



### I. A partir des listes en Python

On a vu la définition d'une liste en python :



#### Une liste : L

Une liste est une suite d'éléments numérotés dont le premier indice est 0. En Python, une liste s'écrit entre crochets [... , ..., ..., ...] avec les éléments séparés par des virgules.

- Le premier élément de la liste est  $L[0]$ , le 2<sup>e</sup> est  $L[1]$ , ...
- Une liste peut être écrite de manière explicite :  $L = ["Lundi", "Mardi", "Mercredi"]$
- Sa longueur est donnée par  $len(L)$ .
- Si les éléments de la liste sont comparables, le max. est donné par  $max(L)$ , le min. par  $min(L)$
- $L=[]$  permet de définir une liste vide.
- Si  $L$  est une liste, l'instruction  $L.append(x)$  va ajouter l'élément  $x$  à la liste  $L$ .

```
# Par exemple
>>> u = [31, 20, 78, -15, 200, 2023]
>>> u[0] # c'est le premier élément de la liste, il est d'indice 0
31
>>> u[1] # c'est le 2e élément de la liste, il est d'indice 1
20
>>> u[2] # c'est le 3e élément de la liste, il est d'indice 2
78
>>> u[5] # c'est le 6e élément de la liste, il est d'indice 6
2023
```

### II. Définitions et modes de génération d'une suite

#### II.1 Définitions

##### Définition 1 (Suite)

Une suite est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  ou une partie de  $\mathbb{N}$  et à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n \end{cases}$$

- La suite  $u$  se note  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ou  $(u_n)_{n \geq 0}$ ;
- Les **termes** de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  se notent :  $u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; \dots ; u_n$ .
- On nomme  $u_n$  le **terme d'indice  $n$**  de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .
- On appelle  $u_n$  le **terme général** de la suite  $u$ .



##### Remarque

Une suite peut être définie à partir d'un certain rang  $n_0$ , c'est à dire par exemple à partir de l'indice 3 :

$$u_3 ; u_4 ; u_5 ; u_6 ; \dots$$

Cette suite se notera donc :  $(u_n)_{n \geq 3}$



## II.3 Suites définies par une relation de récurrence

### Définition 3 (Suite définie par une relation de récurrence)

Une suite peut être définie par une relation dite de récurrence, c'est à dire une relation qui définit un terme en fonction d'un ou de plusieurs termes précédents. On doit dans ce cas préciser le ou les premiers termes.

Par exemple sous réserve de définition de la fonction  $f$  on a la suite  $u$  définie par :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$



### Exemple

Soit  $u$  la suite définie par

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3 \end{cases}$$

La suite  $u$  est définie par son premier terme  $u_0 = -5$  et pour tout entier naturel  $n$  par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 2u_n + 3 \text{ soit } u_{n+1} = f(u_n) \text{ avec } f(x) = 2x + 3$$

Il faut comprendre la relation que cela :

« un terme s'obtient en multipliant le terme précédent par 2 et en ajoutant 3 ».

Ses premiers termes sont :

$$\begin{array}{l} u_0 = -5 \\ u_1 = 2 \times u_0 + 3 = 2 \times (-5) + 3 = -7 \\ u_2 = 2 \times u_1 + 3 = 2 \times (-7) + 3 = -11 \\ u_3 = 2 \times u_2 + 3 = 2 \times (-11) + 3 = -19 \\ u_4 = -35 \\ u_5 = -67 \end{array}$$



### Termes précédent, suivant ...

- Pour tout entier naturel  $n$ , le **terme précédent**  $u_{n+1}$  est  $u_n$ , le précédent  $u_7$  est  $u_6$ , et si  $n \geq 1$ , le précédent  $u_n$  est  $u_{n-1}$ .
- Pour tout entier naturel  $n$ , le **terme suivant**  $u_{n+1}$  est  $u_{n+2}$ , le terme suivant  $u_7$  est  $u_8$ , le terme suivant  $u_n$  est  $u_{n+1}$ .
- La suite  $u$  de l'exemple 3 peut aussi se définir par son premier terme  $u_0 = -5$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $n \geq 1$ , par la relation de récurrence  $u_n = 2u_{n-1} + 3$  ou pour tout entier naturel  $n$ ,  $n \geq 2$ , par la relation de récurrence  $u_{n-1} = 2u_{n-2} + 3$ .
- La relation de récurrence de la suite  $u$  de l'exemple 3 peut se comprendre ainsi :

« un terme est défini par 2 fois le terme précédent plus 3 »



