Math93.com

TD 1 - 1re Spé Maths
Dérivation Partie 1

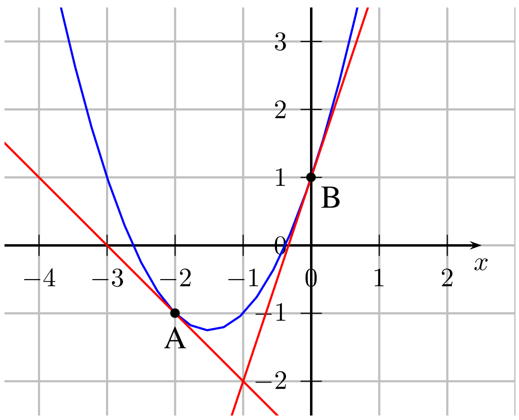
SCAN ME

Table des matières

Partie I. Nombre dérivé, tangente et lectures graphiques

Exercice 1. Lecture graphique puis calculs (c)

On a tracé $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B d'abscisses respectives -2 et 0. Lire les nombres dérivés $f'(-2)$ et $f'(0)$ et déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ aux points A et B.



1. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(-2) = \cdots\cdots$$

2. Équation de T_{-2}, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A(-2\ ;\ -1)$:

$$T_{-2}\ :\ y = \cdots\cdots$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(0) = \cdots\cdots$$

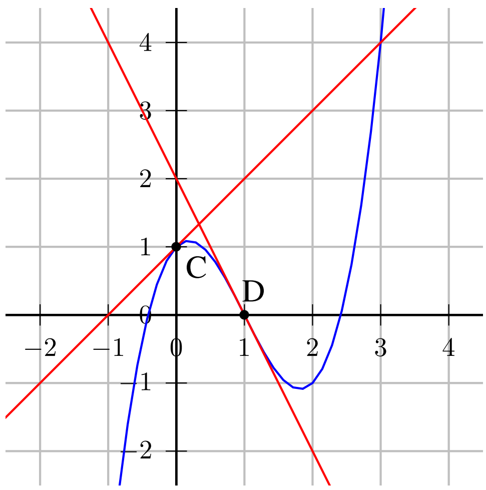
4. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $B(0\ ;\ 1)$:

$$T_0\ :\ y = \cdots\cdots$$

5. f est en fait la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1$.
6. Déterminer les coordonnées du sommet S de cette parabole ainsi que l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en S.

Exercice 2. Lecture graphique puis calculs (c)

On a tracé $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à $\mathscr{C}_g$ aux points C et D d'abscisses respectives 0 et 1. Lire les nombres dérivés $g'(0)$ et $g'(1)$ et déterminer l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ aux points C et D.



1. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(0) = \cdots\cdots$$

2. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $C(0\ ;\ 1)$:

$$T_0\ :\ y = \cdots\cdots$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(1) = \cdots\cdots$$

4. Équation de T_1, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $D(1\ ;\ 0)$:

$$T_1\ :\ y = \cdots\cdots$$

5. g est en fait la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$. On pourra retrouver les résultats des premières questions plus tard.

Exercice 3. Équation de la tangente (c)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 3\sqrt{x}$.

On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on donne $f'(1) = \dfrac{3}{2}$ et $f'(2) = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

Déterminer l'équation réduite de chacune des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 1 et 2.

Partie II. Nombre dérivé et Taux d'accroissement

Exercice 4. Taux d'accroissement

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

1. Soit h un réel non nul. Exprimer $f(2+h) - f(2)$ en fonction de h.
2. Calculer le taux d'accroissement de f en 2.
3. Montrer que f est dérivable en 2 et donner la valeur du nombre dérivé de f en 2.
4. Vérifier le résultat à la calculatrice.

Exercice 5. Taux d'accroissement et nombre dérivé

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

1. a. Montrer que pour tout réel h, le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est :

$$t_f(h) = 2a + h - 3$$

1. b. En déduire le nombre dérivé de f en a.

1. c. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x^2 + x + 1$.

2. a. Montrer que pour tout réel h, le taux d'accroissement de g entre a et $a + h$ est :

$$t_g(h) = -4a - 2h + 1$$

2. b. En déduire le nombre dérivé de g en a.

2. c. Déterminer l'équation de la tangente T' à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse -2.

3. On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $k(x) = \dfrac{x+3}{x-2}$.

3. a. Montrer que pour tout réel h, le taux d'accroissement de k entre 1 et $1 + h$ est :

$$t_k(h) = \frac{5}{h-1}$$

3. b. En déduire le nombre dérivé de k en 1.

3. c. Déterminer l'équation de la tangente T'' à $\mathscr{C}_k$ au point d'abscisse 1.

Réponses
$f'(a) = 2a - 3$; $T \ : \ y = -5x$
$g'(a) = -4a + 1$; $T' \ : \ y = 9x + 9$
$k'(1) = -5$; $T'' \ : \ y = 1 - 5x$

Partie III. Dérivation avec les formules du cours

Exercice 6. Calcul de dérivée de fonction avec les formules du cours

En appliquant les formules du cours, démontrer que les dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur I, sont bien celles données et calculer l'équation de la tangente T_a à $\mathscr{C}_f$ en $A\left(a\ ;\ f(a)\right)$.

I	f définie par	Dérivée de f	Équation de la tangente T_a en $A\left(a\ ;\ f(a)\right)$
$\mathbb{R}$	$f_1(x) = x^2 - 3x + 4$	$f_1'(x) = 2x - 3$	$(a = 3)\ T_3\ :\ y = 3x - 5$
$\mathbb{R}$	$f_2(x) = -3x^2 - x$	$f_2'(x) = -6x - 1$	$(a = 3)\ T_3\ :\ y = -19x + 27$
$\mathbb{R}$	$f_3(x) = (2x + 1)^2$	$f_3'(x) = 8x + 4$	$(a = 1)\ T_1\ :\ y = 12x - 3$
$\mathbb{R}$	$f_4(x) = (1 - 3x)^2$	$f_4'(x) = 18x - 6$	$(a = 0)\ T_0\ :\ y = -6x + 1$
$\mathbb{R}$	$f_5(x) = (-x - 2)^2 - (-2x + 1)^2$	$f_5'(x) = -6x + 8$	$(a = 0)\ T_0\ :\ y = 8x + 3$
$\mathbb{R}$	$f_6(x) = 2x^3 - 4x^2 + x - 1$	$f_6'(x) = 6x^2 - 8x + 1$	$(a = -1)\ T_{-1}\ :\ y = 15x + 7$
$\mathbb{R}$	$f_7(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x + \dfrac{\sqrt{\pi}}{5}$	$f_7'(x) = x^2 + x + 1$	$(a = 0)\ T_0\ :\ y = x + \dfrac{\sqrt{\pi}}{5}$
$\mathbb{R}$	$f_8(x) = \dfrac{2}{3}x^3 + x^2 + \dfrac{x}{2}$	$f_8'(x) = 2x^2 + 2x + \dfrac{1}{2}$	$(a = 0)\ T_0\ :\ y = \dfrac{x}{2}$
$\mathbb{R}$	$f_9(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^3$	$f_9' = 3(2x + 1)(x^2 + x + 1)^2$	$(a = 1)\ T_1\ :\ y = 81x - 54$
$\mathbb{R}$	$f_{10}(x) = \dfrac{2}{x^2 + 1}$	$f_{10}' = \dfrac{-4x}{(x^2 + 1)^2}$	$(a = 1)\ T_1\ :\ y = 2 - x$
$\mathbb{R} \setminus \{1\}$	$f_{11}(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$	$f_{11}'(x) = \dfrac{-2}{(x - 1)^2}$	$(a = 0)\ T_0\ :\ y = -2x - 1$
$\mathbb{R}$	$f_{12}(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$	$f_{12}' = \dfrac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2}$	$(a = 1)\ T_1\ :\ y = \dfrac{2}{3}$
$\left]-\dfrac{1}{3}\ ;\ +\infty\right[$	$f_{13}(x) = \sqrt{3x + 1}$	$f_{13}' = \dfrac{3}{2\sqrt{3x + 1}}$	$(a = 1)\ T_1\ :\ y = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}$
$\mathbb{R}$	$f_{14}(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$	$f_{14}' = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$	$(a = 1)\ T_1\ :\ y = 1$

