Math93.com

Suites - Partie 2

1re Spé Maths

ROC Exigible

Ce chapitre contient 4 ROC, Restitution Organisé de Connaissances. Ce sont les démonstrations du cours qui sont explicitement au programme.

I. Généralités sur les suites (Rappels)

I.1 Définitions

Définition 1 (Suite)

Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.

$$u : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array} \right.$$

- La suite u se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 0}$;
- Les **termes** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se notent : u_0 ; u_1 ; u_2 ; u_3 ; $\cdots$; u_n.
- On nomme u_n le **terme d'indice n** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- On appelle u_n le **terme général** de la suite u.

Remarque : Une suite peut être définie à partir d'un certain rang n_0, c'est à dire que si par exemple $n_0 = 3$ les premiers termes de la suite u sont :

$$u_3 \ ; \ u_4 \ ; \ u_5 \ ; \ u_6 \ ; \ \cdots$$

Cette suite se notera donc : $(u_n)_{n\geqslant 3}$

I.2 Suites définies par une relation fonctionnelle

Définition 2 (Suite définie par une relation fonctionnelle)

Soit f une fonction de la variable n, définie sur une partie de $\mathbb{N}$. Une suite peut être définie par une relation du type :

$$u : \left\{ \begin{array}{rcl} I \subset \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n = f(n) \end{array} \right.$$

Exemple

avec f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ on a pour $I = \{2 \ ; \ 3 \ ; \ 4 \cdots\}$:

$$u : \left\{ \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n = f(n) = \dfrac{1}{n-1} \end{array} \right.$$

La suite u se note $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et ses premiers termes sont :

$$u_2 = 1 \ ; \ u_3 = \frac{1}{2} \ ; \ u_4 = \frac{1}{3} \ ; \ u_5 = \frac{1}{4} \ ; \ \cdots$$

Exemple

avec g définie par $g(x) = x^2$ on a pour $I = \{1 \ ; \ 2 \ ; \ 3 \ ; \ 4 \cdots\}$:

$$u : \left\{ \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n = g(n) = n^2 \end{array} \right.$$

La suite u se note $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et ses premiers termes sont :

$$u_1 = 1 \ ; \ u_2 = 4 \ ; \ u_3 = 9 \ ; \ u_4 = 16 \ ; \ \cdots$$

I.3 Suites définies par une relation de récurrence

Définition 3 (Suite définie par une relation de récurrence)

Une suite peut être définie par une relation dite de récurrence, c'est à dire une relation qui définit un terme en fonction d'un ou de plusieurs termes précédents. On doit dans ce cas préciser le ou les premiers termes.
Par exemple sous réserve de définition de la fonction f on a la suite u définie par :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad : \quad \begin{cases} u_0 & \\ u_{n+1} & = f(u_n) \end{cases}$$

Exemple

Soit u la suite définie par

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad : \quad \begin{cases} u_0 & = -5 \\ u_{n+1} & = 2u_n + 3 \end{cases}$$

La suite u est définie par son premier terme $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n par la relation de récurrence $u_{n+1} = 2u_n + 3$.
Il faut comprendre la relation que cela :

« *un terme s'obtient en multipliant le terme précédent par 2 et en ajoutant 3* ».

Ses premiers termes sont :

$$\begin{aligned} u_0 &= -5 \\ u_1 &= 2\times u_0 + 3 = 2\times(-5)+3 = -7 \\ u_2 &= 2\times u_1 + 3 = 2\times(-7)+3 = -11 \\ u_3 &= 2\times u_2 + 3 = 2\times(-11)+3 = -19 \\ u_4 &= -35 \\ u_5 &= -67 \end{aligned}$$

Termes précédent, suivant ...

