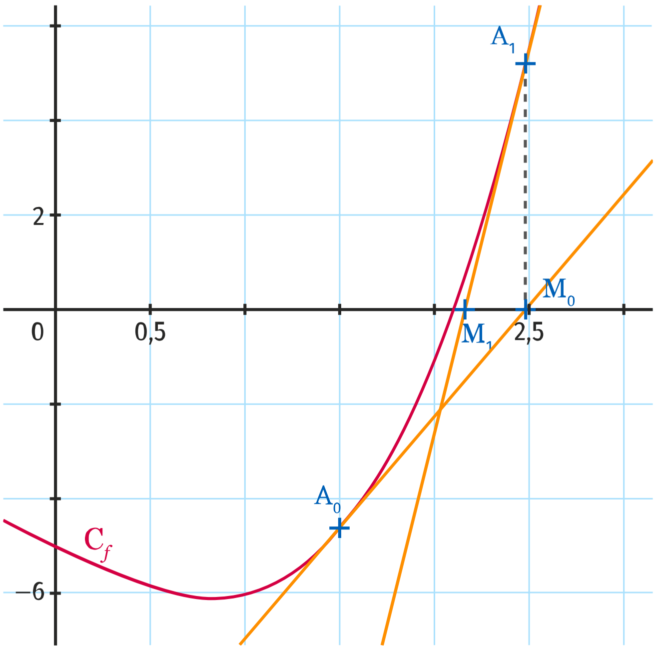
Chapitre 4 | TP / TICE 1

Méthode de Newton

Énoncé

Soit f, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x - 5$. On appelle $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.



Méthode 1 GeoGebra

1. Conjecturer à quel intervalle d'amplitude $0{,}5$ appartient α.

2. À l'aide de GeoGebra, construire $\mathcal{C}_f$, le point A_0 d'abscisse $\dfrac{3}{2}$ de $\mathcal{C}_f$ et tracer la tangente T_0 à $\mathcal{C}_f$ en A_0. Elle coupe l'axe des abscisses en un point M_0.

3. A_1 est le point de $\mathcal{C}_f$ de même abscisse que M_0 et on construit M_1 suivant le même procédé.

4. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-1} des abscisses respectives x_0, x_1 et x_2 de $\mathrm{M}_0, \mathrm{M}_1$ et M_2.

5. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

Méthode 2 Tableur

Soit a un réel de $\mathbb{R}$ et A le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a. On admet que la tangente T à $\mathcal{C}_f$ en A n'est pas parallèle à l'axe des abscisses.

1. Vérifier que le point d'intersection M de T avec l'axe des abscisses a pour abscisse $a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$.

2. À l'aide d'un tableur, construire un tableau donnant les indices i, les abscisses x_i des points A_i, les ordonnées y_i des points A_i et les nombres dérivés $f'(x_i)$: on entre $1{,}5$ en **B2**. Quelles formules faut-il entrer en **C2**, **D2** et **B3** ?

	A	B	C	D	E
1	Indice i	Abscisse xi	Ordonnée yi	Nombre dérivé f'(xi)	
2	0	1,5	-4,625	4,75	
3	1	2,473684211	5,189386208	16,35734072	
4	2	2,156432996	0,7149857709	11,9506098	
5	3	2,096604604	0,0229422931	11,18725259	
6	4	2,094553851	0,0000264437	11,1614675	
7					
8					
9					
10					
11					

3. Recopier les formules vers le bas et donner une valeur arrondie à 10^{-7} de α. À son époque, Newton avait trouvé 2,094 551 48.

Méthode 3 Python

On veut écrire un programme sous Python qui retourne sous forme de liste les différentes valeurs $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pour une valeur de x_0 et une valeur de n données.

1. Écrire sous Python deux fonctions, l'une qui retourne $f(x)$ et l'autre qui retourne $f'(x)$.

2. Compléter la fonction **newton** qui calcule $x_0, x_1, \ldots, x_n$ pour une valeur de x_0 et une valeur de n données.

