Math93.com

Trigonométrie - Partie 1

1re Spé Maths

I. Cercle trigonométrique

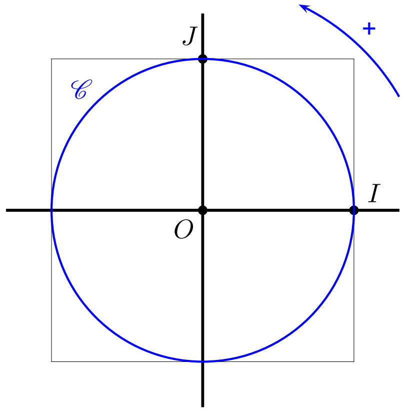
I.1 Définition, sens direct

Définition 1

- Orienter un cercle, c'est choisir un sens de parcours sur ce cercle appelé sens direct (ou positif).
  L'autre sens est appelé sens indirect (négatif ou rétrograde).

- L'usage est de choisir pour sens direct le sens contraire des aiguilles d'une montre (appelé aussi sens trigonométrique).

- Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct.



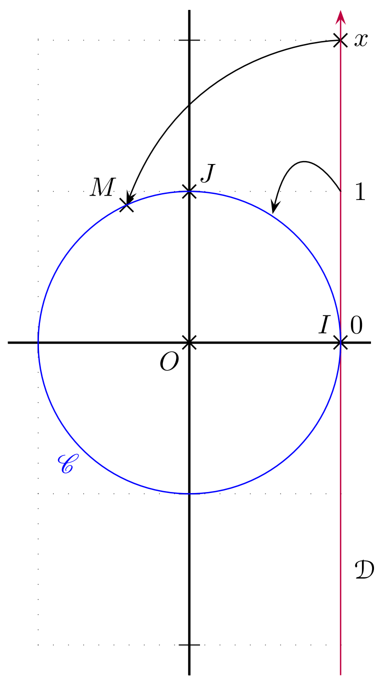
Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, donner la longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$:

1. $M = J$: ....
2. M est l'image de I par la rotation de centre O et d'angle $45°$ dans le sens direct : ....
3. M est l'image de I par la rotation de centre O et d'angle $60°$ dans le sens indirect : ....
4. M est l'image de I par la symétrie centrale de centre O : ....
5. M est l'image de I par la rotation de centre O et d'angle $30°$ dans le sens direct : ....

I.2 Enroulement de la droite des réels

Sur la figure ci-contre, on a tracé le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ d'un repère orthonormé $(O; I, J)$ ainsi qu'une droite graduée $\mathcal{D}$ passant par I, parallèle à (OJ), de même unité que le repère et orientée vers le haut.
En « enroulant » cette droite $\mathcal{D}$ autour du cercle trigonométrique, à chaque point de $\mathcal{D}$ va correspondre un unique point de $\mathscr{C}$.
À chaque nombre réel x repéré sur la droite, on associe un unique point M du cercle trigonométrique, appelé image de x dans cet enroulement.



Propriété 1

Deux nombres réels x et y ont le même point image sur le cercle trigonométrique si et seulement si leur différence est un multiple de 2π, autrement dit si et seulement si il existe un entier relatif k tel que :

$$x - y = k \times 2\pi \iff x = y + k \times 2\pi$$

Définition 2 (égalité modulo 2π)

On dit que x et y sont égaux modulo 2π , ou égaux à $2k\pi$ près ou x congru à y modulo 2π.

On peut utiliser la notation suivante (ATTENTION ce n'est pas une égalité) :

$$x \equiv y\,[2\pi] \iff x = y + k \times 2\pi \quad \text{, avec } k \in \mathbb{Z}$$

Exercice 2

Dans les cas suivants, les réels x et y ont-ils la même image sur le cercle trigonométrique ?

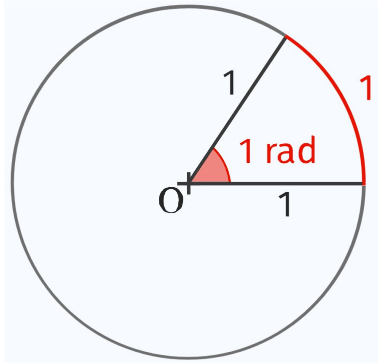
1. $x = 5\pi$ et $y = -8\pi$
2. $x = \dfrac{\pi}{3}$ et $y = -\dfrac{65\pi}{3}$
3. $x = -\dfrac{\pi}{2}$ et $y = \dfrac{3\pi}{2}$

I.3 Le radian

Propriété 2

On considère le cercle trigonométrique ci-contre.
Le **radian** est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur le cercle un arc de cercle de longueur 1.
Le radian est noté **rad**.