Exercice 7. (c) - Dérivées de fonctions de la forme $u \times v$ (c)

I	f de la forme	Dérivée de f	Notation « abusive »
I	$u \times v$	$u'v + uv'$	$(uv)' = u'v + uv'$

1. Soit f définie sur I par :

$$f(x) = (x^3 + 5x^2 + 1)(2x^2 - 1)$$

2. Donner l'ensemble de dérivabilité de f.

3. Calculer la dérivée de f de 2 façons :

3. a. En utilisant la formule de la dérivée du produit ;

3. b. En développant f d'abord puis en dérivant.

Exercice 8. (c) - Dérivées de fonctions de la forme $\frac{u}{v}$ et $\frac{1}{v}$ (c)

I	f de la forme	Dérivée de f	Notation « abusive »
I avec v non nul sur I	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
I avec v non nul sur I	$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2}$

1. Soit f définie sur I par :

$$f(x)=\frac{x^2-3}{x^2+1}$$

1. a. Montrer que f est définie sur $I=\mathbb{R}$.

1. b. Donner l'ensemble de dérivabilité de f.

1. c. Calculer la dérivée de f.

2. Soit g définie sur I par :

$$g(x)=\frac{-7}{x^2+x+1}$$

2. a. Montrer que g est définie sur $I=\mathbb{R}$.

2. b. Donner l'ensemble de dérivabilité de g.

2. c. Calculer la dérivée de g.

3. Soit h définie sur I par :

$$h(x)=\frac{1-5x^2}{x^2+x}$$

3. a. Déterminer l'ensemble de définition de h.

3. b. Donner l'ensemble de dérivabilité de h.

3. c. Calculer la dérivée de h.

Exercice 9. Avec $\sqrt{u}$

f définie sur I	f de la forme	Dérivée de f	Notation « abusive »	f dérivable sur J
I avec u positif non nul sur I	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$J \subseteq I$ sur lequel u est positif et non nul

Remarque

La fonction racine carrée a la particularité d'être définie sur $\mathbb{R}_+$ mais elle n'est pas dérivable en 0, elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On va donc ici :

- résoudre l'inéquation $u(x) = 1 - 3x \geqslant 0$ pour l'ensemble de définition ;
- résoudre et l'inéquation $u(x) = 1 - 3x > 0$ pour l'ensemble de dérivabilité.

On considère la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = \sqrt{1 - 3x}$$

1. Déterminer I, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer J, l'ensemble de dérivabilité de f.
3. Déterminer la dérivée de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.
5. La courbe représentative de cette fonction admet-elle des tangentes horizontales ?

Exercice 10. * Sur le même modèle

On considère la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = \frac{2}{x - 2} + \sqrt{2x + 1}$$

1. Déterminer I, l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer J, l'ensemble de dérivabilité de f.
3. Déterminer la dérivée de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 11. * Avec la racine carrée

On considère la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$$

1. Déterminer I, l'ensemble de définition de f.

2. Déterminer J, l'ensemble de dérivabilité de f.

3. Déterminer la dérivée de f.

4. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

5. La courbe représentative de cette fonction admet-elle des tangentes horizontales ? Si oui donnez les abscisses de ces points.

Exercice 12. Avec u^2 et les tangentes horizontales

f définie sur I	f de la forme	Dérivée de f	Notation « abusive »	f dérivable sur J
I	u^n où $n \in \mathbb{N}^*$	$n\, u'\, u^{n-1}$	$(u^n)' = n\, u^{n-1} \times u'$	I

On considère la fonction f définie sur I par

$$f(x) = (1 - 2x - 3x^2)^2$$

1. Déterminer I, l'ensemble de définition de f et son ensemble de dérivabilité.
2. Déterminer la dérivée de f.
3. Déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ qui admettent une tangente horizontale.

Partie IV. Des problèmes de tangentes

Exercice 13. Une histoire de tangentes (c)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\,x^2 - 2x + 1$$

1. Déterminer la dérivée de f.

2. Montrer que l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 est :

$$y = -2x + \frac{7}{6}$$

3. Déterminer les coordonnées des points A et B de $\mathscr{C}_f$ qui admettent une tangente horizontale.

4. Déterminer les coordonnées des points $\mathscr{C}_f$ qui admettent une tangente parallèle à T.

Réponses
$A\left(1\ ;\ -\frac{1}{6}\right)$; $B\left(-2\ ;\ \frac{13}{3}\right)$; $C_1\,(0\ ;\ 1)$; $C_2\,(-1\ ;\ f(-1))$

Exercice 14. Tangentes horizontales ? (c)

On considère la fonction f définie sur I par

$$f(x) = \frac{1-2x}{x^2-5x+6}$$

1. Déterminer I, l'ensemble de définition de f et son ensemble de dérivabilité.
2. Montrer que la dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{2x^2-2x-7}{(x^2-5x+6)^2}$$

3. Montrer que l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est :

$$y = -1,75x + 1,25$$

4. Déterminer les abscisses des points A et B de $\mathscr{C}_f$ qui admettent une tangente horizontale.

Réponses

$x_A = \dfrac{1-\sqrt{15}}{2}$; $x_B = \dfrac{1+\sqrt{15}}{2}$

Exercice 15. Tangentes parallèles(c)

On considère fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + x \ ; \ g(x) = -x^2 - 3x + 7$$

1. Calculer les dérivées des deux fonctions.

2. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
Préciser les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, les courbes représentatives des fonctions f et g.

3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5.

4. Montrer qu'en leurs points d'abscisses $-\dfrac{2}{3}$, les tangentes respectives aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont parallèles.

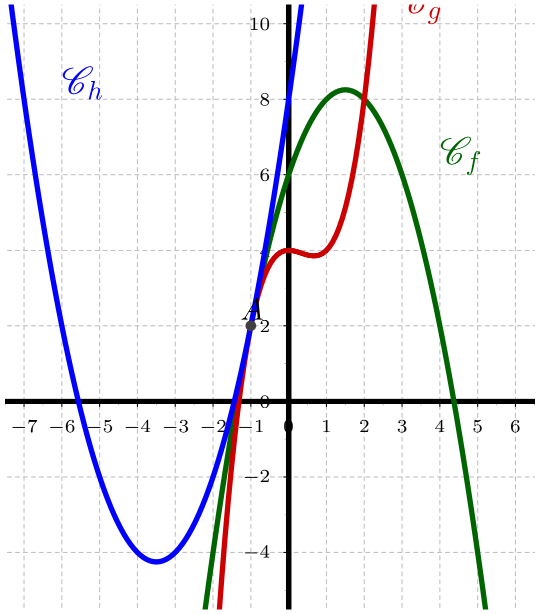
Réponses
$f'(x) = 4x + 1 \ ; \ g'(x) = -2x - 3$
$A\,(1\ ;\ 3)\ ;\ B\left(-\dfrac{7}{3}\ ;\ \dfrac{77}{9}\right)\ ;\ T\ :\ y = 21x - 50$

Exercice 16. Tangente commune à 3 courbes

On considère f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par (link Geogebra) :

$$f(x) = -x^2 + 3x + 6\ ;\ g(x) = x^3 - x^2 + 4 \text{ et } h(x) = x^2 + 7x + 8$$

1. Montrer que les trois courbes représentatives de ces fonctions passent par le point $A\,(-1\ ;\ 2)$.
2. Montrer qu'elles admettent en ce point une tangente commune d'équation $y = 5x + 7$.



