$	-	0	+	+	
signe de $(x - 5)$	-	-	0	+	
signe de $g(x) = -2(x - 1)(x - 5)$	-	0	+	0	-

III.2 Étude de signe

Théorème 2 (Factorisation et tableau de signe)

Selon le signe du discriminant Δ et de a on obtient avec $\Delta = b^2 - 4ac$.

Cas 1 ($\Delta > 0$)

Si $\Delta > 0$:

Le trinôme du second degré $f(x) = (ax^2 + bx + c)$, présente deux racines réelles et la factorisation est :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

En notant X_1 et X_2 les racines avec $X_1 < X_2$ on a :

x	$-\infty$	X_1	X_2	$+\infty$
signe de $(ax^2 + bx + c)$	signe de a	0	signe de $(-a)$	signe de a

Cas 2 ($\Delta = 0$)

Si $\Delta = 0$:

Le trinôme du second degré $f(x) = (ax^2 + bx + c)$, présente une racine réelle et la factorisation est :

$$x_1 = \frac{-b}{2a} \text{ et } ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
signe de $(ax^2 + bx + c)$	signe de a	0	signe de a

Cas 3 ($\Delta < 0$)

Si $\Delta < 0$:

Le trinôme du second degré $f(x) = (ax^2 + bx + c)$, n'a pas de racine réelle et on ne peut pas factoriser, on a juste la factorisation canonique :

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ ou } \begin{cases} \alpha = -\frac{b}{2a} \\ \beta = -\frac{\Delta}{4a} = f(\alpha) \end{cases}$$

Tableau de signe :

x	$-\infty$	$+\infty$
signe de $(ax^2 + bx + c)$	signe de a	

Mémo : Signe de a à l'extérieur des racines.

III.3 Exemple

**Exemple**

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 2x^2 - 10x + 12$$

- Étudier le signe de $f(x)$ en donnant le résultat sous forme de tableau de signe.

**Corrigé**

L'expression $(2x^2 - 10x + 12)$ est une expression du second degré de la forme $(ax^2 + bx + c)$. Avec :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -10 \\ c = 12 \end{cases} \implies \Delta = 4 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \mapsto (2x^2 - 10x + 12)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{4}}{4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + \sqrt{4}}{4} = 3$$

Puisque $a = 2 > 0$ on a +, -, + :

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
signe de $f(x) = 2x^2 - 10x + 12$	+	0	-	0	+

- En déduire les solutions de $f(x) > 0$.

**Corrigé**

D'après l'étude de signe précédente (attention aux crochets) :

$$f(x) > 0 \iff x \in]-\infty ; 2[\cup]3 ; +\infty[$$

On a aussi mais ce n'était pas demandé :

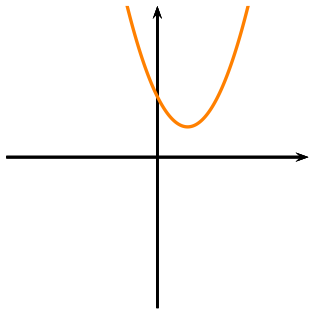
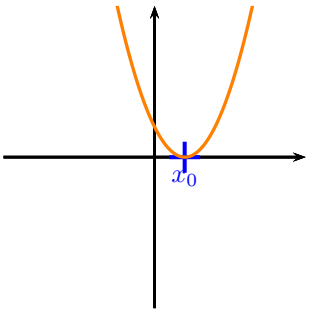
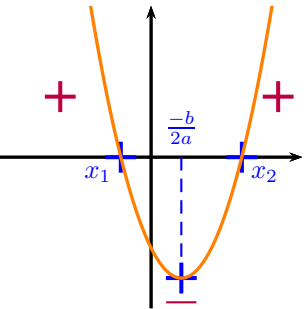
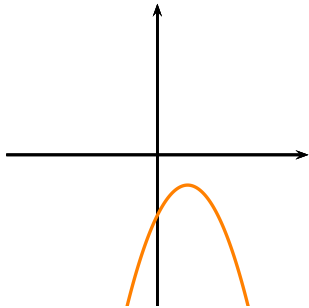
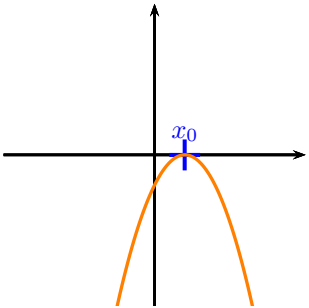
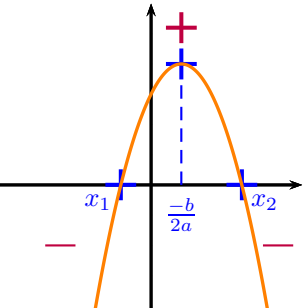
$$f(x) < 0 \iff x \in]2 ; 3[$$