- Pour tout entier naturel n, le **terme précédent** u_{n+1} est u_n, le précédent u_7 est u_6, et si $n \geqslant 1$, le précédent u_n est u_{n-1}.
- Pour tout entier naturel n, le **terme suivant** u_{n+1} est u_{n+2}, le terme suivant u_7 est u_8, le terme suivant u_n est u_{n+1}.
- La suite u de l'exemple 3 peut aussi se définir par son premier terme $u_0 = -5$ et pour tout entier naturel n, $n \geqslant 1$, par la relation de récurrence $u_n = 2u_{n-1} + 3$ ou pour tout entier naturel n, $n \geqslant 2$, par la relation de récurrence $u_{n-1} = 2u_{n-2} + 3$.
- La relation de récurrence de la suite u de l'exemple 3 peut se comprendre ainsi :

« un terme est défini par 2 fois le terme précédent plus 3 »

Exemple

Les quatre premiers termes de la suite v définie par son premier terme $v_1 = -2$ et pour tout entier $n, n \geqslant 1$, par la relation de récurrence $v_{n+1} = 2v_n^2 - 1$ sont :

$$v_1 = -2\ ;\ v_2 = 7\ ;\ v_3 = 97\ ;\ v_4 = 18\,817\ ;\ v_5 = 708\,158\,977$$

II. Suites arithmétiques

II.1 Définition

Définition 4 (Suite arithmétique)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **arithmétique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en ajoutant une constante r, appelée **raison**.
La suite u définie par son premier terme u_0 et pour tout entier n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + r$ est une **suite arithmétique de raison r**.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad : \quad \begin{cases} u_0 & \\ u_{n+1} & = u_n + r \end{cases}$$

Exemple

- La suite arithmétique de premier terme -10 et de raison 3 a pour premiers termes :

$$-10\ ;\ -7\ ;\ -4\ ;\ -1\ ;\ 2\ ;\ 5\ ;\ 8\ldots$$

- La suite des entiers naturels est arithmétique de premier terme 0 et de raison 1.
- La suite w définie par son premier terme $w_1 = 10$ et pour tout entier n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - 2$ est une suite arithmétique de raison -2 de premiers termes :

$$w_1 = 10\ ;\ w_2 = 8\ ;\ w_3 = 6\ ;\ w_4 = 4\ ;\ \cdots$$

II.2 Variation absolue

$$\begin{tikzcd} v_1 \arrow[r, bend left, "+r"] & v_2 \arrow[l, bend left, "-r"] \arrow[r, bend left, "+r"] & v_3 \arrow[l, bend left, "-r"] & \cdots & v_{n-1} \arrow[r, bend left, "+r"] & v_n \arrow[l, bend left, "-r"] \arrow[r, bend left, "+r"] & v_{n+1} \arrow[l, bend left, "-r"] & \cdots \end{tikzcd}$$

Remarque

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on peut montrer que la différence de deux termes consécutifs est une constante égale à la raison r soit pour tout entier n :

$$u_{n+1} - u_n = r$$

Propriété 1 (variation absolue)

Pour toute suite arithmétique u, la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante égale à la raison r pour tous les entiers n. Cette différence est appelée **variation absolue**.

Application : Pour prouver qu'une suite n'est pas arithmétique
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n, n \geqslant 1$ par $u_n = n^2 + 2n + 1$ n'est pas une suite arithmétique. En effet en calculant les 3 premiers termes on remarque que la variation absolue n'est pas constante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_1 & = 4 \\ u_2 & = 9 \\ u_3 & = 16 \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} u_2 - u_1 & = 5 \\ u_3 - u_2 & = 7 \end{cases}$$

II.3 Expression du terme général

Théorème 1

Le terme général d'une suite arithmétique u de premier terme u_p et de raison r est pour $n \geqslant p$:

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

Pour $p = 0$ on a pour tout n entier, $n \geqslant 0$:

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Pour $p = 1$ on a pour tout n entier, $n \geqslant 1$:

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$$

ROC 1 : ROC Exigible

- Cas où $n \geqslant p$:
  Du terme u_p au terme u_n on ajoute $(n-p)$ fois la raison r donc on a :
  $$u_n = u_p + (n-p) \times r$$
- Cas où $n \leqslant p$:
  Avec la formule précédente, on peut écrire en échangeant n et p :
  $$u_p = u_n + (p-n) \times r$$
  soit
  $$u_n = u_p - (p-n) \times r = u_p + (n-p) \times r$$