=> Vidéo 1 : *Définition du radian, passage du radian au degré, mesurer en radian* .



radian et degré

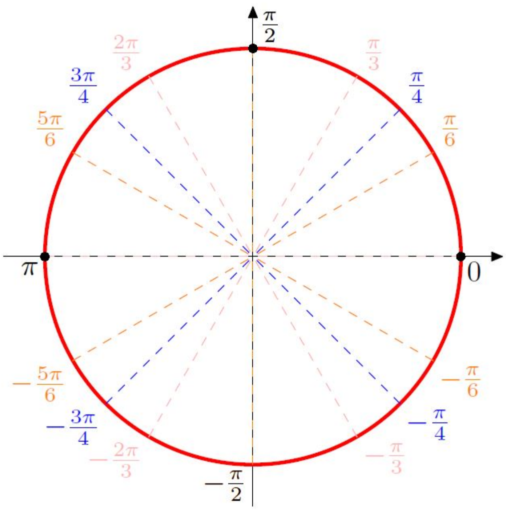
Par conséquent :

$$\boxed{180^\circ = \pi \text{ rad}} \quad \text{et} \quad \boxed{360^\circ = 2\pi \text{ rad}}$$

Puisque la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle au centre,

$$\boxed{1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57^\circ}$$

Mesure en degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Mesure en radians							



I.4 Mesure principale

Mesure principale

1. Par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, on peut associer à tout réel un unique point du cercle.
2. Soit x un réel et M un point du cercle trigonométrique associé au réel x, alors le point M est associé à tous les réels de la forme $x + k \times 2\pi$, où k est un entier relatif ,$k \in \mathbb{Z}$.
3. **Mesure principale**.
Parmi tous les réels de la forme $x + k \times 2\pi$, (où k est un entier relatif) qui sont associés(au point M, on va privilégier celui qui appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
Dans le repère orthonormé (O ; I ; J), cela correspond en fait au plus petit arc reliant I et M.

=> Vidéo 2 : *Mesure principale d'un angle en radian* .

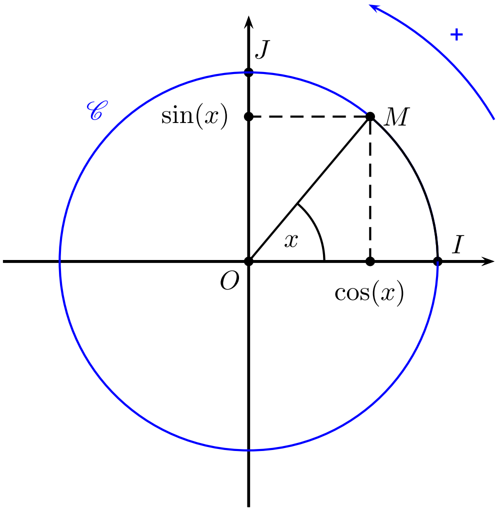
II. Sinus et cosinus

Définition 3

On considère un réel x ayant pour image le point M sur le cercle trigonométrique. On se place dans le repère orthonormée $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

1. Le <u>cosinus</u> de x est l'abscisse du point M.
   On le note $\cos(x)$ ou $\cos x$.
2. Le <u>sinus</u> de x est l'ordonnée du point M.
   On le note $\sin(x)$ ou $\sin x$.
3. Le point M est donc de coordonnées :

$$\boxed{M\,(\cos x\ ;\ \sin x)}$$



Propriété 3

- Pour tout réel x,

$$\boxed{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1} \text{ et } \boxed{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1}$$

- Pour tout réel x,

$$\boxed{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1} \text{ autre notation } \boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

Preuve

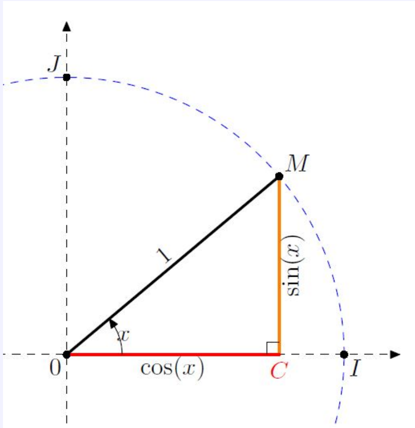
- Comme M est sur le cercle trigonométrique et que ce cercle a pour rayon 1, par définition du sinus et du cosinus, on obtient directement les deux premiers résultats. Pour tout réel x,

$$\boxed{-1 \leqslant \cos x \leqslant 1} \text{ et } \boxed{-1 \leqslant \sin x \leqslant 1}$$

- Pour le dernier résultat, on utilise le théorème de Pythagore en prenant le rayon [OM] du cercle comme hypoténuse.

