



Random variable - In English

A random variable (also called random quantity, aleatory variable, or stochastic variable) is a mathematical formalization of a quantity or object which depends on random events.

The term 'random variable' can be misleading as its mathematical definition is not actually random nor a variable,[2] but rather it is a function from possible outcomes (e.g., the possible upper sides of a flipped coin such as heads H and tails T in which 1 is corresponding to H and -1 is corresponding to T, respectively), often to the real numbers.

I. Variable aléatoire

Dans tout ce qui suit, les lettres n et i désignent des entiers naturels non nul.

I.1 Notion de variable aléatoire (v.a.)

Définition 1

Soit Ω (lire Oméga) l'univers associé à une expérience aléatoire, c'est à dire l'ensemble des issues de l'expérience aléatoire. On définit une variable aléatoire X sur Ω quand on associe un nombre réel à chaque issue de Ω . On dit que l'ensemble de ces réels est l'ensemble des valeurs prises par X .

Exemple 1

Une urne contient 8 boules. Deux portent le $n^{\circ}1$, deux portent le $n^{\circ}2$, trois portent le $n^{\circ}3$, une porte le $n^{\circ}4$.

Soit le jeu suivant :

- on gagne 10 euros si la face sortie est 1 ou un 2 ;
- et 5 euros si c'est un 3 ;
- on perd 50 euro si c'est un 4.

On définit alors la variable aléatoire X sur Ω qui correspond au gain (ou perte). La v.a. X associe :

- 10 à l'issue ou évènement élémentaire $\{1\}$;
- 10 à l'issue ou évènement élémentaire $\{2\}$;
- 5 à l'issue ou évènement élémentaire $\{3\}$;
- et -50 à l'issue ou évènement élémentaire $\{4\}$.

L'ensemble des valeurs prises par X est donc $F = \{-50 ; 5 ; 10\}$ alors que l'univers est $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

I.2 Évènement lié à une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers Ω .

L'ensemble des valeurs prises par X est $F = \{x_1 ; x_2 ; x_3 ; \dots ; x_n\}$, où les valeurs sont rangés par ordre croissant. Le nombre x_i est associé à une ou plusieurs des issues de Ω .

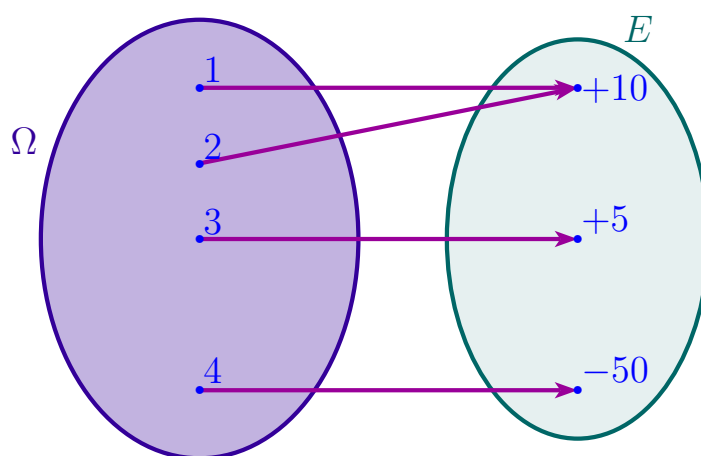
Définition 2 (Évènement et v.a.)

1. L'évènement " $X = x_i$ " est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel x_i .
2. L'évènement " $X \geq x_i$ " est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel qui est supérieur ou égal à x_i .

Exemple 1

Dans l'exemple 1, $\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ et l'ensemble des valeurs prises par X est :

$$F = \{x_1 = -50 ; x_2 = 5 ; x_3 = 10\}$$



1. L'évènement " $X = 10$ " est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe le réel $x_3 = 10$. L'évènement " $X = 10$ " est donc formé des issues qui octroient un gain de 10 euros, c'est à dire les issues $\{1\}$ et $\{2\}$.
2. L'évènement " $X \geq 5$ " est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel qui est supérieur ou égal à 5. L'évènement " $X \geq 5$ " est donc formé des issues qui octroient un gain supérieur ou égal à 5 euros, c'est à dire les issues $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$.
3. L'évènement " $X < 0$ " est l'ensemble des issues de Ω auxquelles on associe un réel qui est inférieur strictement à 0. L'évènement " $X < 0$ " est donc formé des issues qui octroient une perte, c'est à dire l'issue $\{4\}$.
4. On peut remarquer que les évènements " $X < 0$ " et " $X < 4$ " sont identiques. De même " $X \geq 5$ " = " $X \geq 3$ ".

