Math93.com

# TD 1 - 1re Spécialité maths
# Application du produit scalaire et géométrie repérée

*Les exercices dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.*

## Table des matières

# Partie I. Applications du produit scalaire : Distances et angles dans un triangle

## Exercice 1. Théorème d'Al-Kashi ou loi des cosinus (*Law of cosines*)

**1.** $ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 5$, $AD = 3$ et $\widehat{DAB} = \dfrac{\pi}{3}$. Calculer les longueurs $BD$ et $AC$.

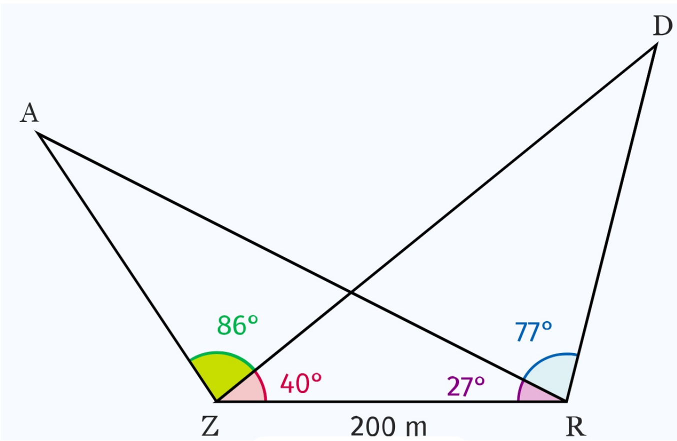
**2.** $ABC$ est un triangle tel que $AB = 2$, $BC = 3$ et $AC = 4$. Déterminer la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$. *Arrondir au degré.*

## Exercice 2. (c) Loi des sinus (*Law of sines*)

Soit ABC un triangle tel que $AC = 7$, $\widehat{A} = \dfrac{\pi}{4}$ et $\widehat{C} = \dfrac{2\pi}{3}$
Déterminer une valeur approchée au dixième près des deux autres longueurs du triangle en utilisant la loi des sinus .

## Exercice 3. (c) Triangulation

Redouane (R) et Zola (Z) sont partis à vélo chacun de leur côté. Zola veut rejoindre la ville d'Arkham City (A) tandis que Redouane roule vers Dunwich (D).




Ils échangent les mesures d'angles et de longueur ci-dessous par SMS. Calculer la distance qu'il leur reste à parcourir jusqu'à leur destination.

## Exercice 4. (c) Avec le théorème de la médiane

$ABC$ est un triangle avec $AB = 4$, $AC = 6$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$.
On note I le milieu de $[BC]$.
Déterminer $AI$ et $BC$.

## Exercice 5. (c) Avec le théorème de la médiane

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$.
Quelles sont les longueurs des médianes de ce triangle ?

# Partie II. Applications du produit scalaire : Lieu Géométrique

## Exercice 6. Quelques lieux géométriques à connaitre

**1.** $A$ et $B$ étant deux points donnés du plan, quel est le lieu géométrique des points $M$ du plan tels que $MA = MB$ ?

**2.** $O$ étant un point donné de l'espace et $r$ un réel donné, quel est le lieu géométrique des points $M$ de l'espace tels que $OM = r$. *On discutera suivant l'ensemble de réels décrit par le réel* $r$.

**3.** $O$ et $A$ sont deux points donnés dans le plan. On appelle $M'$ l'image d'un point $M$ par la symétrie centrale de centre $A$. Quel est le lieu géométrique des points $M'$ quand $M$ décrit le cercle de centre $O$ et de rayon 2 ?

## Exercice 7. (c) (ex. 61)

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 2$. On cherche l'ensemble des points M tel que : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$.

**1.** C est le point de la droite (AB) tel que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$ . Montrer que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ .

**2.** En introduisant le point C dans la relation de départ, faire apparaître un produit scalaire nul.

**3.** Conclure.

## Exercice 8. (c) (ex. 63)

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 4$ cm.
Quel est le lieu géométrique des points M tel que l'aire du triangle AMB est égale à 2 cm$^2$.

## Exercice 9. (c) (ex. 68)

$A$ et $B$ étant deux points donnés du plan et $k$ étant un réel donné, quel est le lieu géométrique des points $M$ du plan tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ ? *On discutera suivant l'ensemble de réels décrit par le réel* $k$.

**1.** Pour $k$ non nul, que dire des point A, B et M ?

**2.** Étudier le cas où $k = 0$.

**3.** où $k = 1$.

**4.** où $k = 2$.

**5.** où $k = -1$.

**6.** où $k = \frac{1}{2}$.

**7.** où $k > 0$.

**8.** où $k \in [0 ; 1]$.

**9.** où $k < 0$.

# Partie III. Équation cartésienne d'une droite

## Exercice 10. Équation cartésienne d'une droite : 1 point et 1 vecteur directeur

**1.** $d$ est la droite dirigée par $\vec{u}(-5\ ;\ 2)$ et qui passe par $A(-1\ ;\ 1)$. Déterminer une équation cartésienne de $d$.

**2.** On donne $A(-2\ ;\ -2)$ et $B(1\ ;\ 2)$. Déterminer une équation cartésienne de la droite $(AB)$.

**3.** Quelle est la position relative des droites d'équations $2x+3y-5=0$ et $5x-7y+1=0$ ?

**4.** $d$ est la droite d'équation cartésienne $x+y+2=0$. Déterminer une équation cartésienne de la droite $d'$ parallèle à $d$ et passant par le point $A(3\ ;\ -4)$.