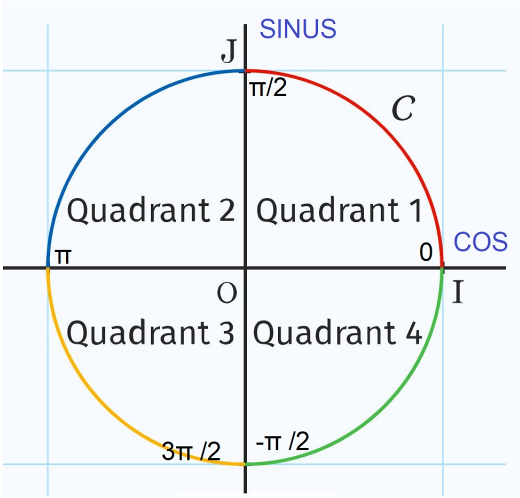
  Le triangle ABC est rectangle en C donc d'après le théorème de Pythagore :

$$OM^2 = OC^2 + CM^2 \iff \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$



II.1 Les quadrants : évident mais utile

On considère le cercle trigonométrique ci-dessous. M est le point image sur le cercle d'un nombre réel x. Compléter le tableau suivant avec le signe de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de la position du point M sur le cercle.



M est dans le quadrant	1	2	3	4
signe de cos x				
signe de sin x				

Exercice 3

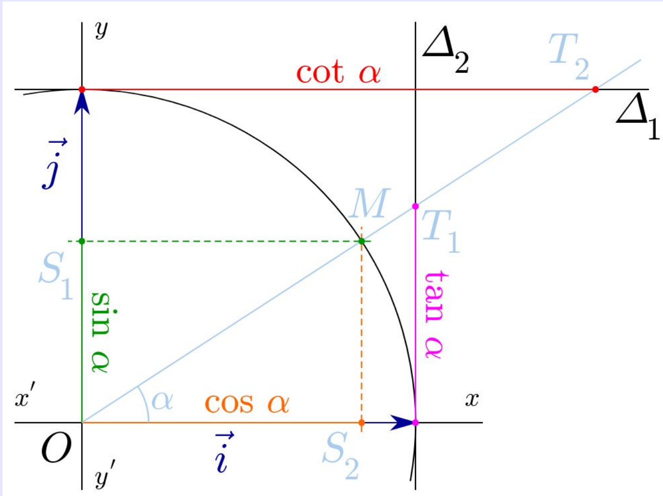
Sachant que x est un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$ et que $\sin(x) = 0,5$. Déterminer la valeur de $\cos(x)$.

III. Valeurs remarquables - partie 1

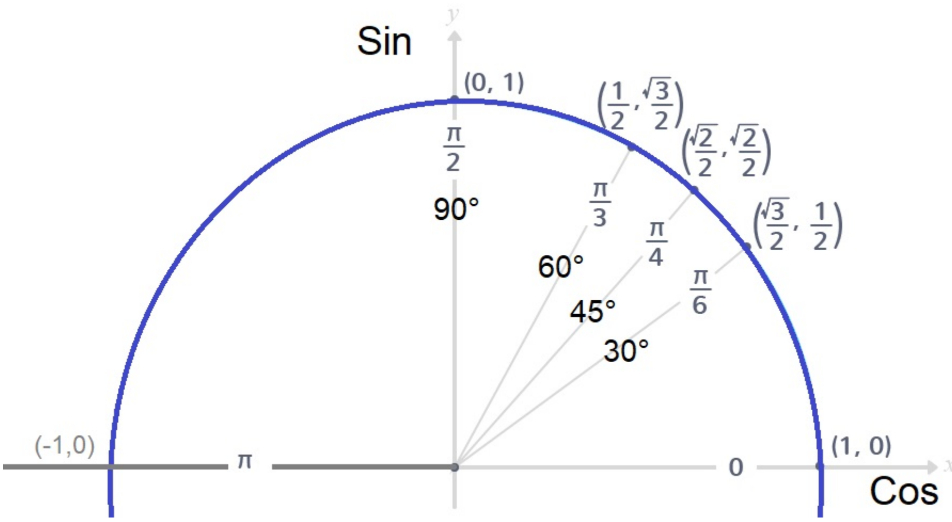
Tangente

On rappel que la tangente d'un angle est le quotient de sinus par le cosinus, et la cotangente l'inverse. Pour tout randian x on a :

$$\boxed{\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}} \text{ et } \boxed{\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}}$$