Exemple

- La suite arithmétique de premier terme $u_1 = -10$ et de raison 3 est de terme général, pour tout entier $n, n \geqslant 1$:
  $$u_n = u_1 + (n-1) \times 3 = -13 + 3n$$
- La suite arithmétique de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $\frac{1}{2}$ est de terme général, pour tout entier $n, n \geqslant 0$:
  $$u_n = u_0 + n \times \frac{1}{2} = 5 + \frac{n}{2} = \frac{10+n}{2}$$

II.4 Réciproque et propriété

Théorème 2

- Soit u une suite. S'il existe deux réels a et b, tels que pour tout entier naturel n, $u_n = an + b$, alors la suite u est arithmétique de raison $r = a$ et de premier terme b.
- Dans un repère du plan, les points A_n de coordonnées $(n \,;\, u_n)$ sont alignés si, et seulement si, la suite u est arithmétique.

Exemple

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n, n \geqslant 1$ par $u_n = 3n - 1$ est de la forme :

$$u_n = an + b \text{ avec } a = 3 \text{ et } b = -1.$$

C'est donc d'après le théorème précédent une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_1 = 2$.

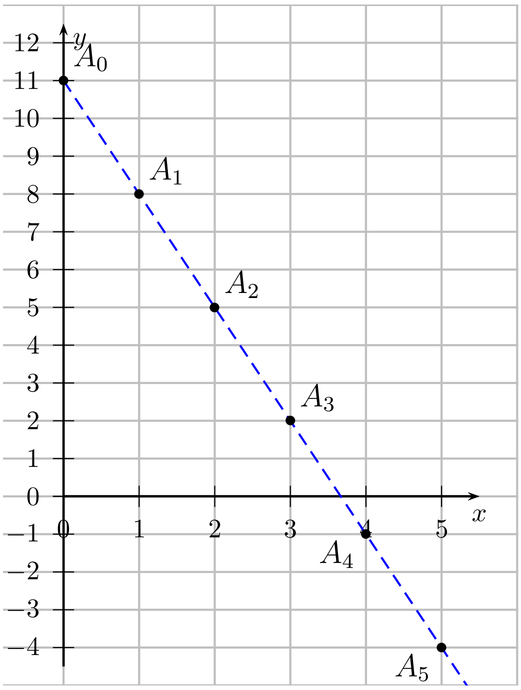
II.5 Variation absolue et évolution linéaire

On a vu lors de la propriété 3 que la variation absolue d'une suite arithmétique est une constante égale à la raison r.

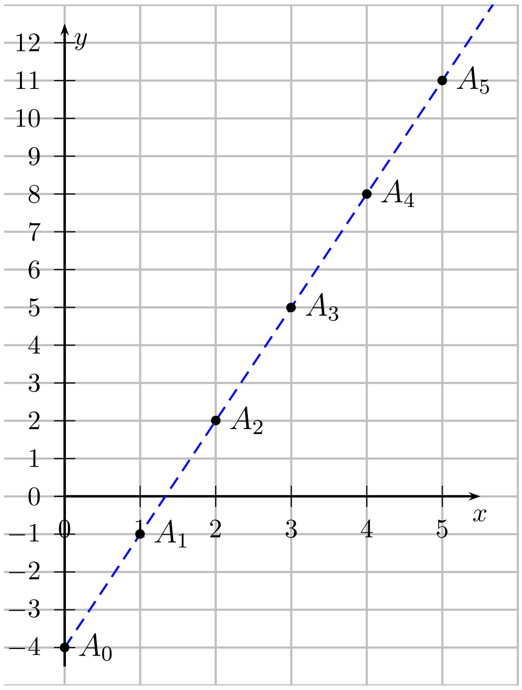
$$u_{n+1} - u_n = r$$

Définition 5 (évolution linéaire)

La variation absolue d'une suite arithmétique est constante, on dit que l'**évolution est linéaire**.