## Exercice 11. Équation cartésienne d'une droite : 1 point et 1 vecteur normal

**1.** Déterminer l'équation de la droite $d$ de vecteur normal $\vec{n}(-5\ ;\ 2)$ et qui passe par $A(-1\ ;\ 1)$.

**2.** Déterminer une équation de la droite $(d')$ passant par le point $B(2\ ;\ 3)$ et perpendiculaire à la droite $d$.

## Exercice 12. Divers

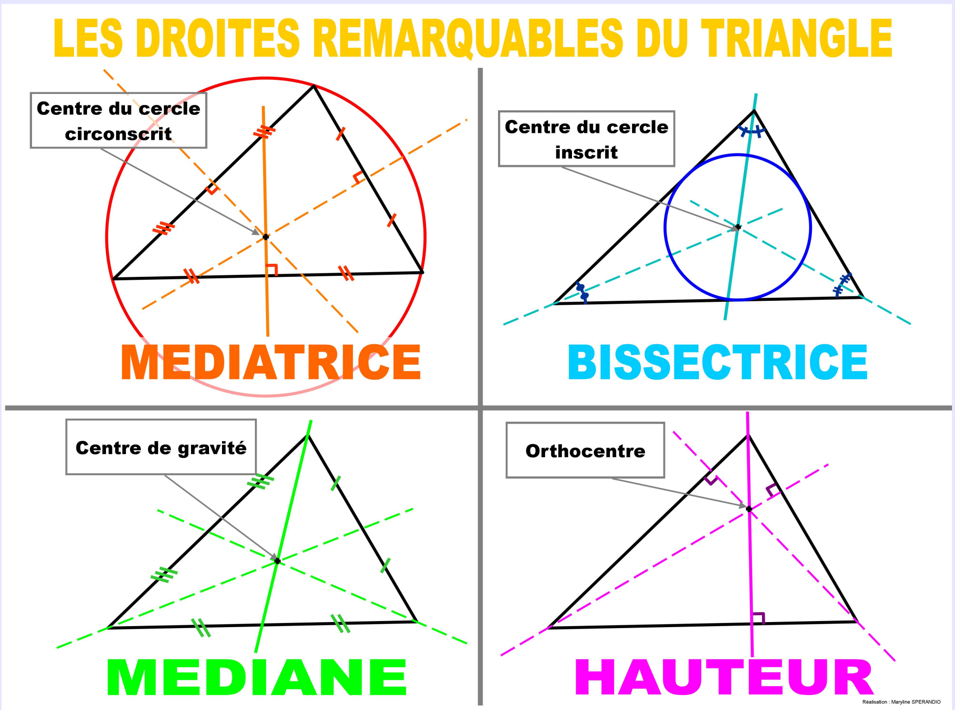
**1.** Quelle est la position relative des droites $(d_1)$ et $(d_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$x+2y-4=0 \text{ et } -3x-6y+8=0$$

**2.** On appelle $d$ la droite d'équation cartésienne $x+3y-7=0$ et le point $A(2\ ;\ 6)$.
Calculer la distance du point $A$ à la droite $d$.

## Exercice 13. Droites remarquables du triangle

**Droites Remarquables**



**1.** On donne $A(2\ ;\ -2)$, $B(-4\ ;\ 1)$ et $C(-1\ ;\ -3)$.
Déterminer une équation de la hauteur $(d)$ issue de $C$ dans le triangle $ABC$.

**2.** On donne $A(1\ ;\ 3)$ et $B(4\ ;\ 2)$.
Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.

**3.** On donne les points $A(5\ ;\ 2)$, $B(-1\ ;\ 3)$ et $C(0\ ;\ -4)$.
Quelles sont les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle $ABC$ ?

## Exercice 14. * Hyperbole et orthocentre

Dans un repère orthonormé, on considère l'hyperbole qui représente la fonction inverse.
$A$ et $B$ sont deux points distincts d'abscisses positives de cette hyperbole , et $C$ est un point d'abscisse négative de cette hyperbole.
On appelle $H$ l'orthocentre du triangle $ABC$ (le point d'intersection des hauteurs).

**1.** Faire une figure avec le logiciel *Geogebra*. Quelle conjecture peut-on émettre sur la position du point $H$ ?

**2.** Prouver cette conjecture.

# Partie IV. Distance point-droite

## Exercice 15. (c) Distance d'un point à une droite : 2 méthodes à connaître

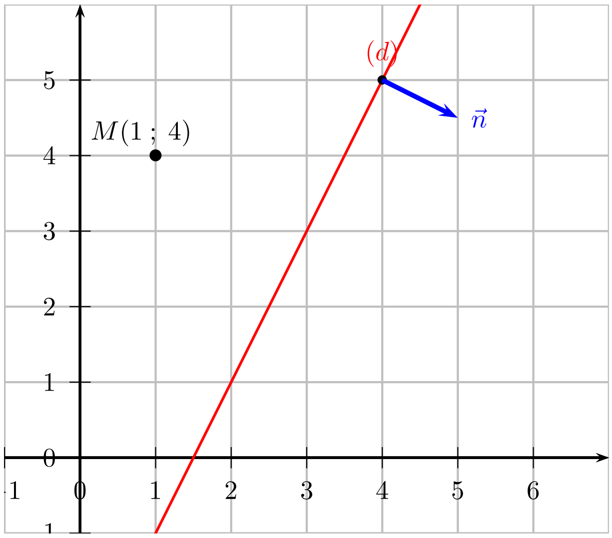
**Remarque**

Dans tout l'exercice, il est interdit d'utiliser directement une formule toute faite pour la distance point-droite. On doit tout justifier à l'aide du produit scalaire (*dot product*).

Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on considère le point $M(1\ ;\ 4)$ et la droite $(d)$ d'équation :

$$(d)\ :\ 2x - y - 3 = 0$$

L'objectif est de déterminer la distance entre le point $M$ et la droite $(d)$.




### Méthode 1

1. Déterminer un un vecteur normal (*normal vector*) à la droite $(d)$.
2. Déterminer un point $A$ appartenant à $(d)$ avec des coordonnées entières.
3. On note $H$ le projeté orthogonal (*orthogonal projection*) de $M$ sur $(d)$. Démontrer, à l'aide du produit scalaire, que :

$$MH = \frac{\left|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

4. Calculer la distance $d\big(M, (d)\big)$.

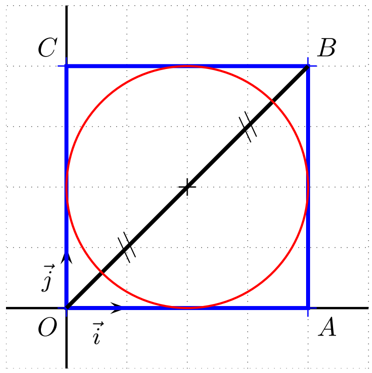
### Méthode 2

1. Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $(d)$.
2. Déterminer une équation de la droite $(\Delta)$ perpendiculaire à $(d)$ et passant par $M$.
3. On note $H$ le point d'intersection de $(d)$ et $(\Delta)$. Calculer les coordonnées de $H$.
4. Montrer que $H$ est le projeté orthogonal (*orthogonal projection*) de $M$ sur $(d)$.
5. En déduire la distance $d\big(M, (d)\big)$.

# Partie V. Équation cartésienne d'un cercle

## Exercice 16. Savoir déterminer une équation cartésienne d'un cercle

Dans un repère orthonormé d'origine $O$, on donne les points $A$, $B$ et $C$ comme le montre la figure ci-contre.
Déterminer une équation du cercle inscrit dans le carré $OABC$.




## Exercice 17. Savoir reconnaitre une équation de cercle

**Méthode**
L'idée ici est de se ramener à une équation de la forme :

$$(x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 = r^2$$

Pour cela on rassemble les termes en $x$, ceux en $y$ et on effectue 2 mise sous forme canonique.

Dans un repère orthonormé, on considère l'ensemble des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

$$x^2 + y^2 + 2x - 5y = 7,25$$

Montrer que c'est un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

## Exercice 18. (c) Savoir reconnaitre une équation de cercle 2

Dans chacun des cas suivants, vérifier si l'équation donnée est celle d'un cercle. Lorsque c'est le cas, préciser les coordonnées du centre et le rayon.

1. $x^2 + y^2 - \dfrac{11}{2}x - 2y + \dfrac{73}{16} = 0$.
2. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$.
3. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 7 = 0$.

## Exercice 19. (c) Équation d'un cercle

On considère les points $A(2\ ;\ -1)$, $B(0\ ;\ 6)$ et $C\left(\dfrac{5}{3}\ ;\ 3\right)$.
Déterminer une équation du cercle :

1. de rayon [BC] et de centre B ;
2. passant par A et de centre C ;
3. de diamètre [AB] : le point C appartient-il à ce cercle ?

### Exercice 20. Équation d'un cercle - ex. 45

On considère le cercle $\mathscr{C}$ de centre $\Omega(-2\ ;\ 3)$ et de rayon $3$.

**1.** Justifier que le point $A(1\ ;\ 3)$ appartient au cercle $\mathscr{C}$.

**2.** Déterminer une équation de la tangente au cercle $\mathscr{C}$ passant par le point $A$.

# Partie VI. Bilan et point BAC

### Exercice 21. Un Bilan des compétences à maitriser

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'unité $1\ cm$.
On considère la droite $(d)$ d'équation $x + 3y - 5 = 0$.

**1.** Montrer que le point $A$ de coordonnées $(2\ ;\ 1)$ appartient à la droite $(d)$ et tracer la droite $(d)$ dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

**2.** Montrer que la droite $(d')$ passant par le point $B$ de coordonnées $(4\ ;\ 2)$ et perpendiculaire à la droite $(d)$ admet pour équation $3x - y - 10 = 0$.

**3.** Soit $H$ le projeté orthogonal du point $B$ sur la droite $(d)$.
Déterminer, par le calcul, les coordonnées de $H$.

> **Remarque**
> On demande en fait ici de calculer la distance entre le point $B$ et la droite $(d)$.