Partie V. Coût marginal (Marginal Cost)

Exercice 17. Coût marginal (Marginal Cost) - DM

Définition 1 (Coût Marginal (Marginal Cost))

En économie, le coût marginal pour une quantité q produite, est le coût de fabrication d'une unité supplémentaire, soit le coût de la $(q+1)^e$ unité :

$$C_m(q) = C(q+1) - C(q)$$

Remarque : L'analyse microéconomique classique est dite marginaliste : elle considère que les chefs d'entreprise rationnels ne doivent produire que lorsque que le prix de vente est supérieur au coût marginal.
La théorie microéconomique préconise d'augmenter des volumes de production jusqu'au niveau pour lequel le coût marginal égale le prix de vente des produits.
Tant que le prix de vente est supérieur au coût marginal, chaque unité nouvelle produite par une entreprise augmente son profit total.
En réalité, le profit total réalisé par une entreprise sera maximum pour un volume de production qui permettra d'assurer l'égalité stricte entre le coût de la dernière unité produite (le coût marginal) et le prix de vente de cette unité.

Le coût de production, exprimé en centaines d'euros, pour q objets produits est donné pour q positif par :

$$C(q) = 0,01q^2 + 2q + 1,5$$

1. Montrer que le coût marginal $C_m(q)$ est égal à :

$$C_m(q) = 0,02q + 2.01$$

2. Une approximation classique.

Propriété 1

Le coût marginal est souvent approché par la dérivée de la fonction coût total si cette dernière est bien dérivable .
On a alors dans l'ensemble de définition :

$$C_m(q) \approx C'(q)$$

Calculer ici la dérivée de la fonction coût total $C'(q)$.

3. Calculer le coût marginal correspondant à la fabrication de 1 000 objets par la formule puis par sont approximation mathématique. Quelle est l'erreur commise ?

4. Quand on remplace $C_m(q)$ par $C'(q)$, on commet une erreur $E(q) = C'(q) - C_m(q)$.
Montrer que $E(q) = -0,01$.

Exercice 18. Coût marginal

Dans une usine de fabrication, le coût de production, en euros, pour la fabrication de q appareils (en centaines) est donné par :

$$C(q) = q^3 - 40q^2 + 600q + 400$$

1. Montrer que le coût marginal $C_m(q) = C(q+1) - C(q)$ est égal à :

$$C_m(q) = 3q^2 - 77q + 561$$

Aide : On donne la formule $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

2. Mathématiquement le coût marginal est approché par la dérivée de la fonction coût total, soit par $C'(q)$. Calculer $C'(q)$.

3. Quand on remplace $C_m(q)$ par $C'(q)$, on commet une erreur $E(q) = C'(q) - C_m(q)$. Montrer que $E(q) = 39 - 3q$.

4. Montrer que pour une production de 100 000 appareils (1 000 centaines), l'erreur commise est d'environ $-0,0003\%$.

5. Sur votre calculatrice, tracer les courbes des fonctions C' et C_m. Vérifier que l'approximation est bien légitime.

Exercice 19. Coût marginal - DM

Le coût de fabrication d'une eau de toilette, en euros, est donné par :

$$C(v) = v^3 - 20v^2 + 300v + 200$$

où v désigne le volume, en litres, d'eau de toilette fabriquée. Le prix de vente du produit est de 200 euros par litre.

1. En utilisant l'approximation usuelle, montrer que le coût marginal de fabrication peut être assimilé à

$$C_m(v) \approx 3v^2 - 40v + 300$$

2. Combien de litres faut-il produire pour que le coût marginal soit égal au prix de vente unitaire ?

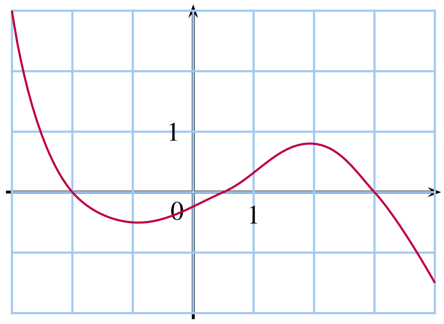
3. Déterminer le revenu R obtenu pour la vente de v litres.

4. Représenter graphiquement les fonctions C et R. On prendra $0 \leqslant v \leqslant 20$ et $0 \leqslant y \leqslant 6\,000$.
Interpréter graphiquement le résultat de la question **2.**

Partie VI. Bilan

Exercice 20. (c) - Graphiquement

Voici la courbe représentative, dans un repère, d'une fonction h dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
Déterminer graphiquement le signe de :



a. $h(0)$

b. $h'(0)$

c. $h(-3)$

d. $h'(-3)$

e. $h(2,5)$

f. $h'(2,5)$

Exercice 21. (c) - Vrai ou Faux

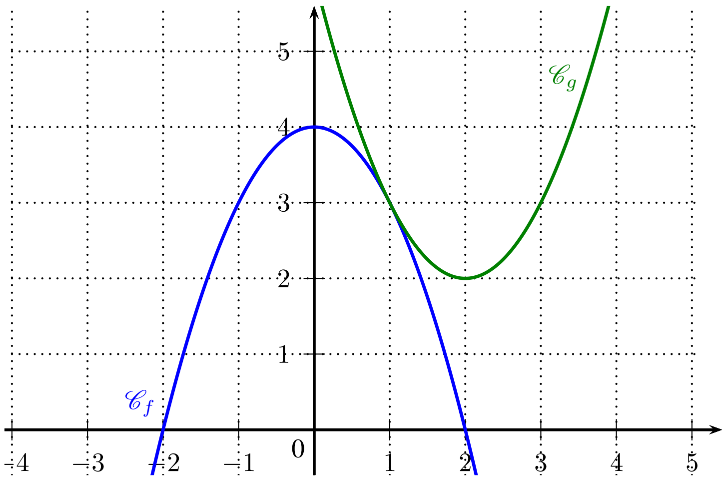
La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. « Si $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(1\ ;\ 2)$ est parallèle à l'axe des abscisses. »

2. « Si la droite d'équation $y = 2x + 3$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(0\ ;\ 3)$, alors $f'(0) = 3$. »

3. « Si $f(2) = 1$ et $f'(2) = 1$, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(2\ ;\ 1)$ a pour équation $y = x - 1$. »

Exercice 22. Tangente commune (c)



On considère les fonction f et g définies par $f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = x^2 - 4x + 6$ et dérivables sur $\mathbb{R}$. On note leur courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. On appelle A le point de coordonnées $(1\ ;\ 3)$.

1. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent une tangente commune T en A.

