

## Méthode d'Euler

### Énoncé

On veut résoudre l'équation (E) :  $f'(x) = 1 - (f(x))^2$  où  $f$  est une fonction définie et dérivable sur  $[0 ; 1]$  telle que  $f(0) = 0$ . On admet que la solution cherchée est unique. On ne connaît pas l'expression de  $f$  mais on peut construire sa courbe représentative. Pour cela, on va construire une approximation de la courbe de  $f$  par des segments de droites obtenus grâce aux tangentes à la courbe de  $f$ . On choisit un pas  $h > 0$  et on construit une suite de points  $P_n(x_n ; y_n)$  approchant les points  $M_n$  d'abscisse  $x_n$  de  $C_f$ .  
Soit  $h > 0$ . On pose  $x_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+1} = x_n + h$  et  $y_n = f(x_n)$ .

### Questions préliminaires :

1. Déterminer  $y_0$ .

2. Exprimer  $x_1$  en fonction de  $h$  puis  $x_2$  en fonction de  $h$ .

3. Justifier que  $f(x_{n+1}) - f(x_n)$  est proche de  $hf'(x_n)$  lorsque  $h$  est proche de 0.

4. Même si cela reste une approximation, on écrira  $f(x_{n+1}) = f(x_n) + hf'(x_n)$ .  
Démontrer alors que  $y_1 = h$  et  $y_2 = -h^3 + 2h$ .

## Objectif

Résoudre une équation dont l'inconnue est une fonction en utilisant une des deux méthodes.

### Méthode 1 Python

On veut écrire un programme sous Python qui, pour une valeur de  $h$  saisie par l'utilisateur, calcule les coordonnées  $(x_n ; y_n)$  des points  $P_n$ .

1. Déterminer la valeur de  $h$  pour obtenir 21 points répartis équitablement dans l'intervalle  $[0 ; 2]$ .

2. Écrire une fonction **approx** d'arguments  $y_n$  et  $h$  qui retourne la valeur approchée de l'ordonnée du point  $P_{n+1}$ .

3. Écrire une fonction **Euler** d'arguments  $x_0, y_0, nb\_etapes$  et  $h$  qui retourne les abscisses  $x_i$  et les ordonnées  $y_i$  des points cherchés.

### Méthode 2 Tableur

À l'aide d'une feuille de calcul, on construit un tableau donnant les valeurs de  $x_n$  et  $y_n$  où  $n$  est un entier naturel de 0 à 10. On entre la valeur 0 dans les cellules **B2** et **C2** et la valeur de  $h$  dans la cellule **D2**. On choisit  $h = 0,1$ .

1. Quelle formule doit-on entrer en **B3** et en **C3** pour les recopier vers le bas ?

2. Représenter la suite de points  $P_n$ .

### Pour aller plus loin

Dans le film *Les figures de l'ombre* se déroulant dans les années 1960, le personnage principal Katherine Johnson, mathématicienne pour la NASA, utilise la méthode d'Euler pour calculer la trajectoire d'une capsule spatiale qui doit revenir sur Terre.