**4.** On considère le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AB]$ et on note $\Omega$ son centre.

**4. a.** Déterminer une équation de $\mathscr{C}$ ; préciser son rayon et les coordonnées de $\Omega$.

**4. b.** Le point H appartient-il à $\mathscr{C}$ ? Justifier.

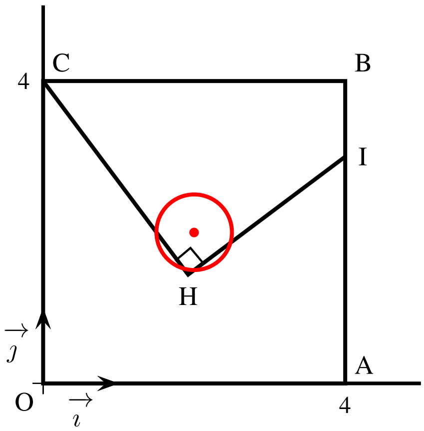
## Exercice 22. Bac 2026 : Sujet 0 - 1

**Point BAC**

À partir de la session 2026, tous les élèves de première générale et technologique passent une épreuve anticipée de mathématiques. Cette épreuve de 2 heures comporte un QCM d'automatismes (6 points) et deux ou trois exercices de raisonnement (14 points). L'usage de la calculatrice est interdit et l'épreuve porte sur l'ensemble du programme de seconde et de première.

- Pour avoir les sujets et corrigés du bac : ⊳ www.math93.com

On considère la figure suivante, représentée dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.




On dispose des données suivantes :

- Le quadrilatère OABC est un carré de côté 4 ;
- On a A(4 ; 0), B(4 ; 4), C(0 ; 4), I(4 ; 3) ;
- Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI) ;
- On note $\mathcal{E}$ le cercle de centre D(2 ; 2) et de rayon 0,5.

**1.**

**1. a.** Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC}$.

**1. b.** En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC}$.

**2.**

**2. a.** Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OC}$ en fonction des longueurs OH et OI.

**2. b.** Calculer la longueur OI.

**2. c.** En déduire que $OH = 2,4$.

**3.**

**3. a.** Déterminer une équation cartésienne de la droite (CH).

**3. b.** Justifier qu'une équation du cercle $\mathcal{E}$ est :

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7,75 = 0.$$

**3. c.** Le point M(1,5 ; 2) appartient-il à l'intersection du cercle $\mathcal{E}$ et de la droite (CH) ? Justifier.

| Aide au calcul : |
| --- |
| $0,5^2 = 0,25$ |
| $1,5^2 = 2,25$ |
| $2,5^2 = 6,25$ |
| $5 \times 2,4 = 12$ |

# Partie VII. Now We Can Talk ! Compléments

## Exercice 23. Savoir déterminer les points d'intersection d'un cercle et d'une droite parallèle à un des axes du repère.

On considère le cercle de centre $A(4\ ;\ 5)$ et passant par $B(-1\ ;\ 5)$.
Pour tout réel $k$, on considère la droite d'équation $x = k$.
Suivant les valeurs du réel $k$, déterminer le nombre de points d'intersection de ce cercle et de cette droite .

## Exercice 24. Savoir prouver que des points sont cocycliques

On considère les points $A(1\ ;\ 4)$, $B(5\ ;\ 0)$, $C(3\ ;\ -2)$ et $D(-1\ ;\ 2)$.
Montrer que ces quatre points sont cocycliques (appartiennent à un même cercle) et donner un équation du cercle auxquels ils appartiennent.

## Exercice 25. Discutons

Soit $k$ un réel quelconque.
Dans un repère orthonormé, on considère l'ensemble $(E_k)$ des points $M(x\ ;\ y)$ tels que :

$$x^2 + y^2 + 10x - 8y = k$$

Déterminer les valeurs du réels $k$ pour que $(E_k)$ soit un cercle de centre $A$ et de rayon $r_k$.
Déterminer alors $r_k$ (en fonction de $k$) et les coordonnées du centre $A$.

## Exercice 26. (c) Ex. 50 p 266 - Démonstration

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$, $B(x_B\ ;\ y_B)$ et $C(x_C\ ;\ y_C)$ trois points distincts et non alignés du plan.
On note G le centre de gravité du triangle ABC.
Démontrer que les coordonnées de G sont :

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\ ;\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

## Exercice 27. (c) Ex. 51 p 266

ABC est un triangle tel que A, B'e t C' sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].
On note G le centre de gravité du triangle ABC, puis I et J les milieux respectifs des segments [BG] et [CG].
Montrer que le quadrilatère C'IJB' est un parallélogramme.

## Exercice 28. (c) Ex. 57

On se place dans un triangle ABC rectangle en A.
En utilisant deux méthodes différentes, démontrer que la médiane issue de A mesure la moitié de la longueur du côté [BC].

## Exercice 29. (c) Ex. 60

On considère les points $R(3\ ;\ 5)$, $S(1\ ;\ 10)$ et $T(5\ ;\ 1)$.
Trouver les coordonnées du point T telles que le triangle TRS admette le point G comme centre de gravité.

# Partie VIII. Corrections

## Correction de l'exercice 2

**3. Application 1 :** Soit ABC un triangle tel que $b = 7$, $\widehat{\mathrm{A}} = \frac{\pi}{4}$ et $\widehat{\mathrm{C}} = \frac{2\pi}{3}$.

Déterminer une valeur approchée au dixième près des deux autres longueurs du triangle.

On calcule une mesure de l'angle $\widehat{B}$ : $\widehat{B} = \pi - \widehat{A} - \widehat{C} = \pi - \frac{\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{12}$.

Alors comme $\frac{a}{\sin(\widehat{A})} = \frac{b}{\sin(\widehat{B})} = \frac{c}{\sin(\widehat{C})}$, $a = \frac{b \times \sin(\widehat{A})}{\sin(\widehat{B})} = \frac{7 \times \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} \approx 19,1$, et $c = \frac{b \times \sin(\widehat{C})}{\sin(\widehat{B})} =$

## Correction de l'exercice 3

La formule des sinus dans le triangle $RAZ$ nous donne : $\frac{AZ}{\sin(\widehat{R})} = \frac{ZR}{\sin(\widehat{A})}$, donc $\frac{AZ}{\sin(27)} = \frac{200}{\sin(180-27-86-40)}$, donc $AZ = \frac{200\sin(27)}{\sin(27)} = 200$.