I.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Définition 3

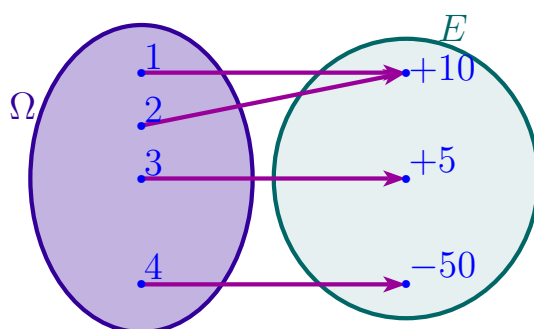
La probabilité de l'évènement ' $X = x_i$ ' est la probabilité de l'évènement formé de toutes les issues associées au nombre x_i .

Exemple 1

L'urne contient 8 boules. Deux portent le n°1, deux portent le n°2, trois portent le n°3, une porte le n°4.

L'univers associé est alors

$$\Omega = \{e_1 = 1; e_2 = 2; e_3 = 3; e_4 = 4\}$$



- Il y a deux boules qui portent le n°1 sur 8, donc en supposant que chaque boule à la même chance d'être tirée on a :

$$p(e_1) = \frac{2}{8} = 0,25$$

On obtient de la même façon :

$$P(e_2) = \frac{2}{8} = 0,25; P(e_3) = \frac{3}{8} = 0,375; P(e_4) = \frac{1}{8} = 0,125$$

- La loi de probabilité correspondante est décrite par le tableau :

| e_i | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
|----------|------|------|-------|-------|-------|
| $P(e_i)$ | 0,25 | 0,25 | 0,375 | 0,125 | 1 |

- La probabilité de l'évènement ' $X = +5$ ' par exemple est la probabilité de l'évènement élémentaire {3} on a donc :

$$P(X = +5) = \underline{0,375}$$

- La probabilité de l'évènement ' $X \geq +5$ ' par exemple est la probabilité de l'évènement {1 ; 2 ; 3} on a donc :

$$P(X \geq +5) = 0,25 + 0,25 + 0,375 = \underline{0,875}$$

Définition 4 (Loi de probabilité)

Soit X une variable aléatoire associée à un univers fini Ω et F l'ensemble des valeurs prises par la variable X .

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est la donnée de toutes les probabilités $P(X = x_i)$, où x_i prend toutes les valeurs de F .

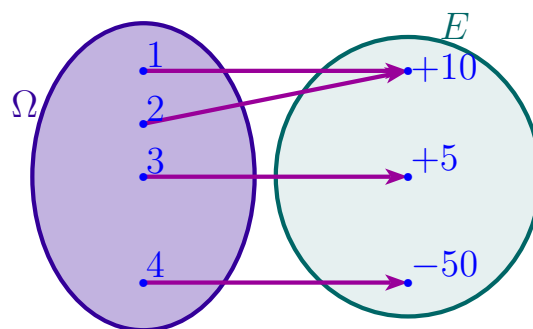
On présente généralement ces données sous la forme d'un tableau :

| | | | | | |
|--------------|-------|-------|-------|---------|-------|
| x_i | x_1 | x_2 | x_3 | \dots | x_m |
| $P(X = x_i)$ | p_1 | p_2 | p_3 | \dots | p_m |

Exemple 1

L'urne contient 8 boules. Deux portent le $n^{\circ}1$, deux portent le $n^{\circ}2$, trois portent le $n^{\circ}3$, une porte le $n^{\circ}4$:

| | | | | | |
|----------|------|------|-------|-------|-------|
| e_i | 1 | 2 | 3 | 4 | Total |
| $P(e_i)$ | 0,25 | 0,25 | 0,375 | 0,125 | 1 |