2. Donner l'équation réduite de la tangente T et la tracer après avoir reproduit le repère.

Exercice 23. Tangentes parallèles à une droite(c)

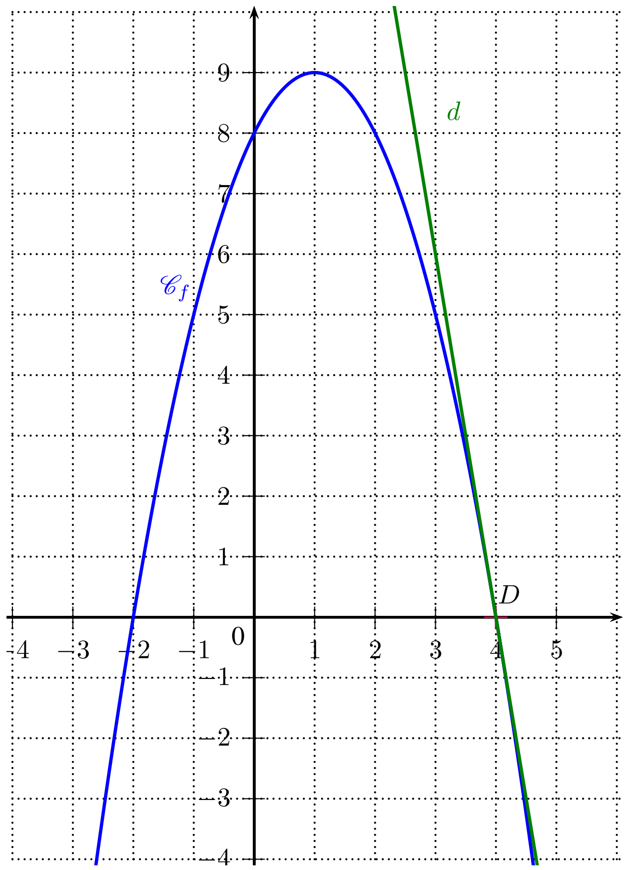
On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 - 4x$$

et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la droite d d'équation $y = -x + 1$.

Démontrer que la courbe représentative de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d en des points que l'on déterminera.

Exercice 24. Position relative par rapport à une tangente (c)



On considère la courbe représentative $\mathbb{C}_f$ de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 8$ et dérivable sur $\mathbb{R}$. Soient D le point de $\mathbb{C}_f$ d'abscisse 4 et d la tangente en D à la courbe $\mathbb{C}_f$.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente d.

2. Étudier la position relative de la courbe $\mathbb{C}_f$ par rapport à sa tangente d.

Partie VII. Projet sous Python et tableur

Exercice 25. La Méthode de Newton

Faire le TP page 116 du Livre Scolaire : Méthode de Newton (link)

Exercice 26. La Méthode de d'Euler

Faire le TP page 117 du Livre Scolaire : Méthode d'Euler (link)

Partie VIII. AP Calculus AB/BC

Voici une série d'exercices de Calculus (niveau AB/BC américain) sur la dérivation, les tangentes et autres concepts similaires.

Exercice 27. (c) Derivative and Tangent Line

Find the equation of the tangent line to the curve $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ at the point where $x = 2$.

Exercice 28. (c) Critical Points

Determine the critical points of the function $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$.

Exercice 29. (c) Optimization Problem

Find the dimensions of a rectangle with a perimeter of 24 units that maximize the area.

Partie IX. Now We Can Talk !

Exercice 30. * Avec la racine carrée

On considère la fonction f définie sur I par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x + 6}}$$

1. Déterminer I, l'ensemble de définition de f.

2. Déterminer J, l'ensemble de dérivabilité de f.

3. Déterminer la dérivée de f.

4. Déterminer l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

5. La courbe représentative de cette fonction admet-elle des tangentes horizontales ? Si oui donnez les abscisses de ces points.

Exercice 31. ** Problème ouvert (c)

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$du plan.

On sait que $\mathscr{C}_f$ passe par le point A d'abscisse 1 de l'axe des abscisses et par le point B d'ordonnée 3 de l'axe des ordonnées. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est égal à -5.

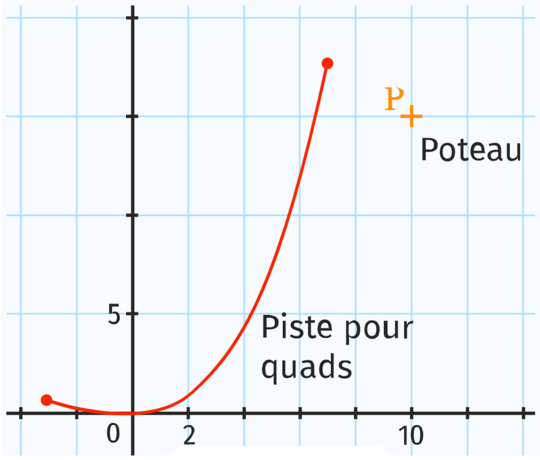
Déterminer la forme développée de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 32. ** (ex.104)

Problème ouvert : Une portion d'une piste pour quads est modélisée dans un repère orthogonal par la fonction f définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 6]$ par

$$f(x) = \frac{3}{100}x^3 + \frac{3}{20}x^2.$$

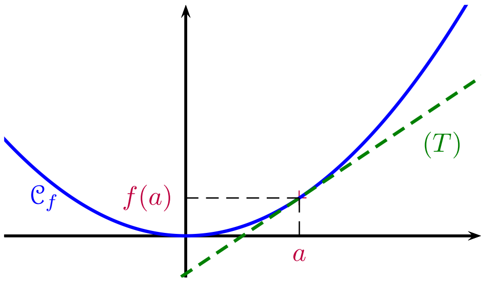
Un jeune conducteur, téméraire et imprudent, est sorti de la piste et a continué sur sa lancée en suivant une trajectoire rectiligne définie par la tangente à la courbe de f.



Sachant qu'il a heurté un poteau, sans se blesser, situé au point de coordonnées $(10\,;15)$, déterminer une valeur approchée à 10^{-2} des coordonnées du point où il a quitté la piste.

Exercice 33. *** Convexité (c)

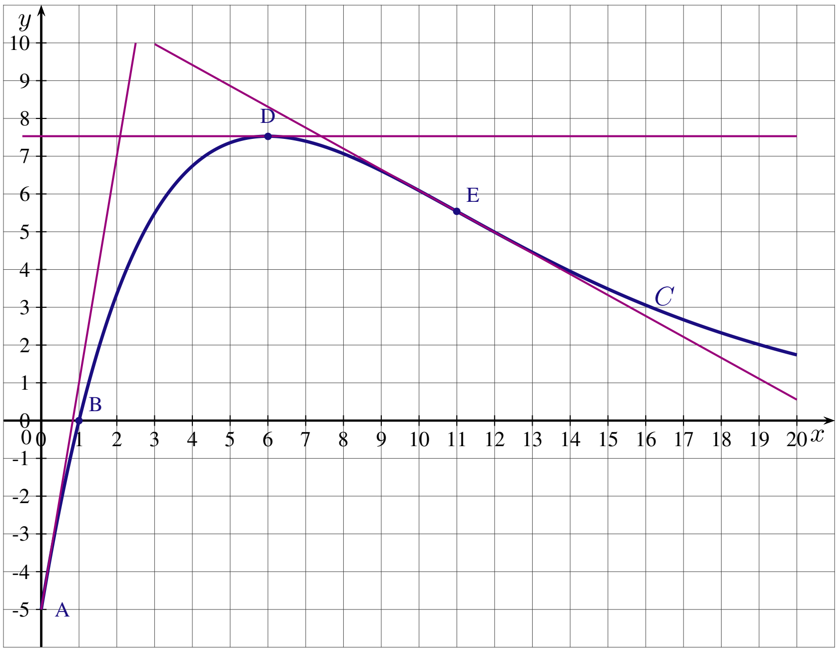
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On dit que la fonction carré f est convexe, car sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes. Le démontrer.