Zola est donc à $200$ m d'Arkham City.

De même, la formule des sinus dans le triangle $ZRD$ nous donne : $\frac{RD}{\sin(\widehat{Z})} = \frac{ZR}{\sin(\widehat{D})}$, donc $\frac{RD}{\sin(40)} = \frac{200}{\sin(180-27-77-40)}$, donc $RD = \frac{200\sin(40)}{\sin(36)} \simeq 2187,15$.

Redouane est donc à environ $2,2$ km de Dunwich.

## Correction de l'exercice 4

$ABC$ est un triangle avec $AB = 4$, $AC = 6$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{3}$.

On note I le milieu de $[BC]$.

Déterminer $AI$ et $BC$.

**Corrigé**

Nous allons utiliser deux des égalités du théorème de la médiane :

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \mathrm{AI}^2 - \frac{\mathrm{BC}^2}{4}$ et $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 2\mathrm{AI}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{2}$

D'une part, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4 \times 6 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12$ et, d'autre part, $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2 = 4^2 + 6^2 = 52$.

On obtient donc le système suivant : $\begin{cases} \mathrm{AI}^2 - \frac{\mathrm{BC}^2}{4} = 12 \\ 2\mathrm{AI}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{2} = 52 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} 2\mathrm{AI}^2 - \frac{\mathrm{BC}^2}{2} = 24 \\ 2\mathrm{AI}^2 + \frac{\mathrm{BC}^2}{2} = 52 \end{cases}$ et $\begin{cases} 4\mathrm{AI}^2 = 76 \\ \mathrm{BC}^2 = 28 \end{cases}$.

On a donc $\mathrm{AI} = \sqrt{19}$ et $\mathrm{BC} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

## Correction de l'exercice 5

Soit ABC un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 8$ et $BC = 10$.
Quelles sont les longueurs des médianes de ce triangle ?

### Corrigé

Si on note $A'$, $B'$ et $C'$ les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, d'après le théorème de la médiane on a : $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \dfrac{BC^2}{2}$. On en déduit donc que $AA'^2 = \dfrac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4}$.

On a donc $AA'^2 = \dfrac{2(6^2 + 8^2) - 10^2}{4} = 25$.
D'où $AA' = 5$.

De même $CC'^2 = \dfrac{2(10^2 + 8^2) - 6^2}{4} = 73$ d'où $CC' = \sqrt{73}$.

Et enfin $BB'^2 = \dfrac{2(10^2 + 6^2) - 8^2}{4} = 52$ d'où $BB' = 2\sqrt{13}$.

## Correction de l'exercice 7

Soient $\mathrm{A}$ et $\mathrm{B}$ deux points du plan tels que $\mathrm{AB} = 2$. On cherche l'ensemble des points $\mathrm{M}$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 8$.

**1.** $\mathrm{C}$ est le point de $(\mathrm{AB})$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 8$. Montrer que $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Comme $C \in (AB)$, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Comme $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$ on en déduit que $k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$ et donc $k \times 2^2 = 8$ d'où $k = 2$.

**2.** En introduisant le point $\mathrm{C}$ dans la relation de départ, faire apparaître un produit scalaire nul.

On a alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 8 &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) \cdot \overrightarrow{AB} = 8 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 8 \\ &\Leftrightarrow 8 + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 8 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \end{aligned}$$

**3.** En déduire l'ensemble des points recherché.

L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = 8$ est donc sur la perpendiculaire à la droite $(AB)$ qui passe par $C$.

## Correction de l'exercice ??

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 4$ cm.
Quel est le lieu géométrique des points M tel que l'aire du triangle AMB est égale à 2 cm$^2$.

### Corrigé

Construisons le triangle $ABC$ rectangle en A tel que $AC = 1$. Alors l'aire de $ABC$ est donnée par $\dfrac{AB \times AC}{2} = 2$. On peut construire 2 tels points, notons-les $C_1$ et $C_2$.
Le point $C_1$ est donc un point de l'ensemble recherché.
Considérons maintenant la droite parallèle à $(AB)$ et passant par $C_1$. Alors Pour tout point $M$ de la droite, la hauteur du triangle $AMB$ issue de $M$ mesurera 1 cm et donc tous les points de cette droite appartiennent à l'ensemble recherché.
L'ensemble des points sont donc les deux droites parallèles à (AB) et qui passent par les points $C_1$ et $C_2$.

## Correction de l'exercice 9

**1.** Que peut-on dire des points A, B et M ?

Si $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$ les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. Les points sont donc alignés. f(x)

**2.** Dans les cas suivants, déterminer le point M :

**a.** si $k = 0$ ;

Si $k = 0$ on en déduit que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{0}$ et donc $M = A$. f(x)

**b.** si $k = 1$ ;

Si $k = 1$ on a $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ et donc $M = B$. f(x)

**c.** si $k = 2$ ;

Si $k = 2$, $M$ est le symétrique de $A$ par rapport à $B$ ( $B$ est le milieu du segment $[AM]$ ). f(x)

**d.** si $k = -1$ ;

$k = -1$, $M$ est le symétrique de $B$ par rapport à $A$ ( $A$ est le milieu du segment $[BM]$ ). f(x)