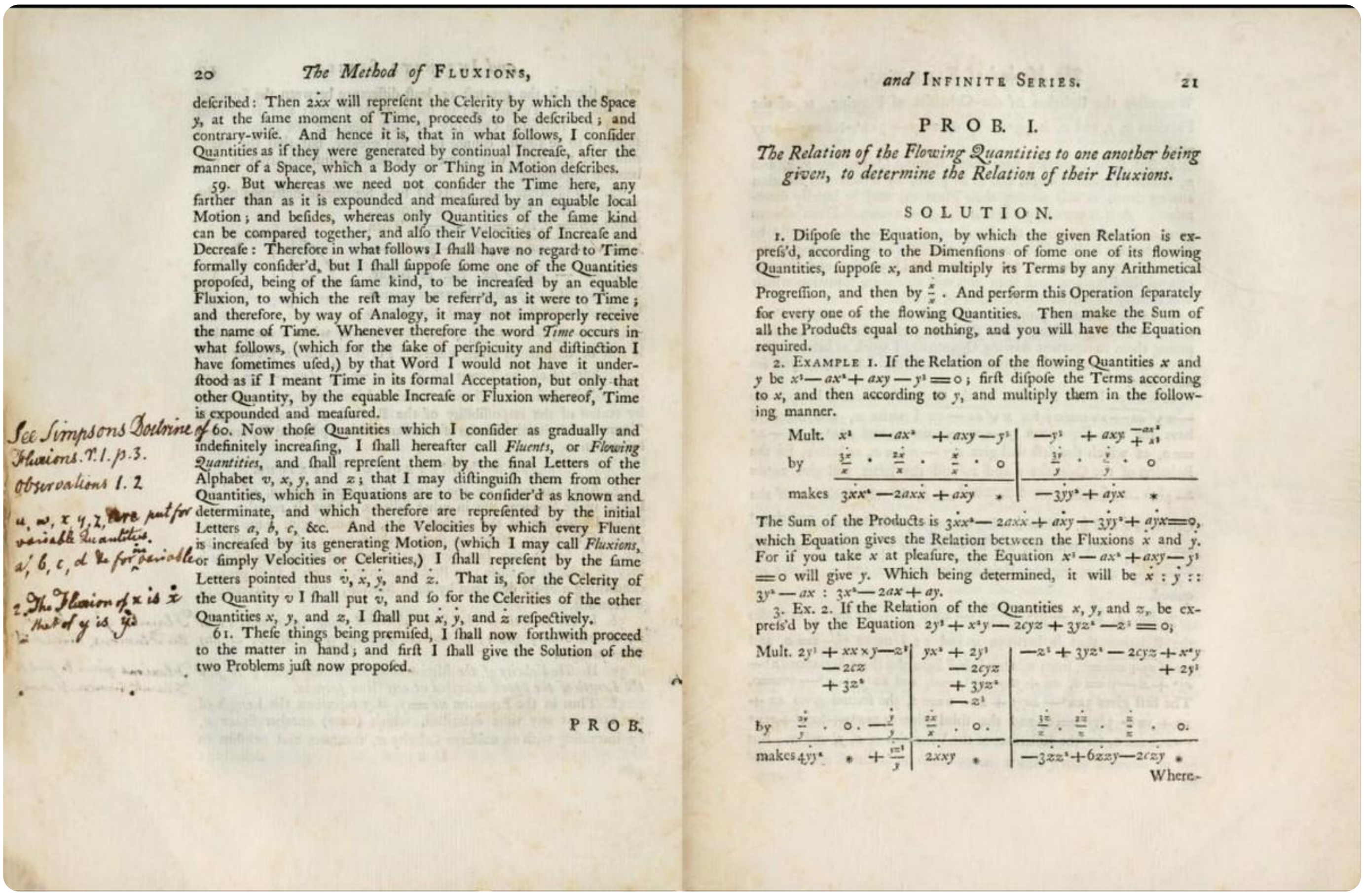
3. Comment utiliser la fonction **affichage** avec la fonction newton pour qu'elle affiche les cinq premières valeurs approchées de la solution de l'équation $f(x) = 0$?

Histoire des maths

ſur les Equations en Nombres, eſt extrêmement embaraſſé, & chargé d'Opérations ſuperfluës; de ſorte qu'on ne peut prendre ſur cela un bon Modele pour faire les mêmes Opérations en Eſpeces. Je ferai donc voir d'abord comment ſe doit faire en Nombres la Reduction des Equations Affectées, & enſuite j'appliquerai la Methode aux Eſpeces.