La loi de probabilité de X est décrite par le tableau :

| | | | | |
|--------------|------------------|------------------|-------------------------|-------|
| x_i | -50 | 5 | 10 | Total |
| $P(X = x_i)$ | $p(e_4) = 0,125$ | $p(e_3) = 0,375$ | $p(e_1) + p(e_2) = 0,5$ | 1 |

II. Propriété d'une variable aléatoire et espérance mathématique**II.1 Somme des probabilités $P(X = x_i)$** **Propriété 1**

Soit X une variable aléatoire associée à un univers fini Ω et F l'ensemble des valeurs prises par la variable X de loi de probabilité :

| | | | | | | |
|--------------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|
| x_i | x_1 | x_2 | x_3 | \dots | x_m | Total |
| $P(X = x_i)$ | p_1 | p_2 | p_3 | \dots | p_m | 1 |

Alors on a ;

$$P(X = x_1) + P(X = x_2) + \dots + P(X = x_m) = 1$$

II.2 Espérance mathématique d'une variable aléatoire

Définition 5 (Espérance mathématique)

Soit X une variable aléatoire associée à un univers fini Ω et F l'ensemble des valeurs prises par la variable X de loi de probabilité :

| | | | | | | |
|--------------|-------|-------|-------|---------|-------|-------|
| x_i | x_1 | x_2 | x_3 | \dots | x_m | Total |
| $P(X = x_i)$ | p_1 | p_2 | p_3 | \dots | p_m | 1 |

Alors on a l'espérance mathématique de X est le nombre réel, noté $E(X)$, donné par :

$$E(X) = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + \dots + x_m \times p_m$$

Cela peut aussi s'écrire :

$$E(X) = \sum_{i=1}^m x_i \times p_i$$



Interprétation

L'espérance d'une variable aléatoire est, intuitivement, la valeur que l'on s'attend à trouver, en **moyenne**, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Elle correspond à une moyenne pondérée des valeurs que peut prendre cette variable.

Point Historique

Le physicien et mathématicien hollandais, Christiaan Huygens publie un traité sur les probabilités en 1657, *Tractatus de ratiociniis in aleae ludo* (Traité sur les raisonnements dans le jeu de dés). C'est le premier traité consacré à cette nouvelle théorie des probabilités. Le contenu du livre de Huygens est assez limité mais il y introduit ce qui deviendra la notion d'*espérance mathématique*.

Exemple 1

La loi de probabilité de X est décrite par le tableau :

| | | | | |
|--------------|------------------|------------------|-------------------------|-------|
| x_i | -50 | 5 | 10 | Total |
| $P(X = x_i)$ | $p(e_4) = 0,125$ | $p(e_3) = 0,375$ | $p(e_1) + p(e_2) = 0,5$ | 1 |


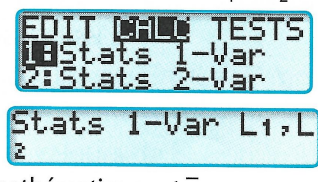
Donc l'espérance est :

$$E(X) = -50 \times 0,125 + 5 \times 0,375 + 10 \times 0,5 = 0,625$$

Cela signifie que le gain moyen au jeu de l'exemple 1 est de 0,625 euros soit environ 62 centimes.

Avec la calculatrice

On entre dans l'éditeur de listes de la calculatrice (**touche Stats** pour *Texas*, **menu STAT** pour *Casio*) les valeurs x_1 et p_i , comme en statistiques. L'espérance mathématique sera alors la moyenne pondérée des données. Elle est donc notée \bar{x} .

| Casio | Texas |
|---|--|
| <p>Dans le menu CALC, on choisit SET, puis on sélectionne les deux listes, et on obtient le résultat avec le menu 1 VAR.</p>  <p>L'espérance mathématique est \bar{x}.</p> | <p>Dans le menu CALC, on choisit Stats 1-Var et on entre L_1, L_2 après avoir saisi les données dans L_1 et L_2.</p>  <p>L'espérance mathématique est \bar{x}.</p> |

II.3 Variance (Variance) et écart-type (Standard deviation) d'une variable aléatoire

Définition 6 (Variance (Variance))

| | | | | |
|--------------|-------|---------|-------|-------|
| x_i | x_1 | \dots | x_n | Total |
| $p(X = x_i)$ | p_1 | \dots | p_n | 1 |

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2$$

On a aussi : formule de König-Huygens

$$V(X) = \left(\sum_{i=1}^n p_i \times x_i^2 \right) - E(X)^2 \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$



Interprétation

La **variance** est un **caractère de dispersion**. Plus une variance est élevée plus la dispersion des observations est importante par rapport à la moyenne ; elle est très sensible aux valeurs extrêmes.