**e.** si $k = \dfrac{1}{2}$.

Si $k = \dfrac{1}{2}$ alors $M$ est le milieu du segment $[AB]$. f(x)

**3.** Quel est le lieu des points M dans les cas suivants ?

**a.** si $k > 0$

Si $k > 0$ $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ on le même sens donc $M$ appartient à la demie droite $[AB)$ privée du point $A$ car $k \neq 0$. f(x)

**b.** si $k \in [0\,;1]$

Si $k \in [0;1]$ alors $M \in [AB]$. f(x)

**c.** si $k \in ]-\infty\,;0[$

Si $k \in \mathbb{R}^*_-$ appelons $C$ le point tel que $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$ $(k = -1)$ alors $M \in ]AC)$ f(x)

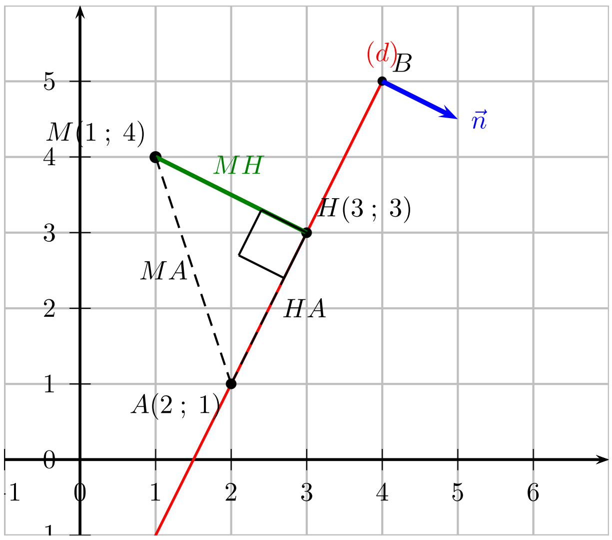
## Correction de l'exercice 15

**Remarque**
Dans tout l'exercice, il est interdit d'utiliser directement une formule toute faite pour la distance point-droite. On doit tout justifier à l'aide du produit scalaire (*dot product*).

Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère la droite $(d)$ d'équation :

$$(d) \ : \ 2x - y - 3 = 0$$

et le point $M(1 \ ; \ 4)$.




### Méthode 1

**1.** Déterminer un vecteur normal (*normal vector*) à la droite $(d)$.

**Corrigé**
On sait que si une droite a pour équation cartésienne

$$ax + by + c = 0,$$

alors un vecteur normal à cette droite est

$$\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Ici, $(d) : 2x - y - 3 = 0$, donc :

$$\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

est un vecteur normal à $(d)$.

**2.** Déterminer un point $A$ appartenant à $(d)$ avec des coordonnées entières.

**Corrigé**
On cherche $A(x_A \ ; \ y_A)$ tel que :

$$2x_A - y_A - 3 = 0.$$

On choisit $x_A = 2$. Alors :

$$\begin{aligned} 2 \times 2 - y_A - 3 &= 0 \\ 4 - y_A - 3 &= 0 \\ 1 - y_A &= 0 \\ y_A &= 1. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{A(2\,;\,1) \in (d).}$$

**3.** On note $H$ le projeté orthogonal (*orthogonal projection*) de $M$ sur $(d)$. Démontrer, à l'aide du produit scalaire, que :

$$MH = \frac{\left|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

## Corrigé

Par définition du projeté orthogonal, on a :

$$H \in (d) \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MH} \perp (d).$$

Or $\vec{n}$ est un vecteur normal à $(d)$, donc $\vec{n} \perp (d)$. Ainsi :

$$\overrightarrow{MH} \text{ et } \vec{n} \text{ sont colinéaires.}$$

Soit $A \in (d)$. On décompose le vecteur $\overrightarrow{MA}$ en passant par $H$ :

$$\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}.$$

On prend le produit scalaire avec $\vec{n}$ :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} &= \left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}\right) \cdot \vec{n} \\ &= \overrightarrow{MH} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HA} \cdot \vec{n}. \end{aligned}$$

Comme $H \in (d)$ et $A \in (d)$, le vecteur $\overrightarrow{HA}$ est porté par $(d)$, donc :

$$\overrightarrow{HA} \perp \vec{n} \qquad \Longrightarrow \qquad \overrightarrow{HA} \cdot \vec{n} = 0.$$

Ainsi :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{MH} \cdot \vec{n}.$$

Comme $\overrightarrow{MH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires, l'angle entre ces deux vecteurs vaut $0$ ou $\pi$. Donc :

$$\overrightarrow{MH} \cdot \vec{n} = \pm \|\overrightarrow{MH}\| \, \|\vec{n}\| = \pm MH \, \|\vec{n}\|.$$

En prenant la valeur absolue :

$$\left|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{MH} \cdot \vec{n}\right| = MH \, \|\vec{n}\|.$$

D'où :

$$\boxed{MH = \frac{\left|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.}$$

**4.** Calculer la distance $d\big(M, (d)\big)$.

**Corrigé**

On rappelle que :

$$d\big(M,(d)\big) = MH.$$

D'après la question précédente :

$$MH = \frac{\left|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|}.$$

Calcul de $\overrightarrow{MA}$.

$$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} x_A - x_M \\ y_A - y_M \end{pmatrix} = \overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 2-1 \\ 1-4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{MA}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Produit scalaire.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} &= 1 \times 2 + (-3) \times (-1) \\ &= 2 + 3 \\ &= 5.\end{aligned}$$