### Exemple

Les quatre premiers termes de la suite  $v$  définie par son premier terme  $v_1 = -2$  et pour tout entier  $n$ ,  $n \geq 1$ , par la relation de récurrence  $v_{n+1} = 2v_n^2 - 1$  sont :

$$v_1 = -2 ; v_2 = 7 ; v_3 = 97 ; v_4 = 18817$$

### III. Représentation graphique d'une suite

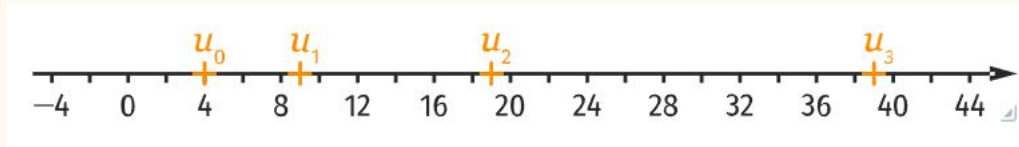
Une suite  $u$  de premiers terme  $u_0$  peut être représentée soit en plaçant les réels  $u_0, u_1, u_2 \dots$  sur une droite graduée comme sur cet exemple :



#### Exemple

La suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par le premier terme  $u_0 = 4$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = 2u_n + 1$  est représentée sur la droite réelle ci-dessous. On a :

- $u_0 = 4$  donc on place le point  $u_0$  d'abscisse 4 ;
- $u_1 = 2 \times 4 + 1 = 9$  donc on place le point  $u_1$  de d'abscisse 9 ;
- $u_2 = 2 \times 9 + 1 = 19$  donc on place le point  $u_2$  de d'abscisse 19 ;



Soit en plaçant les points de coordonnées  $(n, u_n)$  dans un repère du plan (avec  $n \in \mathbb{N}$ ) ce qui est plus courant.

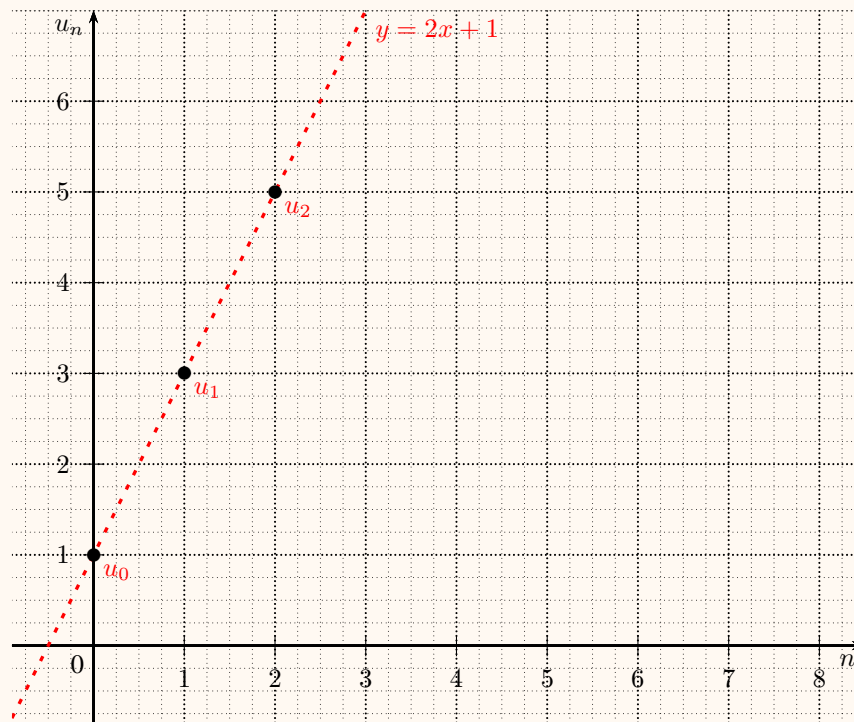
#### III.1 Représentation graphique d'une suite définie de façon explicite



#### Exemple

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = 2n + 1$ . On a :

- $u_0 = 1$  donc on place le point de coordonnées  $(0 ; 1)$  ;
- $u_1 = 3$  donc on place le point de coordonnées  $(1 ; 3)$  ;
- $u_2 = 5$  donc on place le point de coordonnées  $(2 ; 5)$  ;



### III.2 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

Dans le cas d'une suite définie par une formule de récurrence sous la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour  $u_0$  donné, on représente les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses en utilisant la courbe représentative de la fonction  $f$  définissant la relation de récurrence et la droite d'équation  $y = x$ .

=> Voir l'activité en fin de cours.



#### Exemple

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 15$  et pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = 1 + \frac{20}{u_n}$ .

