Math93.com

Suites - Partie 1 (élève)

1re Spé Maths

I. A partir des listes en Python

On a vu la définition d'une liste en python :

Une liste : L

Une liste est une suite d'éléments numérotés dont le premier indice est 0. En Python, une liste s'écrit entre crochets [... , ..., ..., ...] avec les éléments séparés par des virgules.

- Le premier élément de la liste est L[0], le 2e est L[1], ...
- Une liste peut être écrite de manière explicite : L = ["Lundi", "Mardi","Mercredi"]
- Sa longueur est donnée par $len(L)$.
- Si les éléments de la liste sont comparables, le max. est donné par *max(L)*, le min. par *min(L)*
- L=[] permet de définir une liste vide.
- Si L est une liste, l'instruction *L.append(x)* va ajouter l'élémentt [x] à la liste L.

```
# Par exemple
>>> u = [31,20,78,-15,200,2023]
>>> u[0] # c'est le premier élément de la liste, il est d'indice 0
31
>>> u[1] # c'est le 2e élément de la liste, il est d'indice 1
20
>>> u[2] # c'est le 3e élément de la liste, il est d'indice 2
78
>>> u[5] # c'est le 6e élément de la liste, il est d'indice 6
2023
```

II. Définitions et modes de génération d'une suite

II.1 Définitions

Définition 1 (Suite)

Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{array}\right.$$

- La suite u se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$;
- Les **termes** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se notent : u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; $\cdots$; u_n.
- On nomme u_n le **terme d'indice n** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On appelle u_n le **terme général** de la suite u.

Remarque

Une suite peut être définie à partir d'un certain rang n_0, c'est à dire par exemple à partir de l'indice 3 :

$$u_3 \ ; \ u_4 \ ; \ u_5 \ ; \ u_6 \ ; \ \cdots$$

Cette suite se notera donc : $(u_n)_{n\geqslant 3}$

Exemples

1. Soit u la suite dont les 6 premiers termes sont :

$$u_0 = 31 ~;~ u_1 = 20 ~;~ u_2 = 78 ~;~ u_3 = -15 ~;~ u_4 = 200 ~;~ u_5 = 2023$$

2. Soit v la suite dont les termes sont les décimales de $\pi \approx 3,141024$:

$$v_1 = 1 ~;~ v_2 = 4 ~;~ v_3 = 1 ~;~ v_4 = 0 ~;~ v_5 = 2$$

Remarque historique

En 2022, après avoir fait tourner un programme dédié durant 157 jours sur son infrastructure cloud, Google établit un nouveau record en calculant cent milliard de milliards de décimales de Pi.

II.2 Suites définies par une relation fonctionnelle

Définition 2 (Suite définie par une relation fonctionnelle)

Soit f une fonction de la variable n, définie sur une partie de $\mathbb{N}$. Une suite peut être définie par une relation du type :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I \subset \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & f(n) \end{array} \right.$$

Exemple

Avec f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ on a pour

$$I = \{2 ~;~ 3 ~;~ 4 \cdots\}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \dfrac{1}{n-1} \end{array} \right.$$

La suite u se note $(u_n)_{n \geqslant 2}$ et ses premiers termes sont :

$u_2 = \cdots\cdots\cdots$; $u_3 = \cdots\cdots\cdots$; $u_4 = \cdots\cdots\cdots$

$u_5 = \cdots\cdots\cdots$

Exemple

Avec g définie par $g(x) = x^2$ on a pour

$$I = \{1 ~;~ 2 ~;~ 3 ~;~ 4 \cdots\}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & n^2 \end{array} \right.$$

La suite u se note $(u_n)_{n \geqslant 1}$ et ses premiers termes sont :

$u_1 = \cdots\cdots\cdots$; $u_2 = \cdots\cdots\cdots$; $u_3 = \cdots\cdots\cdots$

$u_4 = \cdots\cdots\cdots$

Point Bac (LA suite de tous les contre-exemples)