XX. Soit l'Equation $y^3 - 2y - 5 = 0$ à reduire en ſuite infinie, prenez un Nombre comme 2, qui ne differe pas d'une de ſes dixiemes Parties de la vraie valeur de la Racine, & faites $2 + p = y$, ſubſtituez $2 + p$ pour y dans l'Equation donnée, & vous aurez $p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$, dont il faut chercher la Racine pour l'ajoûter au Quotient; rejettez $p^3 + 6p^2$ à cauſe de ſa petiteſſe, il reſtera $10p - 1 = 0$, ou $p = 0{,}1$, ce qui eſt très-près de la vraie valeur de p; c'eſt pourquoi l'écrivant au Quotient, je fais $0{,}1 + q = p$, & ſubſtituant comme auparavant, j'ai $q^3 + 6{,}3q^2 + 11{,}23q + 0{,}061 = 0$, négligeant les deux premiers Termes, il reſte $11{,}23q + 0{,}061 = 0$, ou $q = -0{,}0054$ à peu près (& cela en diviſant 0,061 par 11,23 juſqu'à ce qu'on ait autant de Figures qu'il y a de places entre les premieres Figures de ce Quotient & le principal Quotient excluſivement, comme ici où il a deux places entre 2 & 0,005) J'écris donc $-0{,}0054$ dans le Quotient, mais au-deſſous parce que ce Terme eſt Négatif; & ſuppoſant $-0{,}0054 + r = q$, je ſubſtitue comme auparavant, & je continue ainſi l'Opération auſſi long-tems qu'il convient, comme on le peut voir ci-deſſous.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+ 2{,}10000000$ $- 0{,}00544852$ $+ 2{,}09455148$, &c. $= y$
$2 + p = y$	$+ y^3$ $- 2y$ $- 5$	$+ 8 + 12p + 6p^2 + p^3$ $- 4 - 2p$ $- 5$
SOMME.		$- 1 + 10p + 6p^2 + p^3$
$0{,}1 + q = p$	$+ p^3$ $+ 6p^2$ $+ 10p$ $- 1$	$+ 0{,}001 + 0{,}03q + 0{,}3q^2 + q^3$ $+ 0{,}06 + 1{,}2 + 6$ $+ 1, + 10,$ $- 1,$
SOMME.		$+ 0{,}061 + 11{,}23q + 6{,}3q^2 + q^3$
$- 0{,}0054 + r = q.$	$+ q^3$ $+ 6{,}3q^2$ $+ 11{,}23q$ $+ 0{,}061$	$- 0{,}000000157464 + 0{,}00008748r - 0{,}0162r^2 + r^3$ $+ 0{,}000183708 - 0{,}06804 + 6{,}3$ $- 0{,}060642 + 11{,}23$ $+ 0{,}061$
SOMME.		$+ 0{,}0005416 + 11{,}162r$
$- 0{,}00004852 + s = r$		



20 *The Method of* FLUXIONS,

deſcribed: Then $2\dot{x}x$ will repreſent the Celerity by which the Space y, at the ſame moment of Time, proceeds to be deſcribed; and contrary-wiſe. And hence it is, that in what follows, I conſider Quantities as if they were generated by continual Increaſe, after the manner of a Space, which a Body or Thing in Motion deſcribes.

59. But whereas we need not conſider the Time here, any farther than as it is expounded and meaſured by an equable local Motion; and beſides, whereas only Quantities of the ſame kind can be compared together, and alſo their Velocities of Increaſe and Decreaſe: Therefore in what follows I ſhall have no regard to Time formally conſider'd, but I ſhall ſuppoſe ſome one of the Quantities propoſed, being of the ſame kind, to be increaſed by an equable Fluxion, to which the reſt may be referr'd, as it were to Time; and therefore, by way of Analogy, it may not improperly receive the name of Time. Whenever therefore the word *Time* occurs in what follows, (which for the ſake of perſpicuity and diſtinction I have ſometimes uſed,) by that Word I would not have it underſtood as if I meant Time in its formal Acceptation, but only that other Quantity, by the equable Increaſe or Fluxion whereof, Time is expounded and meaſured.