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\sin x$							
$\cos x$							
$\tan x$							



III.1 Les démonstrations au programme

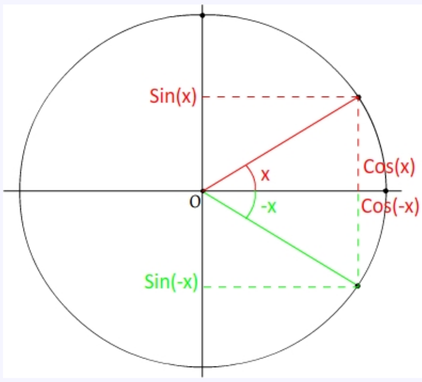
Démontrer les valeurs des sinus et cosinus des angles $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{4}$.

:

IV. Valeurs des cosinus et sinus des angles associés

IV.1 Angles opposés

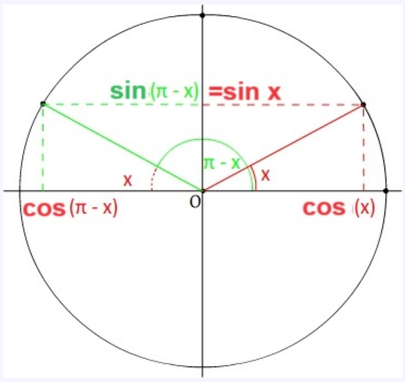
Propriété 4



- $\cos(-x) =$
- $\sin(-x) =$
- $\tan(-x) =$

IV.2 Angles supplémentaires

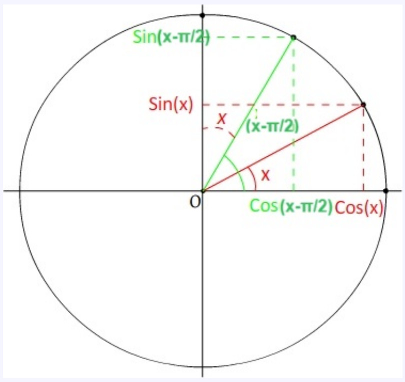
Propriété 5



- $\cos(\pi - x) =$
- $\sin(\pi - x) =$
- $\tan(\pi - x) =$

IV.3 Angles complémentaires

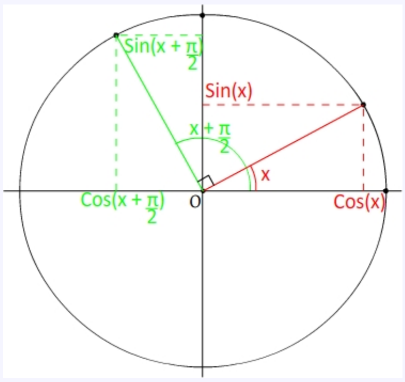
Propriété 6



- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

IV.4 Angles anti-complémentaires

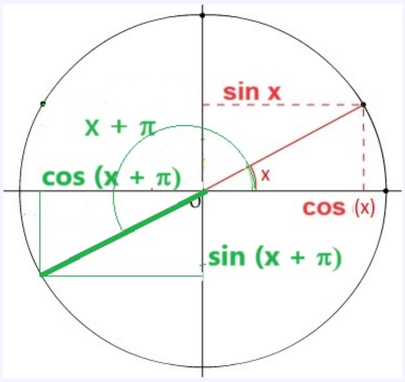
Propriété 7



- $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) =$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) =$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right) =$