Soit la suite définie pour tout entier n par $u_n = (-1)^n$. Calculer les premiers termes de u. Que dire de cette suite ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

II.3 Suites définies par une relation de récurrence

Définition 3 (Suite définie par une relation de récurrence)

Une suite peut être définie par une relation dite de récurrence, c'est à dire une relation qui définit un terme en fonction d'un ou de plusieurs termes précédents. On doit dans ce cas préciser le ou les premiers termes.
Par exemple sous réserve de définition de la fonction f on a la suite u définie par :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad : \quad \begin{cases} u_0 & \\ u_{n+1} & = f(u_n) \end{cases}$$

Exemple

Soit u la suite définie par

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad : \quad \begin{cases} u_0 & = -5 \\ u_{n+1} & = 2u_n + 3 \end{cases}$$

La suite u est définie par son premier terme $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n + 3 \text{ soit } u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = 2x + 3$$

Il faut comprendre la relation que cela :

« *un terme s'obtient en multipliant le terme précédent par 2 et en ajoutant 3* ».

Ses premiers termes sont : $\left| \begin{array}{ll} u_0 & = -5 \\ u_1 & = 2 \times u_0 + 3 = 2 \times \cdots\cdots\cdots + 3 = \cdots\cdots\cdots \\ u_2 & = \cdots\cdots\cdots \\ u_3 & = \cdots\cdots\cdots \\ u_4 & = \cdots\cdots\cdots \\ u_5 & = \cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$

Termes précédent, suivant ...

- Pour tout entier naturel n, le **terme précédent** u_{n+1} est u_n, le précédent u_7 est u_6, et si $n \geqslant 1$, le précédent u_n est u_{n-1}.
- Pour tout entier naturel n, le **terme suivant** u_{n+1} est u_{n+2}, le terme suivant u_7 est u_8, le terme suivant u_n est u_{n+1}.
- La suite u de l'exemple 3 peut aussi se définir par son premier terme $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel $n, \quad n \geqslant 1$, par la relation de récurrence $u_n = 2u_{n-1} + 3$ ou pour tout entier naturel $n, \quad n \geqslant 2$, par la relation de récurrence $u_{n-1} = 2u_{n-2} + 3$.
- La relation de récurrence de la suite u de l'exemple 3 peut se comprendre ainsi :

  « un terme est défini par 2 fois le terme précédent plus 3 »

Exemple

Les quatre premiers termes de la suite v définie par son premier terme $v_1 = -2$ et pour tout entier $n, n \geqslant 1$, par la relation de récurrence $v_{n+1} = 2v_n^2 - 1$ sont :

$$v_1 = -2\ ;\ v_2 = \cdots\cdots\cdots\ ;\ v_3 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ ;\ v_4 = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

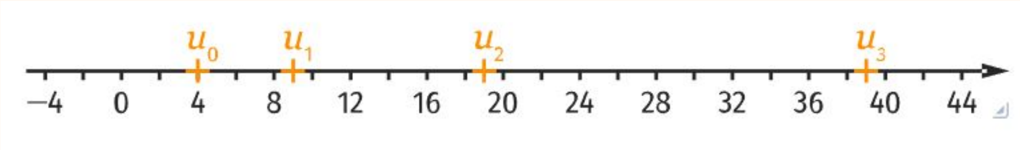
III. Représentation graphique d'une suite

Une suite u de premiers terme u_0 peut être représentée soit en plaçant les réels u_0, u_1, u_2 ... sur une droite graduée comme sur cet exemple :

Exemple

La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par le premier terme $u_0 = 4$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n + 1$ est représentée sur la droite réelle ci-dessous. On a :

- $u_0 = 4$ donc on place le point u_0 d'abscisse 4 ;
- $u_1 = 2 \times 4 + 1 = 9$ donc on place le point u_1 de d'abscisse 9 ;
- $u_2 = 2 \times 9 + 1 = 19$ donc on place le point u_2 de d'abscisse 19 ;