$v_n = 11 - 3n$; $n \in \mathbb{N}$



$v_n = -4 + 3n$; $n \in \mathbb{N}$

II.6 Somme de termes d'une suite arithmétique

Propriété 2 (Somme termes consécutifs suite arithmétique)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout entier n,

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = (n+1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

Cette formule peut se généraliser de la façon suivante :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = \text{nb termes} \times \frac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}}$$

Preuve

- On note :

$$S = \underbrace{u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n}_{(n-p+1) \text{ termes}}$$

On a alors :

$$S = u_p + (u_p + r) + (u_p + 2r) + \cdots + (u_n - 2r) + (u_n - r) + (u_n)$$

$$\begin{cases} S = u_p + (u_p + r) + (u_p + 2r) + \cdots + (u_n - 2r) + (u_n - r) + (u_n) \\ S = u_n + (u_n - r) + (u_n - 2r) + \cdots + (u_p + 2r) + (u_p + r) + (u_p) \end{cases}$$

Par sommation

$$2S = (u_n + u_p) \times (n - p + 1)$$

Soit

$$\boxed{S = (n - p + 1) \times \frac{u_n + u_p}{2}}$$

Propriété 3 (Cas particulier)

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

ROC 2 : ROC Exigible

- On note :

$$S = \underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n}_{(n) \text{ termes}}$$

On a alors :

$$\begin{cases} S = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \\ S = n + (n-1) + \cdots + 2 + 1 \end{cases}$$

Par sommation

$$2S = (1 + n) \times n$$

Soit

$$\boxed{S = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Exercice 1

En utilisant la somme des termes d'une suite arithmétique, calculer la somme $S = 10 + 13 + 16 + ... + 163$.

Preuve

S est la somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme 10 donc :

$$S = \text{nb termes} \times \frac{10 + 163}{2}$$

La difficulté est de trouver le nombre de termes :
On a :

$$163 = 10 + 3 \times 51$$

Donc

$$\begin{cases} S = 10 + 13 + 16 + ... + 163 \\ S = (10 + 0 \times 3) + (10 + 1 \times 3) + \cdots + (10 + 51 \times 3) \end{cases}$$

Il y a donc 52 termes dans la somme :

$$S = 52 \times \frac{10 + 163}{2} = 4498$$

III. Suites géométriques

III.1 Définition

Définition 6 (Suite géométrique)

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite **géométrique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par une constante q, appelée **raison**.
La suite u définie par son premier terme u_0 et pour tout entier n, par la relation de récurrence $u_{n+1} = qu_n$ est une **suite géométrique de raison q**.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad : \quad \begin{cases} u_0 & \\ u_{n+1} & = q \times u_n \end{cases}$$

III.1.1 Exemples : évolution en pourcentage

Proposition 1 (Rappel)

Soit t un réel positif.

- Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $\left(1+\dfrac{t}{100}\right)$.
- Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $\left(1-\dfrac{t}{100}\right)$.

Exemple

- **Exemple 1**
Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1,5% par an. On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :
$$C_{n+1} = \left(1+\frac{1,5}{100}\right) \times C_n = 1,015 \times C_n$$
Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2\,000$ et de raison $q = 1,015$.

- **Exemple 2**
Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2014, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes. On note r_n la quantité de rejets l'année $2014+n$ d'où :
$$r_{n+1} = \left(1-\frac{4}{100}\right) \times r_n = 0,96 \times r_n$$
Ainsi, la suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50\,000$ et de raison $0,96$.

- **Exemple 3 (Bac Addicted) : D'après bac 2016 Métropole** .
[...] Afin d'entretenir son parc automobile, il décide de revendre, au 1er mars de chaque année, 25% de son parc et d'acheter 3 000 voitures neuves. On modélise le nombre de voitures de l'agence à l'aide d'une suite : Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année $2015+n$. On a donc $u_0 = 10\,000$.
Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 3\,000$.
Le nombre de voitures présentes dans le parc automobile au 1er mars de l'année $2015+(n+1)$, soit u_{n+1} s'obtient en effectuant une réduction de 25% des u_n voitures de l'année précédente, et en ajoutant 3 000 voitures neuves. Diminuer de 25%, c'est multiplier par $0,75$ donc on obtient, pour tout entier n :
$$u_{n+1} = 0,75u_n + 3\,000$$
La suite (u_n) est-elle géométrique ?