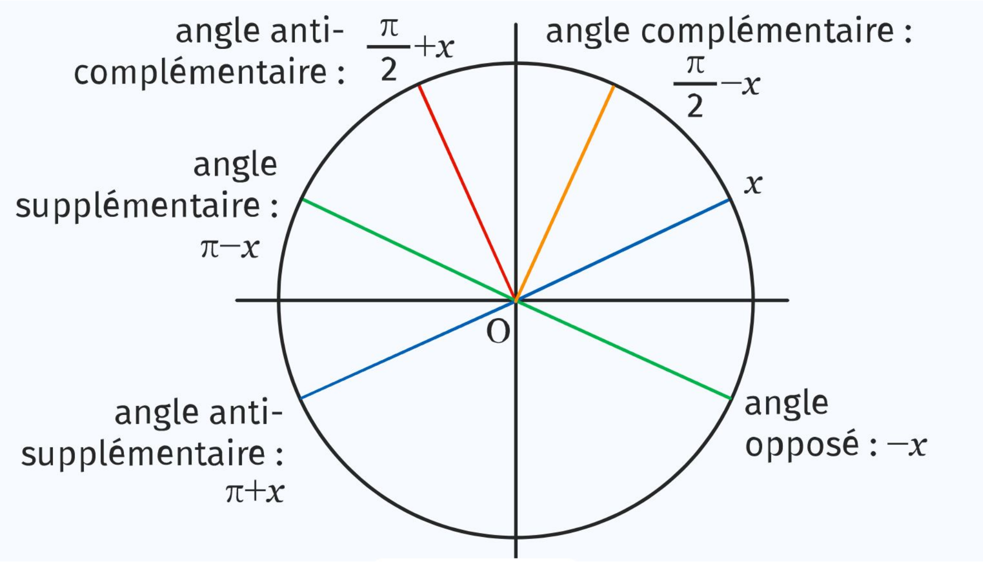
IV.5 Angles anti-supplémentaires

Propriété 8



- $\cos\left(x+\pi\right) =$
- $\sin\left(x+\pi\right) =$
- $\tan\left(x+\pi\right) =$