ou

$$f(x) \leq 0 \iff x \in [2 ; 3]$$

IV. Bilan

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{avec} \quad a \neq 0$$

	$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Nombre de racines	0	1 (racine double)	2 (2 racines distinctes)
Racines		$x_0 = \frac{-b}{2a}$	$\begin{cases} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$
Factorisation		$f(x) = a(x - x_0)^2$	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
Signe	f est du signe de a sur \mathbb{R}	f est du signe de a sur \mathbb{R} et f est nul pour $x = x_0$	f est du signe de a en dehors de l'intervalle des racines
Représentation graphique Cas où $a > 0$			
Représentation graphique Cas où $a < 0$			

V. Compléments : Somme et produit des racines

V.1 Somme et produit des racines

Propriété 4

Soit une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ ayant deux solutions x_1 et x_2 . Alors on a :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$



Preuve

Considérons une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ ayant deux solutions :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2b}{2a} \\ &= -\frac{b}{a} \\ x_1 \times x_2 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} \\ &= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} \\ &= \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Propriété 5

Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation

$$x^2 - Sx + P = 0, \quad \text{où} \quad \begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 \times x_2 \end{cases}$$



Preuve

1. Si deux x_1 et x_2 vérifient $\begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 \times x_2 \end{cases}$ alors on a :

$$\begin{cases} S - x_1 = x_2 \\ P = x_1 \times x_2 \end{cases} \implies P = x_1 \times (S - x_1) \iff P = Sx_1 - x_1^2 \iff \boxed{x_1^2 - Sx_1 + P = 0}$$

Donc x_1 est une solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$. De même

$$\begin{cases} S - x_2 = x_1 \\ P = x_1 \times x_2 \end{cases} \implies P = (S - x_2) \times x_2 \iff P = Sx_2 - x_2^2 \iff \boxed{x_2^2 - Sx_2 + P = 0}$$

Donc x_2 est une solution de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

2. Réciproquement si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ alors d'après la propriété précédente 4 on a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = \frac{S}{1} = S \quad \text{et} \quad x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{P}{1} = P$$

3. Autre preuve de la réciproque :

Si x_1 et x_2 sont deux solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$ alors d'après l'étude précédente, on peut factoriser l'expression :

$$\begin{aligned}x^2 - Sx + P = 0 &\iff (x - x_1)(x - x_2) = 0 \\ &\iff x^2 - x_1 \times x - x_2 \times x + x_1 \times x_2 = 0 \\ &\iff x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0\end{aligned}$$

Et par identification on obtient bien : $S = x_1 + x_2$ et $P = x_1 \times x_2$

V.2 Application



Remarque

Ces propriétés sont utiles lorsque l'on connaît une racine évidente de l'équation.
On teste généralement les entiers 1, 2, -1, -2 ...



Exercice 4

Résoudre l'équation $17x^2 - x - 16 = 0$



Correction

L'équation $17x^2 - x - 16 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec $\begin{cases} a = 17 \\ b = -1 \\ c = -16 \end{cases}$.

$x_1 = 1$ est une solution évidente de l'équation puisque

$$17 \times 1^2 - 1 - 16 = 17 - 1 - 16 = 0$$

De ce fait la deuxième x_2 vérifie :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-1}{17} = \frac{1}{17}$$

et donc

$$x_2 = \frac{1}{17} - 1 = -\frac{16}{17}$$



Exercice 5

Trouver deux nombres dont la somme vaut 1 et le produit -6 .



Correction

Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation

$$x^2 - Sx + P = 0, \quad \text{où} \begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 \times x_2 \end{cases}$$

Donc trouver deux nombres dont la somme vaut 1 et le produit -6 revient à résoudre l'équation $x^2 - x - 6 = 0$.
L'équation $x^2 - 1x - 6 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{cases} \implies \Delta = 25 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3$$

← **Fin du cours** →