Norme de $\vec{n}$.

$$\begin{aligned}\|\vec{n}\| &= \sqrt{2^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{4+1} \\ &= \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Distance.

$$\begin{aligned}MH &= \frac{|5|}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{5}{\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{d\big(M,(d)\big) = \sqrt{5}.}$$

## Méthode 2

**1.** Déterminer un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite $(d)$.

**Corrigé**

On réécrit l'équation de $(d)$ :

$$2x - y - 3 = 0 \iff y = 2x - 3.$$

La pente vaut 2, donc un vecteur directeur est :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

**2.** Déterminer une équation de la droite $(\Delta)$ perpendiculaire à $(d)$ et passant par $M$.

**Corrigé**

On rappelle la propriété (*normal vector form*) :
Si une droite passe par un point $A$ et admet un vecteur normal $\vec{n}$, alors c'est l'ensemble des points $P$ tels que

$$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0.$$

1) Vecteur normal à $(\Delta)$.
Comme $(\Delta)\perp(d)$, un vecteur directeur de $(d)$ est un vecteur normal à $(\Delta)$.
Donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\Delta)$.

2) Équation de $(\Delta)$ en utilisant $\overrightarrow{MP}\cdot\vec{n}_\Delta=0$.
On sait que $(\Delta)$ passe par $M(1\ ;\ 4)$.
Un point $P(x\ ;\ y)$ appartient à $(\Delta)$ si et seulement si :

$$\overrightarrow{MP}\cdot\vec{n}_\Delta=0.$$

Or :

$$\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}x-1\\y-4\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad\vec{n}_\Delta\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP}\cdot\vec{n}_\Delta&=0\\(x-1)\times1+(y-4)\times2&=0\\x-1+2y-8&=0\\x+2y-9&=0.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{(\Delta)\ :\ x+2y-9=0}.$$

**3.** On note $H$ le point d'intersection de $(d)$ et $(\Delta)$. Calculer les coordonnées de $H$.

**Corrigé**

On résout le système :

$$\begin{cases}y=2x-3\\y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}2x-3&=-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}\\4x-6&=-x+9\qquad\text{(on multiplie par 2)}\\5x&=15\\x&=3.\end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} y &= 2x - 3 \\ y &= 2 \times 3 - 3 \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{H(3\ ;\ 3)}.$$

**4.** Montrer que $H$ est le projeté orthogonal (*orthogonal projection*) de $M$ sur $(d)$.

**Corrigé**

Par construction, $H \in (d)$ car $H$ est l'intersection de $(d)$ et $(\Delta)$.
De plus, $(\Delta) \perp (d)$ et $M \in (\Delta)$, donc la droite $(MH)$ est perpendiculaire à $(d)$. Ainsi :

$$H \in (d) \qquad \text{et} \qquad (MH) \perp (d).$$

Donc $H$ est bien le projeté orthogonal de $M$ sur $(d)$.
(On peut aussi vérifier avec un produit scalaire :

$$\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} 3-1 \\ 3-4 \end{pmatrix} = \overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

puis

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} &= 2 \times 1 + (-1) \times 2 \\ &= 2 - 2 \\ &= 0, \end{aligned}$$

donc $(MH) \perp (d)$.)

**5.** En déduire la distance $d\big(M, (d)\big)$.

**Corrigé**

On a :

$$d\big(M, (d)\big) = MH.$$

$$\overrightarrow{MH}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} MH &= \sqrt{(3-1)^2 + (3-4)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + (-1)^2} \\ &= \sqrt{4+1} \\ &= \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{d\big(M, (d)\big) = \sqrt{5}}.$$

## Correction de l'exercice 18

Dans chacun des cas suivants, vérifier si l'équation donnée est celle d'un cercle. Lorsque c'est le cas, préciser les coordonnées du centre et le rayon.

**1.** $x^2 + y^2 - \frac{11}{2}x - 2y + \frac{73}{16} = 0.$

**2.** $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0.$

**3.** $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 7 = 0.$

### Corrigé

1. $x^2 + y^2 - \frac{11}{2}x - 2y + \frac{73}{16} = 0$

Cette équation est équivalente à $\left(x - \frac{11}{4}\right)^2 +$ $(y-1)^2 = 4$. C'est l'équation du cercle de centre $\left(\frac{11}{4};1\right)$ et de rayon 2.

2. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 7 = 0$

Ceci n'est pas l'équation d'un cercle étant donné que cette équation équivaut à $(x-1)^2 + (y-1)^2 = -5$ or la somme de deux carrés dans $\mathbb{R}$ ne peut jamais être strictement négative car un carré dans $\mathbb{R}$ est positif.

3. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

Cette équation est équivalente à $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 9$. C'est l'équation du cercle de centre $(4;3)$ et de rayon 3.

## Correction de l'exercice 19

On considère les points $A(2\ ;\ -1)$, $B(0\ ;\ 6)$ et $C\left(\dfrac{5}{3}\ ;\ 3\right)$.

Déterminer une équation du cercle :

1. de rayon [BC] et de centre B ;
2. passant par A et de centre C ;
3. de diamètre [AB] : le point C appartient-il à ce cercle ?

### Corrigé

**1.** de rayon $[\mathrm{BC}]$ et de centre $\mathrm{B}$.

On calcule $BC^2$ :

$$\begin{aligned} BC^2 &= (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 \\ &= \left(\frac{5}{3}\right)^2 + (3-6)^2 \\ &= \frac{25}{9} + 9 \\ &= \frac{106}{9} \end{aligned}$$

Une équation du cercle de centre $B$ et de rayon $[BC]$ est donc $x^2 + (y-6)^2 = \dfrac{106}{9}$.