On a facilement :

$$\left\{\begin{array}{ll} u_0 & = 10\,000 \\ u_1 & = 10\,500 \\ u_2 & = 10\,875 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{u_1}{u_0} & = \dfrac{10\,500}{10\,000} = 1,05 \\ \dfrac{u_2}{u_1} & = \dfrac{10\,875}{10\,500} \approx 1,036 \neq 1,05 \end{array}\right.$$

Donc la suite (u_n) n'est pas géométrique.

III.2 Représentation d'une suite géométrique

Remarque : Pour montrer qu'une suite **ne s'annulant pas** est géométrique, on peut montrer que le quotient de deux termes quelconque est une constante égale à la raison q. Soit que pour tout entier n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$$

Cette méthode souffre du problème qu'il faut prouver que la suite n'est jamais nulle et n'est donc que peut utilisée. Par contre on l'utilise comme contre-exemple pour montrer qu'une suite n'est pas géométrique comme dans l'exemple 3 précédent.

III.3 Expression du terme général

Théorème 3

Le terme général d'une suite géométrique u de premier terme u_p et de raison q est pour tout n entier, $n \geqslant p$:

$$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

Pour $p = 0$ on a pour tout n entier, $n \geqslant 0$:

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

Pour $p = 1$ on a pour tout n entier, $n \geqslant 1$:

$$\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$$

ROC 3 : ROC Exigible

- Cas où $n \geqslant p$:
  Du terme u_p au terme u_n on multiplie $(n-p)$ fois par la raison q donc on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

- Cas où $n \leqslant p$:
  Avec la formule précédente, on peut écrire en échangeant n et p :

$$u_p = u_n \times q^{n-p}$$

soit

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Retour sur les trois exemples précédents :

Exemple

- **Exemple 1**
  La suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2\,000$ et de raison $q = 1,015$ donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ (u_n) : \begin{cases} C_0 & = 2\,000 \\ C_{n+1} & = 1,015 \times C_n \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ C_n = 2\,000 \times 1,015^n}$$

- **Exemple 2**
  La suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50\,000$ et de raison $0,96$ donc on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ (u_n) : \begin{cases} r_0 & = 50\,000 \\ r_{n+1} & = 0,96 \times r_n \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ r_n = 50\,000 \times 0,96^n}$$

- **Bac Addicted** : **D'après bac 2016 Métropole**
  La suite (u_n) n'est pas géométrique, on ne peut pas encore exprimer son terme général uniquement en fonction de n, attendons encore un peu, cela va venir !

Remarque.
La réciproque est aussi vraie.

Théorème 4

Soit u une suite. S'il existe deux réels a et b avec a non nul, tels que pour tout entier naturel n, $u_n = b \times a^n$, alors la suite u est géométrique de raison $q = a$ et de premier terme b.

Exemple :

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n, n \geqslant 1$ par $u_n = 50 \times 1,02^n$ est de la forme $u_n = b \times a^n$ avec $a = 1,02$ et $b = 50$.
  C'est donc d'après le théorème précédent une suite géométrique de raison $q = 1,02$ et de premier terme $u_0 = 50$.

III.4 Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété 4 (Somme termes consécutifs suite géométrique)

Soit (u_n) géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0, alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = u_0 \times \left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

Cette formule peut se généraliser de la façon suivante :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = 1^{\text{er}} \text{ terme } \times \frac{1-q^{\text{nb termes}}}{1-q}}$$

Propriété 5 (Cas particulier)

Pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel $q \neq 1$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} q^n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

ROC 4 : ROC Exigible

- On note :

$$S = \underbrace{1 + q + q^2 + \cdots + q^n}_{(n+1) \text{ termes}}$$

On a alors :

$$\begin{cases} S = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n \\ qS = q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} \end{cases}$$

Par sommation

$$S - qS = 1 - q^{n+1}$$

Soit

$$\boxed{S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

Exercice 2

En utilisant la somme des termes d'une suite arithmétique, calculer la somme $S = 1 - 3 + 9 - 27 + 81$.