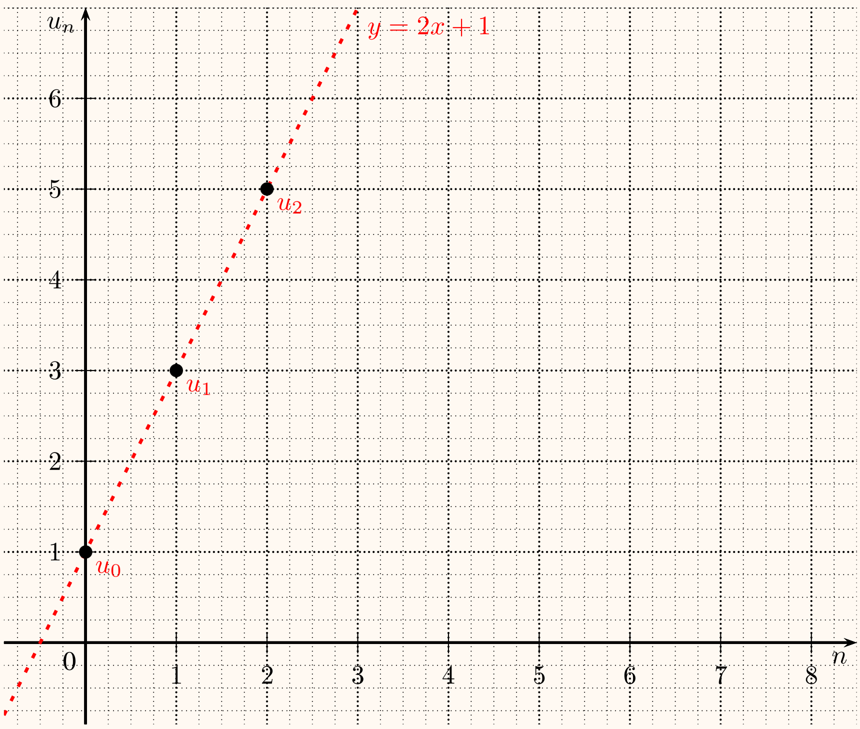
Soit en plaçant les points de coordonnées (n, u_n) dans un repère du plan (avec $n \in \mathbb{N}$) ce qui est plus courant.

III.1 Représentation graphique d'une suite définie de façon explicite

Exemple

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = 2n + 1$. On a :

- $u_0 = 1$ donc on place le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$;
- $u_1 = 3$ donc on place le point de coordonnées $(1\ ;\ 3)$;
- $u_2 = 5$ donc on place le point de coordonnées $(2\ ;\ 5)$;



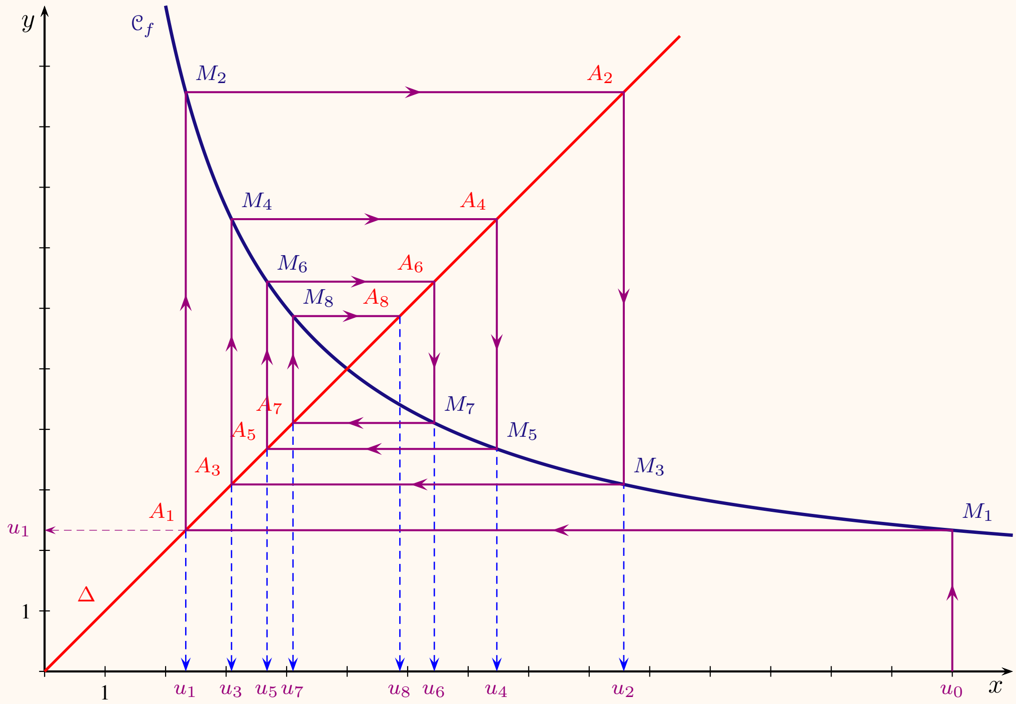
III.2 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