Partie X. Point Bac : lectures graphiques

Exercice 34. Bac ES Antilles Guyane juin 2013

On a représenté ci-dessous, dans le plan muni d'un repère orthonormal, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,20]$. On a tracé les tangentes à la courbe C aux points A, D et E d'abscisses respectives 0 ; 6 et 11. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

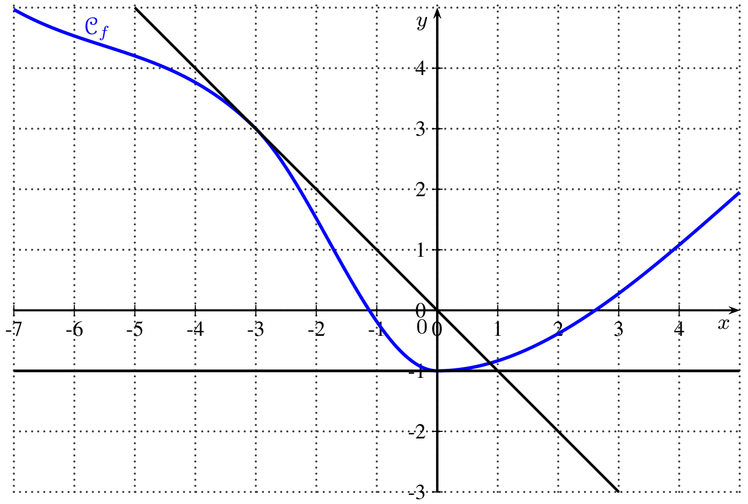


Par lecture graphique (aucune justification n'est demandée) : Donner les valeurs exactes de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(6)$.

Exercice 35. Bac ES Liban, 31 mai 2016

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre propositions est exacte.
Indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.

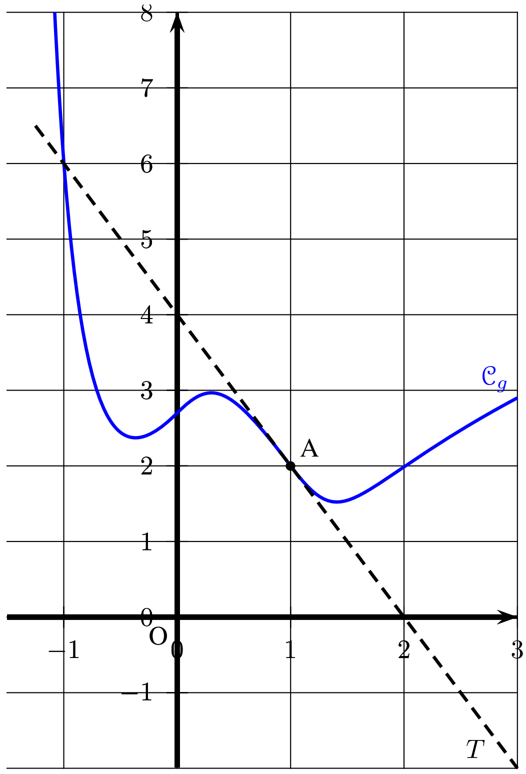
La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.



a. $f'(0) = -1$ **b.** $f'(-1) = 0$ **c.** $f'(-3) = -1$ **d.** $f'(-3) = 3$

Exercice 36. Bac ES Polynésie, 10 juin 2013

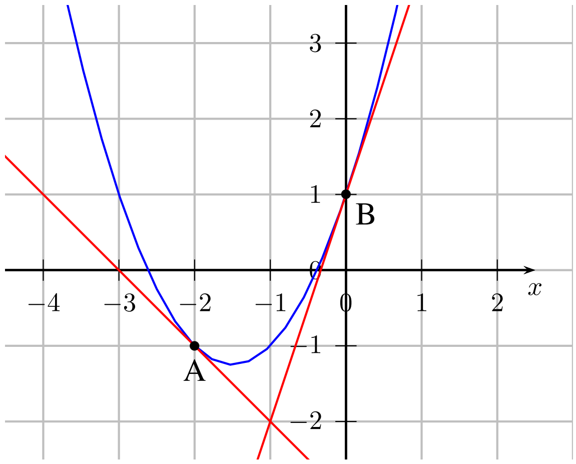
Indiquer si l'affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.
On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_g$ d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$. On admet que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on rappelle que g' désigne la fonction dérivée de la fonction g. On a tracé en pointillé la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point A de cette courbe, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.



Affirmation D : $g'(1) = -2$.

Partie XI. Correction

Correction de l'exercice 1



1. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(-2) = \cdots\cdots$$

2. Équation de T_{-2}, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $A(-2\ ;\ -1)$:

$$T_{-2}\ :\ y = \cdots\cdots$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$f'(0) = \cdots\cdots$$

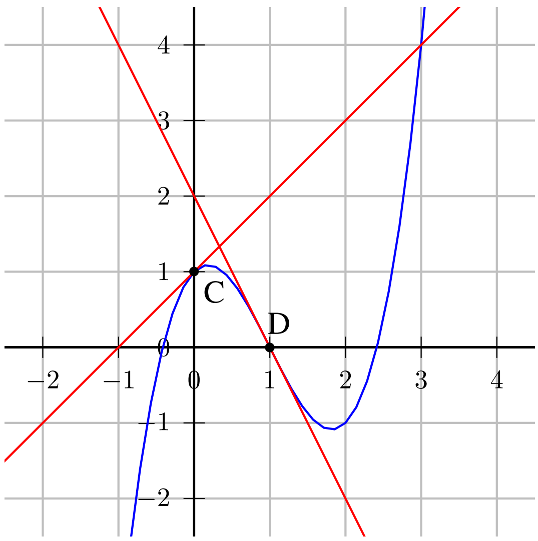
4. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $B(0\ ;\ 1)$:

$$T_0\ :\ y = \cdots\cdots$$

5. f est en fait la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 3x + 1$.
6. Déterminer les coordonnées du sommet S de cette parabole ainsi que l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en S.

Réponses
$f'(-2) = -1$; $T_{-2}\ :\ y = -x - 3$
$f'(0) = 3$; $T_0\ :\ y = 3x + 1$; $S\left(\dfrac{-3}{2}\ ;\ \dfrac{-5}{4}\right)$ *et* $T\ :\ y = -\dfrac{5}{4}$

Correction de l'exercice 2



1. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(0) = \cdots\cdots$$

2. Équation de T_0, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $C(0\ ;\ 1)$:

$$T_0\ :\ y = \cdots\cdots$$

3. Lecture du nombre dérivé :

$$g'(1) = \cdots\cdots$$

4. Équation de T_1, la tangente à $\mathscr{C}_g$ en $D(1\ ;\ 0)$:

$$T_1\ :\ y = \cdots\cdots$$

5. g est en fait la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Retrouver les résultats des premières questions.