1. On peut calculer quelques termes :

$$\begin{cases} u_0 = 15 \\ u_1 \approx 2,3 \\ u_2 \approx 9,6 \\ u_3 \approx 3,1 \\ u_4 \approx 7,5 \end{cases}$$

2. On place le terme initial  $u_0$  sur l'axe des abscisses.

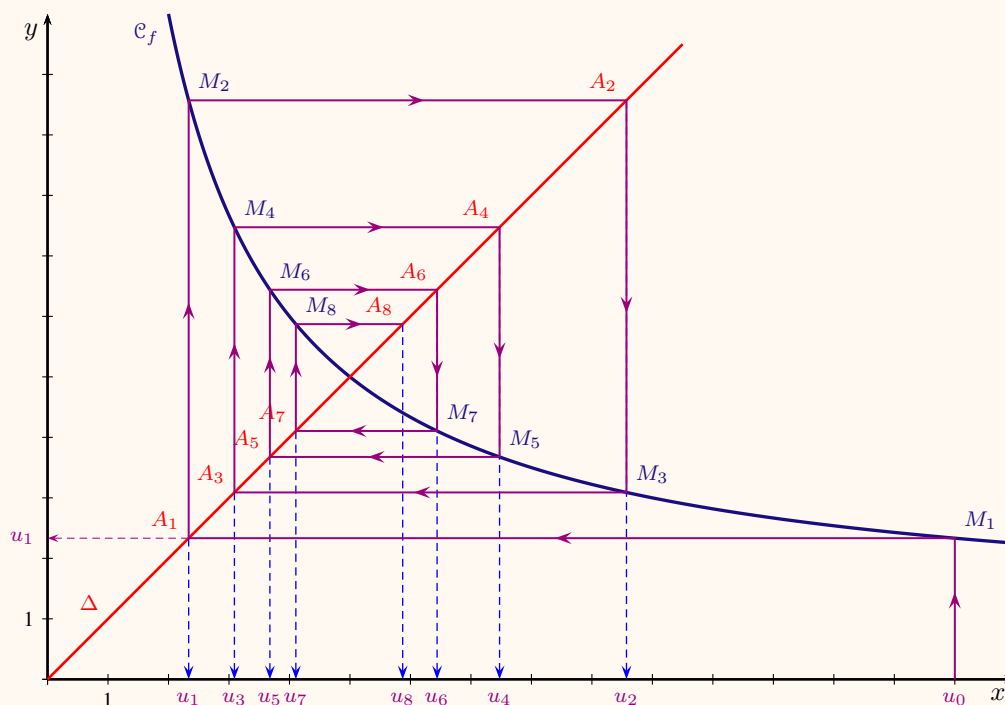
3. Comme  $u_1 = 1 + \frac{20}{u_0}$ , alors

$$u_1 = f(u_0)$$

Ainsi,  $u_1$  est l'ordonnée du point  $M_1$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $u_0$ .

On reporte la valeur de  $u_1$  sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite  $\Delta$ .

4. Le point  $A_1$  de la droite  $\Delta$ , de même ordonnée que le point  $M_1$ , a pour coordonnées  $A_1(u_1; u_1)$ .
5. On réitère le même procédé pour obtenir  $u_2$  à partir de  $u_1$  et successivement les termes suivants de la suite.



## IV. Suites monotones : sens de variations

### Définition 4 (Suites croissantes, décroissantes)

1. Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **croissante** à partir du rang  $n_0$  si pour tout entier  $n \geq n_0$  on a :

$$u_n \leq u_{n+1}$$

2. Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **décroissante** à partir du rang  $n_0$  si pour tout entier  $n \geq n_0$  on a :

$$u_n \geq u_{n+1}$$

3. Une suite **monotone** est une suite croissante ou décroissante.



### Méthode

Pour étudier les variations d'une suite on utilise généralement une des méthodes suivantes :

1. Si la suite  $(u_n)$  est définie explicitement sous la forme d'une fonction de  $n$  soit  $u_n = f(n)$ , alors on peut étudier les **variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .**
2. On peut étudier le **signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$ .**  
Si cette différence est positive (resp. négative) pour tout  $n$ , alors la suite est croissante (resp. décroissante).