Dans le cas d'une suite définie par une formule de récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour u_0 donné, on représente les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses en utilisant la courbe représentative de la fonction f définissant la relation de récurrence et la droite d'équation $y = x$.
=> *Voir l'activité en fin de cours.*

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 15$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{20}{u_n}$.

1. On peut calculer quelques termes : $\left|\begin{array}{ll} u_0 & = 15 \\ u_1 & \approx 2,3 \\ u_2 & \approx 9,6 \\ u_3 & \approx 3,1 \\ u_4 & \approx 7,5 \end{array}\right.$
2. On place le terme initial u_0 sur l'axe des abscisses.
3. Comme $u_1 = 1 + \dfrac{20}{u_0}$, alors
$$u_1 = f(u_0)$$
Ainsi, u_1 est l'ordonnée du point M_1 de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0.
On reporte la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite Δ.
4. Le point A_1 de la droite Δ, de même ordonnée que le point M_1, a pour coordonnées $A_1(u_1; u_1)$.
5. On réitère le même procédé pour obtenir u_2 à partir de u_1 et successivement les termes suivants de la suite.



IV. Suites monotones : sens de variations

Définition 4 (Suites croissantes, décroissantes)

1. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang n_0 si pour tout entier entier $n \geqslant n_0$ on a :

$$u_n \leqslant u_{n+1}$$

2. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang n_0 si pour tout entier entier $n \geqslant n_0$ on a :

$$u_n \geqslant u_{n+1}$$

3. Une suite monotone est une suite croissante ou décroissante.

Méthode

Pour étudier les variations d'une suite on utilise généralement une des méthodes suivantes :

1. Si la suite (u_n) est définie explicitement sous la forme d'un fonction de n soit $u_n = f(n)$, alors on peut étudier les **variations de f sur** $[0\ ;\ +\infty[$.
2. On peut étudier le **signe de la différence $u_{n+1} - u_n$**.
Si cette différence est positive (resp. négative) pour tout n, alors la suite est croissante (resp. décroissante).

Remarque

Une suite peut être ni croissante, ni décroissante comme par exemple la suite définie pour tout entier n par

$$u_n = (-1)^n$$

V. Suites majorées, minorées, bornées

Définition 5

- Une suite (u_n) est **majorée** si il existe un réel M tel que pour tout n on a : $\boldsymbol{u_n \leqslant M}$.
- Une suite (u_n) est **minorée** si il existe un réel m tel que pour tout n on a : $\boldsymbol{m \leqslant u_n}$.
- Une suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Remarque : une suite majorée admet une infinité de majorants, par ex. si elle est majorée par 10, elle l'est aussi par 11 ...

Exemples

- Les suites de terme général $\sin n$, $\cos n$ et $(-1)^n$ sont majorées par 1 et minorées par (-1) (donc bornées).
- La suite de terme général $u_n = n$ est minorée par 0 mais n'est pas majorée.
- Toute suite croissante (resp. décroissante) est minorée (resp. majorée) par son premier terme.