See Simpsons Doctrine of Fluxions. V. 1. p. 3. observations 1. 2

u, w, x, y, z, are put for variable Quantities.

a, b, c, d &c for invariable

2. The Fluxion of x is $\dot{x}$ that of y is $\dot{y}$

60. Now thoſe Quantities which I conſider as gradually and indefinitely increaſing, I ſhall hereafter call *Fluents*, or *Flowing Quantities*, and ſhall repreſent them by the final Letters of the Alphabet v, x, y, and z; that I may diſtinguiſh them from other Quantities, which in Equations are to be conſider'd as known and determinate, and which therefore are repreſented by the initial Letters a, b, c, &c. And the Velocities by which every Fluent is increaſed by its generating Motion, (which I may call *Fluxions*, or ſimply Velocities or Celerities,) I ſhall repreſent by the ſame Letters pointed thus $\dot{v}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$. That is, for the Celerity of the Quantity v I ſhall put $\dot{v}$, and ſo for the Celerities of the other Quantities x, y, and z, I ſhall put $\dot{x}$, $\dot{y}$, and $\dot{z}$ reſpectively.

61. Theſe things being premiſed, I ſhall now forthwith proceed to the matter in hand; and firſt I ſhall give the Solution of the two Problems juſt now propoſed.

PROB.

and INFINITE SERIES. 21

PROB. I.

The Relation of the Flowing Quantities to one another being given, to determine the Relation of their Fluxions.

SOLUTION.

1. Diſpoſe the Equation, by which the given Relation is expreſs'd, according to the Dimenſions of ſome one of its flowing Quantities, ſuppoſe x, and multiply its Terms by any Arithmetical Progreſſion, and then by $\frac{\dot{x}}{x}$. And perform this Operation ſeparately for every one of the flowing Quantities. Then make the Sum of all the Products equal to nothing, and you will have the Equation required.

2. EXAMPLE 1. If the Relation of the flowing Quantities x and y be $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$; firſt diſpoſe the Terms according to x, and then according to y, and multiply them in the following manner.

$$\begin{array}{l|l}
\text{Mult. } x^3 - ax^2 + axy - y^3 & -y^3 + axy \begin{smallmatrix}-ax^2\\+x^3\end{smallmatrix} \\
\text{by } \frac{3\dot{x}}{x} . \frac{2\dot{x}}{x} . \frac{\dot{x}}{x} . 0 & \frac{3\dot{y}}{y} . \frac{\dot{y}}{y} . 0 \\
\hline
\text{makes } 3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y \; * & -3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x \; *
\end{array}$$

The Sum of the Products is $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 + a\dot{y}x = 0$, which Equation gives the Relation between the Fluxions $\dot{x}$ and $\dot{y}$. For if you take x at pleaſure, the Equation $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$ will give y. Which being determined, it will be $\dot{x} : \dot{y} :: 3y^2 - ax : 3x^2 - 2ax + ay$.

3. Ex. 2. If the Relation of the Quantities x, y, and z, be expreſs'd by the Equation $2y^3 + x^2y - 2cyz + 3yz^2 - z^3 = 0$;

$$\begin{array}{l|l|l}
\text{Mult. } 2y^3 + xx \times y - z^3 & yx^2 + 2y^3 & -z^3 + 3yz^2 - 2cyz + x^2y \\
\quad -2cz & \quad -2cyz & \quad +2y^3 \\
\quad +3z^2 & \quad +3yz^2 & \\
 & \quad -z^3 & \\
\text{by } \frac{2\dot{y}}{y} . 0 . -\frac{\dot{y}}{y} & \frac{2\dot{x}}{x} . 0 . & \frac{3\dot{z}}{z} . \frac{2\dot{z}}{z} . \frac{\dot{z}}{z} . 0. \\
\hline
\text{makes } 4\dot{y}y^2 \; * + \frac{\dot{y}z^3}{y} & 2\dot{x}xy \; * & -3\dot{z}z^2 + 6\dot{z}zy - 2c\dot{z}y \; *
\end{array}$$

Where-

L'équation de ce TP a été étudiée par **Isaac Newton** dans son livre *La méthode des fluxions, et les suites infinies* (1736).

Objectif

Obtenir des valeurs approchées de α en utilisant une des trois méthodes.