Preuve

S est la somme des 5 termes consécutifs d'une suite géométrique de raison (-3) et de premier terme 5 donc :

$$S = (-3)^0 + (-3)^1 + (-3)^2 + (-3)^3 + (-3)^4$$

Donc

$$S = (-3) \times \frac{1-(-3)^5}{1-(-3)} = 61$$

IV. Variations des suites arithmétiques et géométriques

On considère ici des suites définies sur $\mathbb{N}$.

IV.1 Définition

Définition 7

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si, pour tout entier n : $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si, pour tout entier n : $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante** si, pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n$.
- Une suite est dite **monotone** si elle est soit **croissante**, soit **décroissante**, soit **constante**.

Exemples :

- La suite des entiers pairs est croissante donc monotone.
- La suite des décimales de π n'est pas monotone.
- La suite définie pour tout entier n par $u_n = (-1)^n$ n'est pas monotone car les termes valent alternativement 1 et -1.

IV.2 Suites arithmétiques

Propriété 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante**.
- Si $r < 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante**.
- Si $r = 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **constante**.

Exemples :

- La suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme 100 et de raison $0,1$ est croissante.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n, n \geqslant 1$ par $u_n = 3n - 1$ est de la forme $u_n = an + b$ avec $a = 3$ et $b = -1$.
  C'est donc d'après le théorème précédent une suite arithmétique de raison $r = 3$ et de premier terme $u_1 = 2$.
  La raison $r = 3 > 0$ est positive, donc cette suite est croissante.

IV.3 Variations d'une suite géométrique

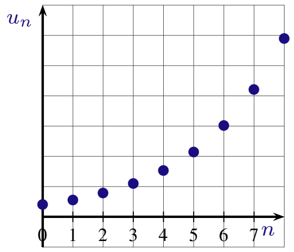
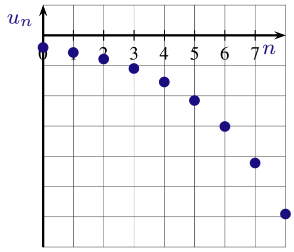
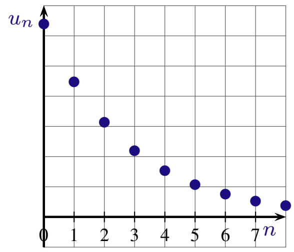
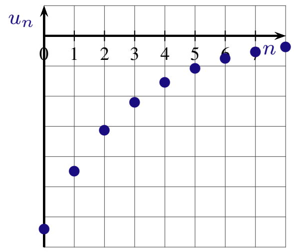
On rappelle qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (respectivement décroissante) si pour tout entier n on a : $u_{n+1} \geqslant u_n$ (resp. $u_{n+1} \leqq u_n$).

Propriété 7 (Variations d'une suite géométrique)

Une suite géométrique de raison q est monotone, c'est à dire croissante, décroissante (ou constante) si $q \geqslant 0$.

- Si $q = 0$ ou $q = 1$, la suite est constante.
- Si le premier terme est <u>strictement positif</u> : $\begin{cases} \text{Si } q > 1, \text{ la suite est croissante ;} \\ \text{Si } 0 < q < 1, \text{ la suite est décroissante.} \end{cases}$
- Si le premier terme est <u>strictement négatif</u> : $\begin{cases} \text{Si } q > 1, \text{ la suite est décroissante ;} \\ \text{Si } 0 < q < 1, \text{ la suite est croissante.} \end{cases}$

Si (u_n) est une suite géométrique, alors on a :

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
			

Retour sur les exemples précédents :

Exemple

- **Exemple 1**
  La suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2\ 000$ et de raison $q = 1,015$ donc on a :

$$\begin{cases} C_0 & = 2\ 000 > 0 \\ q & = 1,015 > 1 \end{cases} \Longrightarrow \text{la suite } (C_n) \text{ est strictement croissante.}$$

- **Exemple 2**
  La suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50\ 000$ et de raison $0,96$ donc on a :

$$\begin{cases} r_0 & = 50\ 000 > 0 \\ q & = 0,96 \in]0\,;\,1[\end{cases} \Longrightarrow \text{la suite } (r_n) \text{ est strictement décroissante.}$$