Réponses
$g'(0) = 1$; $T_0\ :\ y = x + 1$
$g'(1) = -2$; $T_1\ :\ y = -2x + 2$

Correction de l'exercice 3 : tangente

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 3\sqrt{x}$.

On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et on donne $f'(1) = \frac{3}{2}$ et $f'(2) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Déterminer l'équation réduite de chacune des tangentes à la courbe de f aux points d'abscisses 1 et 2.

Corrigé

- Méthode 1 :
  Au point d'abscisse 1, l'équation réduite de la tangente à la courbe de f est de la forme :
  $$y = f'(1)x + p$$
  soit
  $$y = \frac{3}{2}x + p$$
  De plus
  $$f(1) = \frac{3}{2} \times 1 + p \iff p = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$
  Ainsi l'équation réduite de la tangente à la courbe de f est :
  $$y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$$
- Méthode 2 :
  Au point d'abscisse 2, l'équation réduite de la tangente à la courbe de f est de la forme : $y = f'(2)x + p$ soit $y = \frac{3\sqrt{2}}{4}x + p$. De plus $f(2) = \frac{3\sqrt{2}}{4} \times 2 + p$ soit $p = 3\sqrt{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.
  Ainsi l'équation réduite de la tangente à la courbe de f est : $y = \frac{3\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Correction de l'exercice 7 : $(uv)' = u'v + uv'$

1. Démontrer qu'une fonction f définie sur I de la forme $u \times v$ est dérivable sur I avec :

$$\boxed{(uv)' = u'v + uv'}$$

Corrigé

Soit f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = u(x) \times v(x)$$

où u et v sont deux fonctions définies sur I et dérivables sur I.

Pour h non nul on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{u(a+h)\times v(a+h) - u(a)\times v(a)}{h} \\
&= \frac{u(a+h)\times v(a+h) - u(a)\times v(a) + \underbrace{\Big(u(a)\times v(a+h) - u(a)\times v(a+h)\Big)}_{0}}{h} \\
&= \frac{\Big(u(a+h)\times v(a+h) - u(a)\times v(a+h)\Big) + \Big(u(a)\times v(a+h) - u(a)\times v(a)\Big)}{h} \\
&= \frac{v(a+h)\Big(u(a+h)-u(a)\Big) + u(a)\Big(v(a+h)-v(a)\Big)}{h} \\
&= \frac{v(a+h)\Big(u(a+h)-u(a)\Big)}{h} + \frac{u(a)\Big(v(a+h)-v(a)\Big)}{h}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = v(a+h)\times\frac{u(a+h)-u(a)}{h} + u(a)\times\frac{v(a+h)-v(a)}{h}}$$

Or on a supposé que les fonctions u et v étaient dérivables sur I, de ce fait :

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a) \\ \\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a) \end{cases}$$

or par ailleurs :

$$\lim_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$$

De ce fait

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = v(a)u'(a) + u(a)v'(a) = f'(a)}$$

2. Soit f définie sur I par :

$$f(x) = (x^3 + 5x^2 + 1)(2x^2 - 1)$$

2. a. Donner l'ensemble de dérivabilité de f.

Corrigé

f est le produit de deux fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. b. Calculer la dérivée de f de 2 façons :

2. b. 1. En utilisant la formule de la dérivée du produit ;

Corrigé

La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$u(x) = x^3 + 5x^2 + 1$	$u'(x) = 3x^2 + 10x$
$v(x) = 2x^2 - 1$	$v'(x) = 4x$

Pour tout réel x on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (3x^2 + 10x) \times (2x^2 - 1) + (x^3 + 5x^2 + 1) \times 4x \end{aligned}$$

A se stade là on ne peut pas factoriser, développons (Last Hope) :

$$\boxed{f'(x) = 10x^4 + 40x^3 - 3x^2 - 6x}$$

2. b. 2. En développant f d'abord puis en dérivant.

Corrigé

En développant f on obtient :

$$f(x) = 2x^5 + 10x^4 - x^3 - 3x^2 - 1$$

et donc on obtient facilement :

$$\boxed{f'(x) = 10x^4 + 40x^3 - 3x^2 - 6x}$$

Correction de l'exercice 8 : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

1. Démontrer qu'une fonction f définie sur I de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec v non nul sur I, u et v dérivables sur I est dérivable sur I avec :

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Corrigé

Soit f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

où u et v sont deux fonctions définies sur I et dérivables sur I.

Pour h non nul on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{1}{h} \times \Big(f(a+h) - f(a)\Big) \\
&= \frac{1}{h} \times \left(\frac{u(a+h)}{v(a+h)} - \frac{u(a)}{v(a)}\right) \\
&= \frac{1}{h} \times \left(\frac{u(a+h)v(a) - u(a)v(a+h)}{v(a+h)v(a)}\right) \\
&= \frac{1}{v(a)v(a+h)} \left(\frac{\Big(u(a+h) - u(a)\Big)v(a) + u(a)v(a) - u(a)v(a+h)}{h}\right) \\
&= \frac{1}{v(a)v(a+h)} \left(v(a)\frac{\Big(u(a+h)-u(a)\Big)}{h} - u(a)\frac{\Big(v(a+h)-v(a)\Big)}{h}\right)
\end{aligned}$$

Or on a supposé que les fonctions u et v étaient dérivables sur I, de ce fait :

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a) \\ \\ \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a) \end{cases}$$

or par ailleurs :

$$\lim_{h\to 0} \ v(a)v(a+h) = v(a)^2$$

De ce fait :

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{u'(a)v(a) - u(a)v'(a)}{v(a)^2} = f'(a)}$$

2. Soit f définie sur I par :

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x^2+1}$$

2. a. Montrer que f est définie sur $I = \mathbb{R}$.

Corrigé

f est définie sur un intervalle sur lequel le dénominateur est non nul donc quand $x^2 + 1 \neq 0$.

- Méthode 1 :
  On peut chercher à résoudre cette équation du second degré, le discriminant $\Delta = -4 < 0$ donc il n'y a pas de solution réelle ;

- Méthode 2 :
  On peut aussi remarquer que pour tout réel x :

$$x^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2+1 \geqslant 1 > 0$$

De ce fait le dénominateur ne s'annule jamais et la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

2. b. Donner l'ensemble de dérivabilité de f.

Corrigé

f est le quotient de deux fonctions dérivables et de dénominateur qui ne s'annule jamais sur $I=\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $I=\mathbb{R}$.

2. c. Calculer la dérivée de f.

Corrigé

La fonction f est définie et dérivable surl'intervalle $\mathbb{R}$. Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec :

$u(x)=x^2-3$	$u'(x)=2x$
$v(x)=x^2+1$	$v'(x)=2x$

Pour tout réel x de $\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$
$$f'(x)=\frac{2x\times\left(x^2+1\right)-\left(x^2-3\right)\times(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}$$
$$f'(x)=\frac{2x^3+2x-2x^3+6x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$\underline{\forall x\in\mathbb{R}}\ ;\ \boxed{f'(x)=\frac{8x}{\left(x^2+1\right)^2}}$$

3. Soit g définie sur I par :

$$g(x)=\frac{-7}{x^2+x+1}$$

3. a. Montrer que g est définie sur $I=\mathbb{R}$.

Corrigé

g est définie sur un intervalle sur lequel le dénominateur est non nul donc quand $x^2+x+1\neq 0$.
On peut chercher à résoudre cette équation du second degré, le discriminant $\Delta=1^2-4=-3<0$ donc il n'y a pas de solution réelle ; De ce fait le dénominateur ne s'annule jamais et la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

3. b. Donner l'ensemble de dérivabilité de g.