**2.** passant par $\mathrm{A}$ et de centre $\mathrm{C}$.

Le cercle a pour rayon $[CA]$ avec

$$CA^2 = (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 \quad = \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 + (-1-3)^2 = \frac{1}{9} + 16 = \frac{145}{9}.$$

Une équation du cercle de centre $C$ et de rayon $[CA]$ est donc $\left(x - \dfrac{5}{3}\right)^2 + (y-3)^2 = \dfrac{145}{9}$.

**3.** de diamètre $[\mathrm{AB}]$ : le point $\mathrm{C}$ appartient-il à ce cercle ?

Si le cercle est de diamètre $[AB]$, il est déjà possible de trouver les coordonnées de son centre qui sera le milieu $I$ du segment $[AB]$ : $I\left(\dfrac{x_A + x_B}{2} ; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$, donc $I\left(1 ; \dfrac{5}{2}\right)$.

Le rayon du cercle sera la longueur $AI$ : $AI^2 = (x_I - x_A)^2 + (y_I - y_A)^2 = (1-2)^2 + \left(\dfrac{5}{2} - (-1)\right)^2 \quad = 1 + \dfrac{49}{4} = \dfrac{53}{4}$.

Une équation du cercle de diamètre $[AB]$ est donc $(x-1)^2 + \left(y - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{53}{4}$.

On peut aussi utiliser directement la formule disant que l'équation du cercle de diamètre $[AB]$ est $(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$.

On vérifie si le point $C$ appartient à ce cercle :

$(x_C - 1)^2 + \left(y_C - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{5}{3} - 1\right)^2 + \left(3 - \dfrac{5}{2}\right)^2 = \dfrac{4}{9} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{25}{36} \neq \dfrac{53}{4}$ donc le point $C$ n'appartient pas au cercle de diamètre $[AB]$.

## Correction de l'exercice 26

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$, $B(x_B\ ;\ y_B)$ et $C(x_C\ ;\ y_C)$ trois points distincts et non alignés du plan.
On note G le centre de gravité du triangle ABC.
Démontrer que les coordonnées de G sont :

$$\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\ ;\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

### Corrigé

$G$ est le centre de gravité du triangle donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Si l'on injecte le point $O$ dans cette relation on obtient :

$3\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$ et donc $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$.

Par définition $\overrightarrow{OA}\binom{x_A}{y_A}$ on peut donc en déduire que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\binom{x_A+x_B+x_C}{y_A+y_B+y_C}$ et donc

$\overrightarrow{OG}\left(\begin{array}{c}\frac{x_A+x_B+x_C}{3} \\ \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\end{array}\right)$.

Les coordonnées de $G$ sont donc bien $\left(\dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} ; \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$.

## Correction de l'exercice 27

ABC est un triangle tel que A, B'e t C' sont les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].
On note G le centre de gravité du triangle ABC, puis I et J les milieux respectifs des segments [BG] et [CG].
Montrer que le quadrilatère C'IJB' est un parallélogramme.

### Corrigé

Comme G est centre de gravité, il est aux deux tiers de la médiane, on a donc que $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GC'}$ donc $\frac{1}{2}\overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GC'}$ et donc $\overrightarrow{GJ} = -\overrightarrow{GC'}$.
$G$ est donc le milieu de $[JC']$.
De la même façon on montre que $\overrightarrow{GI} = -\overrightarrow{GB'}$. et donc que $G$ est le milieu de $[IB]$.
Le quadrilatère $C'IJB'$ a ses diagonales qui se coupent en leurs milieux donc c'est un parallélogramme.

Retrouvez le reste de la correction dans le Livre du Professeur.

## Correction de l'exercice 28

On se place dans un triangle ABC rectangle en A.
En utilisant deux méthodes différentes, démontrer que la médiane issue de A mesure la moitié de la longueur du côté [BC].

### Corrigé

Première méthode :
On pose $I$ le milieu de $[BC]$, d'après le théorème de la médiane on a : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$
De plus comme le triangle est rectangle en $A$, d'après le théorème de Pythagore $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
On en déduit que $2AI^2 = BC^2 - \frac{BC^2}{2}$.
D'où $AI^2 = \frac{BC^2}{4}$ et $AI = \frac{BC}{2}$.
Deuxième méthode :
Comme $ABC$ est rectangle en $A$ alors $A$ est un point du cercle de diamètre $[BC]$. Si on note $I$ le milieu de $[BC]$ alors $AI = \frac{1}{2}BC$.

## Correction de l'exercice 29

On considère les points $R(3\ ;\ 5)$, $S(1\ ;\ 10)$ et $T(5\ ;\ 1)$.
Trouver les coordonnées du point T telles que le triangle TRS admette le point G comme centre de gravité.

## Corrigé

Les coordonnées du milieu $M$ de $[RS]$ sont $M(2;7,5)$ . Par définition $G$ est aux deux-tiers du segment $[TM]$ en partant de $A$ on a donc : $\overrightarrow{GT} = -2\overrightarrow{GM}$ .

D'une part $\overrightarrow{GT}\binom{x_T-5}{y_T-1}$ et $\overrightarrow{GM}\binom{-3}{6,5}$

On obtient donc $x_T = 11$ et $y_T = -12$ .