### Remarque

Une suite peut être ni croissante, ni décroissante comme par exemple la suite définie pour tout entier  $n$  par

$$u_n = (-1)^n$$

## V. Suites majorées, minorées, bornées

### Définition 5

- Une suite  $(u_n)$  est **majorée** si il existe un réel  $M$  tel que pour tout  $n$  on a :  $u_n \leq M$ .
- Une suite  $(u_n)$  est **minorée** si il existe un réel  $m$  tel que pour tout  $n$  on a :  $m \leq u_n$ .
- Une suite  $(u_n)$  est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

*Remarque : une suite majorée admet une infinité de majorants, par ex. si elle est majorée par 10, elle l'est aussi par 11 ...*



### Exemples

- Les suites de terme général  $\sin n$ ,  $\cos n$  et  $(-1)^n$  sont majorées par 1 et minorées par  $(-1)$  (donc bornées).
- La suite de terme général  $u_n = n$  est minorée par 0 mais n'est pas majorée.
- Toute suite croissante (resp. décroissante) est minorée (resp. majorée) par son premier terme.

## Annexe

### Activité II.3

Dans le cas d'une suite définie par une formule de récurrence sous la forme  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour  $u_0$  donné, on représente les premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses en utilisant la courbe représentative de la fonction  $f$  définissant la relation de récurrence et la droite d'équation  $y = x$ .

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 15$  et pour tout entier naturel  $n$  par  $u_{n+1} = 1 + \frac{20}{u_n}$ .

Soit la fonction  $f$  définie pour  $x \neq 0$  par  $f(x) = 1 + \frac{20}{x}$ .

La relation de récurrence précédente s'écrit :  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Donc  $u_{n+1}$  est l'image du  $u_n$  par la fonction  $f$ .

$$1. \text{ On peut calculer quelques termes : } \begin{cases} u_0 = 15 \\ u_1 \approx \dots\dots\dots \\ u_2 \approx \dots\dots\dots \\ u_3 \approx \dots\dots\dots \\ u_4 \approx \dots\dots\dots \end{cases}$$

2. On place le terme initial  $u_0$  sur l'axe des abscisses.

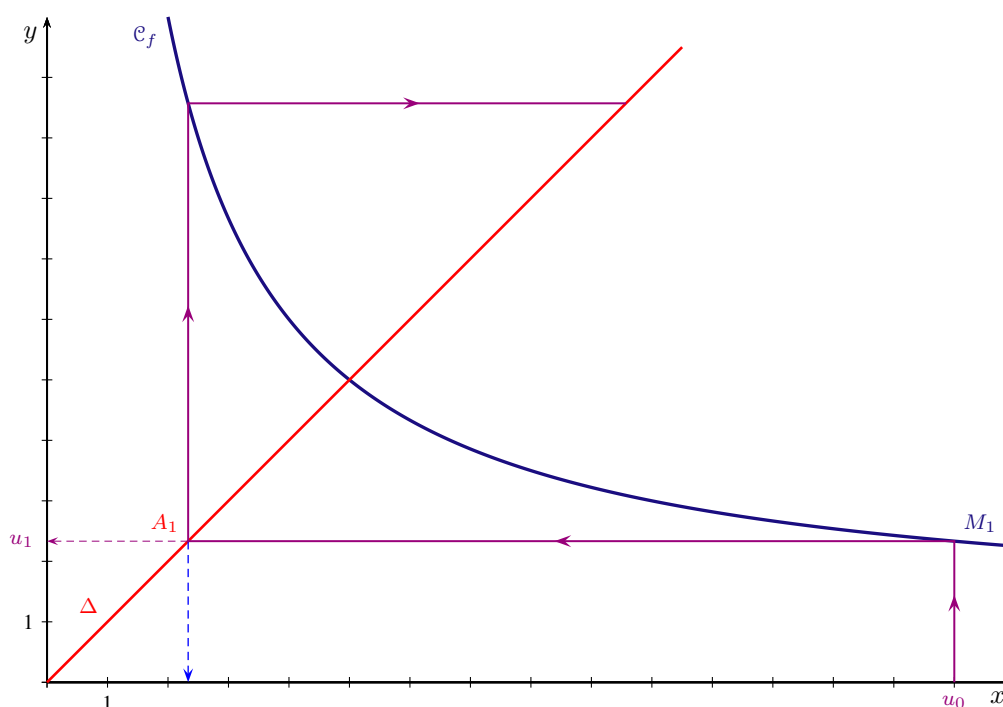
3. Comme  $u_1 = 1 + \frac{20}{u_0}$ , alors  $u_1 = f(u_0)$ .

Ainsi,  $u_1$  est l'ordonnée du point  $M_1$  de la courbe  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse  $u_0$ .

On reporte la valeur de  $u_1$  sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite  $\Delta$ .

4. Le point  $A_1$  de la droite  $\Delta$ , de même ordonnée que le point  $M_1$ , a pour coordonnées  $A_1(u_1; u_1)$ .

5. On réitère le même procédé pour obtenir  $u_2$  à partir de  $u_1$  et successivement les termes suivants de la suite.



↩ **Fin du cours** ↪