Corrigé

g est le quotient de deux fonctions dérivables et de dénominateur qui ne s'annule jamais sur $I = \mathbb{R}$, donc g est dérivable sur $I = \mathbb{R}$.

3. c. Calculer la dérivée de g.

Corrigé

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = \dfrac{-7}{(x^2+x+1)} \end{cases}$$

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est de la forme $k \times \dfrac{1}{v}$ donc de dérivée $k \times \dfrac{-v'}{v^2}$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ g(x) = -7 \times \frac{1}{v(x)} \quad : \quad \begin{cases} v(x) & = (x^2+x+1) \\ v'(x) & = 2x+1 \end{cases}$$

On a donc :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \ g'(x) = -7 \times \frac{-v'(x)}{v(x)^2} = \frac{14x+7}{(x^2+x+1)^2}}$$

4. Soit h définie sur I par :

$$h(x) = \frac{1-5x^2}{x^2+x}$$

4. a. Déterminer l'ensemble de définition de h.

Corrigé

h est définie sur un intervalle sur lequel le dénominateur est non nul donc quand $x^2 + x \neq 0$.

On peut chercher à résoudre cette équation du second degré, mais il y a plus simple car la factorisation est évidente :

$$x^2 + x = 0 \iff x(x+1) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = -1 \end{cases}$$

De ce fait les deux racine du dénominateur sont 0 et (-1) et la fonction est définie sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 0\}$.

4. b. Donner l'ensemble de dérivabilité de h.

Corrigé

h est une fonction quotient de deux fonctions dérivables et de dénominateur qui ne s'annule pas sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 0\}$, donc elle est dérivable sur I.

4. c. Calculer la dérivée de h.

Corrigé

La fonction f est définie et dérivable surl'intervalle $\mathbb{R} \setminus \{-1\ ;\ 0\}$. Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = 1 - 5x^2$	$u'(x) = -10x$
$v(x) = x^2 + x$	$v'(x) = 2x + 1$

Pour tout réel x de $\mathbb{R}\setminus\{-1\ ;\ 0\}$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-10x \times \left(x^2 + x\right) - \left(1 - 5x^2\right) \times (2x + 1)}{\left(x^2 + x\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-10x^3 - 10x^2 - (2x + 1 - 10x^3 - 5x^2)}{\left(x^2 + x\right)^2}$$

$$\underline{\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\ ;\ 0\}}\ ;\ \boxed{f'(x) = \frac{-5x^2 - 2x - 1}{\left(x^2 + x\right)^2}}$$

Correction de l'exercice 13 page 11 : tangentes 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$$

1. Déterminer la dérivée de f.

Corrigé (0.5 pt)

- La fonction f est <u>définie et dérivable</u> sur $I = \mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme.
- Pour tout réel x on a :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + \frac{1}{2} \times 2x - 2 = \underline{x^2 + x - 2}$$

2. Montrer que l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 est :

$$y = -2x + \frac{7}{6}$$

Corrigé (1.25 pt)

L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = -1$ est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} a & = -1 \\ f(-1) & = +\dfrac{19}{6} \\ f'(-1) & = -2 \end{array}\right| \Rightarrow \ (T)\ :\ y = -2 \times (x+1)\ + \frac{19}{6} \implies \boxed{y = -2x + \frac{7}{6}}$$

geogebra Link

3. Déterminer les coordonnées du point C de $\mathscr{C}_f$ qui admet une tangente parallèle à T.

Corrigé (1.25 pt)

$f'(a)$ est par définition le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse a donc on cherche les solutions de l'équation $f'(x) = -2$ car deux droites sont parallèles, si elles ont le même coefficient directeur.

$$f'(x) = -2 \iff x^2 + x - 2 = -2 \iff x(x+1) = 0 \iff \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ \text{ ou} \\ x = -1 \end{array}\right.$$

On retrouve bien entendu l'abscisse (-1) du point de la question 2), et le point C est donc d'abscisse 0.

Correction de l'exercice 14 page 12 : tangentes 2

On considère la fonction f définie sur un ensemble I de nombres réels par :

$$f(x) = \frac{1-2x}{x^2-5x+6}.$$

1. Déterminer I, l'ensemble de définition de f, puis l'ensemble de dérivabilité de f.

Corrigé

- Ensemble de définition de f.
  La fonction f est une fraction rationnelle : elle est définie pour tous les réels x tels que le dénominateur ne soit pas nul.
  On cherche donc les valeurs de x pour lesquelles :
  $$x^2-5x+6=0.$$
  - Méthode 1 : On factorise directement le trinôme du second degré (formule x^2-Sx+P) :
    $$x^2-5x+6=(x-2)(x-3).$$
    Ainsi :
    $$x^2-5x+6=0 \iff (x-2)(x-3)=0 \iff x=2 \quad \text{ou} \quad x=3.$$
  - Méthode 2 : avec delta
    L'expression $\left(x^2 -5x + \ 6\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$ avec
    $$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-5 \\ c=6 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 1 > 0$$
    Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(x^2 -5x + \ 6\right)$ admet deux racines réelles distinctes :
    $$x_1 = \frac{5-\sqrt{1}}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+\sqrt{1}}{2} = 3$$

  Le dénominateur est nul pour $x=2$ et $x=3$, donc la fonction f n'est pas définie pour ces deux valeurs.
  Par conséquent, l'ensemble de définition est :
  $$I = \mathbb{R} \setminus \{2\,;\,3\}.$$
- Ensemble de dérivabilité de f.
  Comme f est une fraction rationnelle, elle est dérivable en tout point de son ensemble de définition (les seules éventuelles non-dérivabilités pouvant venir des points où le dénominateur est nul).
  L'ensemble de dérivabilité de f est donc lui aussi :
  $$\boxed{I = \mathbb{R} \setminus \{2\,;\,3\} \quad \text{et } f \text{ est dérivable sur } I.}$$

2. Montrer que la dérivée de f est :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 7}{(x^2 - 5x + 6)^2}.$$

Corrigé

La fonction f est définie et dérivable surl'intervalle D_f. Elle est de la forme $\frac{u}{v}$ donc de dérivée $\frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = 1 - 2x$	$u'(x) = -2x$
$v(x) = x^2 - 5x + 6$	$v'(x) = 2x - 5$

Pour tout réel x de D_f :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{-2x \times \left(x^2 - 5x + 6\right) - (1 - 2x) \times (2x - 5)}{\left(x^2 - 5x + 6\right)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 10x - 12 - 2x + 5 + 4x^2 - 10x}{\left(x^2 - 5x + 6\right)^2}$$

$$\underline{\forall x \in D_f} \; ; \; \boxed{f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 7}{\left(x^2 - 5x + 6\right)^2}}$$

3. Montrer que l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est :

$$y = -1{,}75x + 1{,}25.$$

Corrigé

On cherche l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $x = 1$.
L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 1$ est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} a & = 1 \\ f(1) & = -\frac{1}{2} \\ f'(1) & = -\frac{7}{4} \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \; (T) \; : \; y = -\frac{7}{4} \times (x - 1) \; - \; \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = -1{,}75x + 1{,}25}$$