IV.6 Bilan



Propriété 9

- $\cos(-x) =$
- $\sin(-x) =$
- $\cos(\pi - x) =$
- $\sin(\pi - x) =$

- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) =$

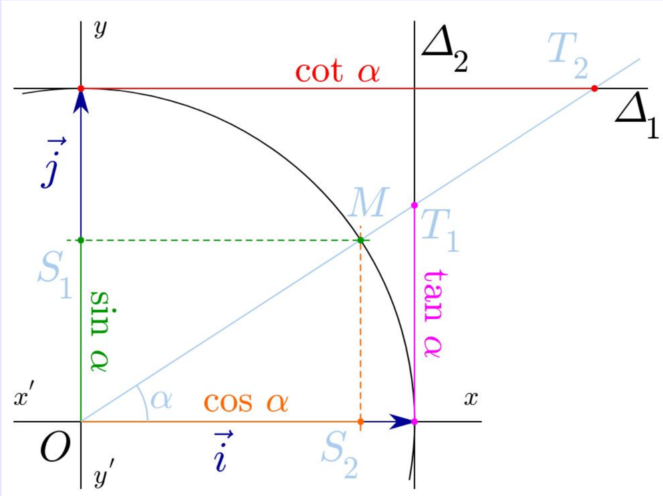
- $\cos(\pi + x) =$
- $\sin(\pi + x) =$

V. Valeurs remarquables - partie 2

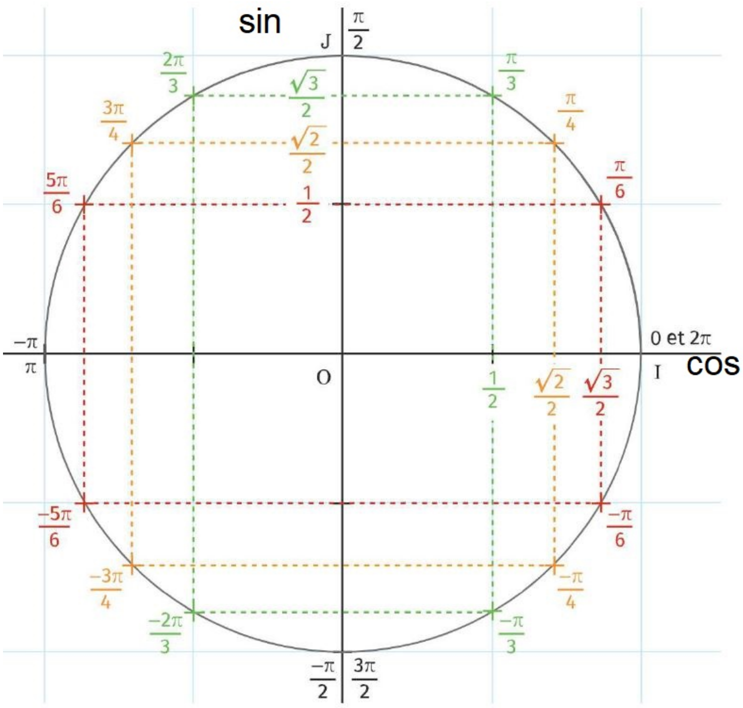
Tangente

On rappel que la tangente d'un angle est le quotient de sinus par le cosinus, et la cotangente l'inverse. Pour tout randian x on a :

$\boxed{\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}}$ et $\boxed{\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}}$



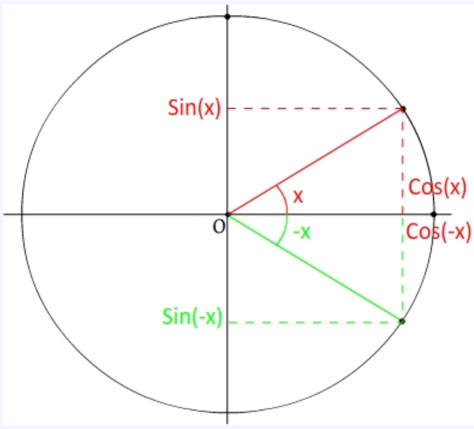
x	-2π	$-\pi$	$-\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{3}$	$-\dfrac{\pi}{4}$	$-\dfrac{\pi}{6}$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π
$\sin x$													
$\cos x$													
$\tan x$													



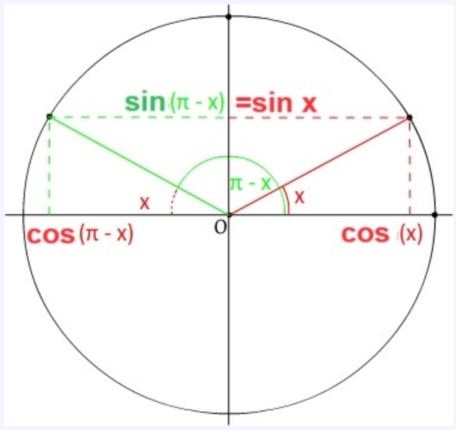
VI. Équations trigonométriques

Propriété 10 (Équations trigonométriques en cosinus)

Soit x un réel.



$$\boxed{\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -a + 2k\pi \end{cases}}$$



$$\boxed{\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}}$$

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

1. $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

VII. Complément : Trigonometry Formulas

Trigonometry Formulas

Function Relationships

$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$
$$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$
$$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Opposite Angle Formulas

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$
$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$
$$\tan(-\theta) = -\tan(\theta)$$
$$\cot(-\theta) = -\cot(\theta)$$
$$\sec(-\theta) = \sec(\theta)$$
$$\csc(-\theta) = -\csc(\theta)$$

Cofunction Formulas (in Quadrant I)

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \qquad \cos\theta = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$\tan\theta = \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \qquad \cot\theta = \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$\sec\theta = \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \qquad \csc\theta = \sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

Pythagorean Identities

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$\cot^2\theta + 1 = \csc^2\theta$$

Half Angle Formulas

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$
$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

Angle Addition Formulas

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$
$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$
$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$
$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$$
$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

Double Angle Formulas

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

Product-to-Sum Formulas

$$\sin A\cdot\sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$
$$\cos A\cdot\cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) + \cos(A+B)\right]$$
$$\sin A\cdot\cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$
$$\cos A\cdot\sin B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) - \sin(A-B)\right]$$

Triple Angle Formulas

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$
$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\tan 3\theta = \frac{3\tan\theta - \tan^3\theta}{1 - 3\tan^2\theta}$$

Power Reducing Formulas

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$
$$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$
$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

Sum-to-Product Formulas

$$\sin A + \sin B = 2\cdot\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\sin A - \sin B = 2\cdot\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$
$$\cos A + \cos B = 2\cdot\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos A - \cos B = -2\cdot\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Arc Length

$S = r\theta$

Law of Sines

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Law of Cosines

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Law of Tangents

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan\left[\frac{1}{2}(A-B)\right]}{\tan\left[\frac{1}{2}(A+B)\right]}$$

↫ **Fin du cours** ↬