- **Exemple 3 (Bac Addicted)**
  La suite (u_n) est définie, pour tout entier n par :

$$\begin{cases} u_0 & = 10\ 000 \\ u_{n+1} & = 0,75u_n + 3\,000 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u_0 & = 10\,000 \\ u_1 & = 10\,500 \\ u_2 & = 10\,875 \end{cases}$$

A notre niveau, on peut juste émettre des conjectures puisque cette suite n'est pas géométrique. On va utiliser la calculatrice pour calculer les premiers termes, ainsi que les termes u_{10}, u_{20}, u_{30} et u_{100}. Qu'en pensez-vous ?
On obtient :

$$\begin{cases} u_{10} & = 11\,887 \\ u_{20} & = 11\,994 \\ u_{30} & \approx 11\,999{,}52 \\ u_{100} & \approx 12\,000 \end{cases}$$

V. Bilan : Suites géométriques et arithmétiques

V.1 Suite Arithmétique

$$\begin{tikzcd} u_{n-1} \arrow[r, bend left, "+r"] & u_n \arrow[l, bend left, "-r"] \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{n+1} \arrow[l, bend left, "-r"] \end{tikzcd}$$

Définition 8 (Suite arithmétique)

Une suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est dite **arithmétique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en y ajoutant une constante r, appelée **raison**.

$$(u_n)_{n\geqslant p} \quad : \quad \begin{cases} u_p & \\ u_{n+1} & = u_n + r \end{cases}$$

Propriété 8 (Terme général suite arithmétique)

Pour tout n entier, $n \geqslant p$:

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

Pour $p = 0$ on a pour tout n entier, $n \geqslant 0$:

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

Pour $p = 1$ on a pour tout n entier, $n \geqslant 1$:

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)r}$$

Propriété 9 (Variations d'une suite arithmétique)

- Si la raison r est positive strictement ($r > 0$), alors la suite arithmétique est croissante.
- Si la raison r est négative strictement ($r < 0$), alors la suite arithmétique est décroissante.

Propriété 10 (Somme termes consécutifs suite arithmétique)

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0, alors pour tout entier n,

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = (n+1) \times \left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right)$$

Cette formule peut se généraliser de la façon suivante :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = \text{nb termes} \times \frac{1^{\text{er}} + \text{dernier}}{2}}$$

V.2 Suite Géométrique

$$\begin{tikzcd} u_{n-1} \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_n \arrow[l, bend left, "\div q"] \arrow[r, bend left, "\times q"] & u_{n+1} \arrow[l, bend left, "\div q"] \end{tikzcd}$$

Définition 9 (Définition suite géométrique)

Une suite $(u_n)_{n\geqslant p}$ est dite **géométrique** lorsque chaque terme se déduit du précédent en le multipliant par une constante q, appelée **raison**.

$$(u_n)_{n\geqslant p} \quad : \quad \begin{cases} u_p & \\ u_{n+1} & = q \times u_n \end{cases}$$

Propriété 11 (Terme général suite géométrique)

Pour tout n entier, $n \geqslant p$:

$$\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$$

Si $p = 0$, pour $n \geqslant 0$:

$$\boxed{u_n = u_0 \times q^n}$$

Si $p = 1$, pour $n \geqslant 1$:

$$\boxed{u_n = u_1 \times q^{n-1}}$$

Propriété 12 (Variations suite géométrique)

Une suite géométrique de raison q est monotone si $q \geqslant 0$.

- Si $q = 0$ ou $q = 1$, la suite est constante.
- Si le 1er terme est strictement positif :

$$\begin{cases} \text{Si } q > 1, \text{ la suite est croissante ;} \\ \text{Si } 0 < q < 1, \text{ elle est décroissante.} \end{cases}$$

- Si le 1er terme est strictement négatif :

$$\begin{cases} \text{Si } q > 1, \text{ la suite est décroissante ;} \\ \text{Si } 0 < q < 1, \text{ elle est croissante.} \end{cases}$$

Propriété 13 (Somme termes consécutifs suite géométrique)

Soit (u_n) géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0, alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\underbrace{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}_{(n+1) \text{ termes}} = u_0 \times \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}\right)$$

Cette formule peut se généraliser de la façon suivante :

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb termes}}}{1 - q}}$$