Annexe

Activité II.3

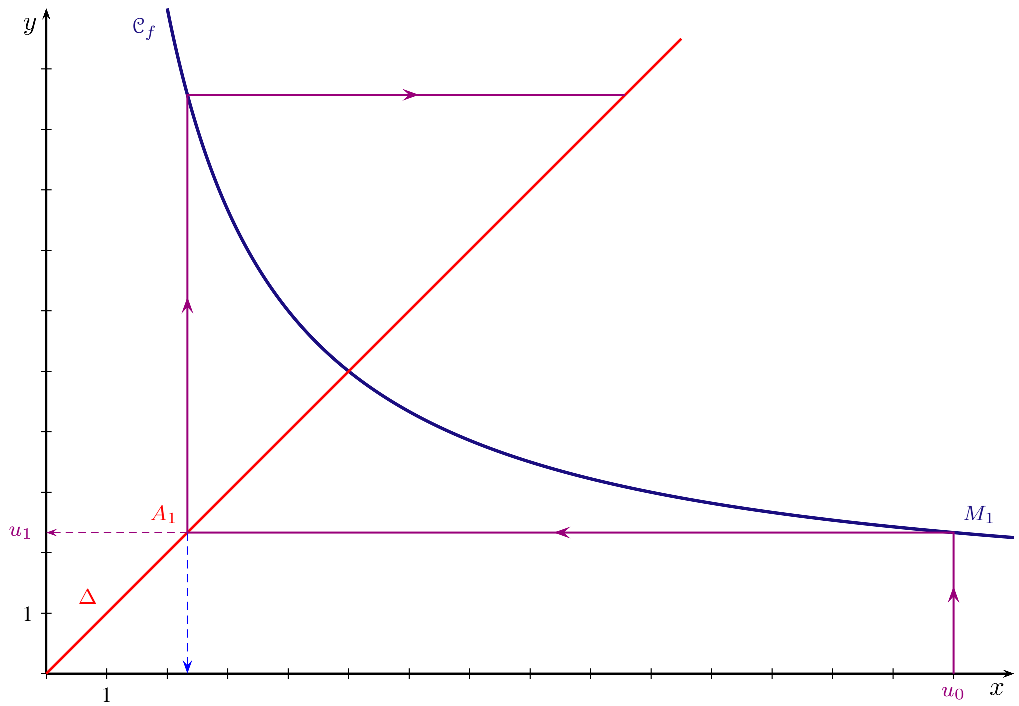
Dans le cas d'une suite définie par une formule de récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ pour u_0 donné, on représente les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses en utilisant la courbe représentative de la fonction f définissant la relation de récurrence et la droite d'équation $y = x$.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 15$ et pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 1 + \dfrac{20}{u_n}$.

Soit la fonction f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = 1 + \dfrac{20}{x}$.

La relation de récurrence précédente s'écrit : $u_{n+1} = f(u_n)$. Donc u_{n+1} est l'image du u_n par la fonction f.

1. On peut calculer quelques termes : $\left| \begin{array}{ll} u_0 & = 15 \\ u_1 & \approx \cdots\cdots\cdots \\ u_2 & \approx \cdots\cdots\cdots \\ u_3 & \approx \cdots\cdots\cdots \\ u_4 & \approx \cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$
2. On place le terme initial u_0 sur l'axe des abscisses.
3. Comme $u_1 = 1 + \dfrac{20}{u_0}$, alors $u_1 = f(u_0)$.
   Ainsi, u_1 est l'ordonnée du point M_1 de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse u_0.
   On reporte la valeur de u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite Δ.
4. Le point A_1 de la droite Δ, de même ordonnée que le point M_1, a pour coordonnées $A_1(u_1; u_1)$.
5. On réitère le même procédé pour obtenir u_2 à partir de u_1 et successivement les termes suivants de la suite.



Fin du cours