Définition 7 (Écart-Type (Standard deviation))

L'écart-type de X vaut :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$



Interprétation

En pratique c'est l'**écart type** qui est le plus utilisé que la variance car il est dans la même unité que les valeurs de la variable aléatoire.

L'**écart type** s'exprime en effet avec les mêmes unités que les observations ; la variance, quant à elle, s'exprime avec les unités au carré.

L'**écart type** est la mesure la plus courante de la **dispersion ou de la répartition des données sur la moyenne**

III. Propriétés

III.1 Linéarité de l'espérance

Propriété 2 (Linéarité de l'espérance)

Soit X une variable aléatoire et soient a et b des réels. Alors :

$$E(aX + b) = a \times E(X) + b$$



Preuve

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{i=1}^m p_i (ax_i + b) \\ &= p_1 (ax_1 + b) + p_2 (ax_2 + b) + \dots + p_m (ax_m + b) \\ &= ap_1x_1 + p_1b + ap_2x_2 + p_2b + \dots + ap_r x_r + p_r b \\ &= a(p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_r x_r) + b(p_1 + p_2 + \dots + p_r) \\ &= aE(X) + b \end{aligned}$$

III.2 Variance et écart-type

Propriété 3

Soit X une variable aléatoire et soient a et b des réels. Alors :

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \times \text{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X).$$



Preuve

Soit a et b deux réels on a :

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= \sum_{i=1}^m p_i \times (x_i - E(X))^2 \\ \text{Var}(aX + b) &= \sum_{i=1}^m p_i \times (ax_i + b - E(aX + b))^2 \quad \text{et} \quad E(aX + b) = aE(X) + b \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \text{Var}(aX + b) &= \sum_{i=1}^m p_i \times (ax_i + b - (aE(X) + b))^2 \\ &= \sum_{i=1}^m p_i \times (ax_i + b - aE(X) - b)^2 \\ &= \sum_{i=1}^m p_i \times [a(x_i - E(X))]^2 \\ &= \sum_{i=1}^m p_i \times a^2 \times (x_i - E(X))^2. \end{aligned}$$

Puisque a^2 est indépendant de i , on a :

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \times \sum_{i=1}^m p_i \times (x_i - E(X))^2 = a^2 \times \text{Var}(X).$$

IV. Bilan

Propriété 4

1. Espérance d'une v.a. quelconque X .

| | | | | |
|--------------|-------|---------|-------|-------|
| x_i | x_1 | \dots | x_n | Total |
| $p(X = x_i)$ | p_1 | \dots | p_n | 1 |

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + \dots + p_n x_n$$

2. Variance d'une v.a. quelconque X .

| | | | | |
|--------------|-------|---------|-------|-------|
| x_i | x_1 | \dots | x_n | Total |
| $p(X = x_i)$ | p_1 | \dots | p_n | 1 |

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 ; \quad V = \left(\sum_{i=1}^n p_i \times x_i^2 \right) - E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

3. L'écart-type de X vaut :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

4. Propriétés :

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \times \text{Var}(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X) \quad \text{et} \quad E(aX + b) = a \times E(X) + b$$

5. Interprétations :

- **L'espérance** d'une variable aléatoire est, intuitivement, la valeur que l'on s'attend à trouver, en **moyenne**, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire.
Elle correspond à une moyenne pondérée des valeurs que peut prendre cette variable.
- **La variance** est un **caractère de dispersion**. Plus une variance est élevée plus la dispersion des observations est importante par rapport à la moyenne ; elle est très sensible aux valeurs extrêmes.
- En pratique c'est l'**écart type** qui est le plus utilisé que la variance car il est dans la même unité que les valeurs de la variable aléatoire.
L'**écart type** s'exprime en effet avec les mêmes unités que les observations ; la variance, quant à elle, s'exprime avec les unités au carré.
L'**écart type** est la mesure la plus courante de la **dispersion ou de la répartition des données sur la moyenne**.

↩ **Fin du cours** ↪