Remarque

Pour le détail des calculs

$$\begin{aligned} f'(1) &= \frac{2\times 1^2 - 2\times 1 - 7}{\left(1^2 - 5\times 1 + 6\right)^2} \\ &= \frac{2-2-7}{(1-5+6)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(1) = -1{,}75}.$$

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{1-2\times 1}{1^2 - 5\times 1 + 6} \\ &= \frac{1-2}{1-5+6} \\ f(1) &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= -\frac{7}{4}(x-1) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{7}{4}x + \frac{7}{4} - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{7}{4}x + \frac{7}{4} - \frac{2}{4} \\ &= -\frac{7}{4}x + \frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{y = -1,75x + 1,25}$$

4. Déterminer les abscisses des points A et B de $\mathscr{C}_f$ qui admettent une tangente horizontale.

Corrigé

Une tangente horizontale a pour coefficient directeur 0. Chercher les points de $\mathscr{C}_f$ ayant une tangente horizontale revient donc à résoudre :

$$f'(x) = 0 \quad \text{avec} \quad x \in I.$$

On utilise l'expression déterminée à la question 2 :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2x - 7}{\left(x^2 - 5x + 6\right)^2}.$$

Pour $x \in I$, le dénominateur $\left(x^2 - 5x + 6\right)^2$ est strictement positif, car c'est le carré d'un réel non nul. On a donc :

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 2x^2 - 2x - 7 = 0.$$

On résout cette équation du second degré. Calculons le discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-7) \\ &= 4 + 56 \\ &= 60.\end{aligned}$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles :

$$\begin{aligned}x &= \frac{2 \pm \sqrt{60}}{2 \times 2} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{15}}{4} \\ &= \frac{1 \pm \sqrt{15}}{2}.\end{aligned}$$

On vérifie que ces valeurs sont bien dans l'ensemble de définition $I = \mathbb{R} \setminus \{2\ ;\ 3\}$; ce sont donc les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ où la tangente est horizontale.

Ainsi :

$$\boxed{x_A = \frac{1 - \sqrt{15}}{2} \quad \text{et} \quad x_B = \frac{1 + \sqrt{15}}{2}.}$$

Correction de l'exercice 15 page 13 : tangentes 3

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + x \; ; \; g(x) = -x^2 - 3x + 7.$$

1. Calculer les dérivées des deux fonctions.

Corrigé

Les fonctions f et g sont des fonctions polynômes, donc elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 + x \\ f'(x) &= 4x + 1 \\ g(x) &= -x^2 - 3x + 7 \\ g'(x) &= -2x - 3 \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 4x + 1 \; ; \; g'(x) = -2x - 3}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{f'(x) = 4x + 1 \quad \text{et} \quad g'(x) = -2x - 3.}$$

2. Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$.
Préciser les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, les courbes représentatives des fonctions f et g.

Corrigé

Les points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les points dont les abscisses vérifient :

$$f(x) = g(x).$$

On résout donc, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ 2x^2 + x &= -x^2 - 3x + 7 \\ 2x^2 + x + x^2 + 3x &= 7 \\ 3x^2 + 4x - 7 &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{3x^2 + 4x - 7 = 0}$$

On résout l'équation du second degré $3x^2 + 4x - 7 = 0$. Le discriminant vaut :

$$\begin{aligned} \Delta &= 4^2 - 4 \times 3 \times (-7) \\ &= 16 + 84 \\ &= 100 \end{aligned}$$

$$\boxed{\Delta = 100}$$

Comme $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles :

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2 \times 3} \\ &= \frac{-4 \pm 10}{6} \end{aligned}$$

On obtient :

$$x_1 = \frac{-4+10}{6} = \frac{6}{6} = 1,$$
$$x_2 = \frac{-4-10}{6} = \frac{-14}{6} = -\frac{7}{3}$$
$$\boxed{x = 1 \ ; \ x = -\frac{7}{3}}$$

Les abscisses d'intersection sont donc 1 et $-\frac{7}{3}$. On calcule les ordonnées correspondantes avec f (ou g).

Pour $x = 1$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 2 \times 1^2 + 1 \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$
$$\boxed{f(1) = 3}$$

Pour $x = -\frac{7}{3}$:

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{7}{3}\right) &= 2\left(-\frac{7}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{3}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{49}{9} - \frac{7}{3} \\ &= \frac{98}{9} - \frac{21}{9} \\ &= \frac{77}{9} \end{aligned}$$
$$\boxed{f\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{77}{9}}$$

Les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont donc :

$$\boxed{(1\ ;\ 3) \quad \text{et} \quad \left(-\frac{7}{3}\ ;\ \frac{77}{9}\right).}$$

3. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 5.

Corrigé

L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 5$ est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Donc ici on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ll} a & = 5 \\ f\,(5) & = +55 \\ f'\,(5) & = 21 \end{array}\right. \Bigg| \Rightarrow \ (T)\ :\ y = 21 \times (x-5)\ + 55 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = 21x - 50}$$

4. Montrer qu'en leurs points d'abscisse $-\frac{2}{3}$, les tangentes respectives aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont parallèles.

Corrigé

Deux droites sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

Les coefficients directeurs des tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse $x = -\dfrac{2}{3}$ sont respectivement $f'\left(-\dfrac{2}{3}\right)$ et $g'\left(-\dfrac{2}{3}\right)$.

On calcule d'abord $f'\left(-\dfrac{2}{3}\right)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x+1 \\ f'\left(-\frac{2}{3}\right) &= 4\left(-\frac{2}{3}\right)+1 \\ &= -\frac{8}{3}+1 \\ &= -\frac{8}{3}+\frac{3}{3} \\ &= -\frac{5}{3} \\ &\boxed{f'\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

On calcule ensuite $g'\left(-\dfrac{2}{3}\right)$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -2x-3 \\ g'\left(-\frac{2}{3}\right) &= -2\left(-\frac{2}{3}\right)-3 \\ &= \frac{4}{3}-3 \\ &= \frac{4}{3}-\frac{9}{3} \\ &= -\frac{5}{3} \\ &\boxed{g'\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3}} \end{aligned}$$

On obtient :

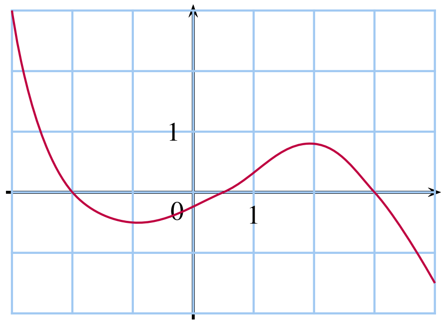
$$f'\left(-\frac{2}{3}\right) = g'\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{3}.$$

Les coefficients directeurs des tangentes aux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en $x = -\dfrac{2}{3}$ sont donc égaux.

On peut conclure que les tangentes respectives à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ aux points d'abscisse $-\dfrac{2}{3}$ sont parallèles.

Correction de l'exercice 20

Voici la courbe représentative, dans un repère, d'une fonction h dérivable sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
Déterminer graphiquement le signe de :



a. $h(0) < 0$ car c'est l'ordonnée du point d'intersection entre la courbe et l'axe des ordonnées.

b. $h'(0) > 0$ car h est croissante sur $[-1\ ;\ 2]$.

c. $h(-3) > 0$ car la courbe passe par le point de $(-3\ ;\ 3)$.

d. $h'(-3) < 0$ car h est décroissante sur $[-3\ ;\ 1]$.

e. $h(2,5) > 0$ car l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 2,5 est positive.

f. $h'(2,5) < 0$ car h est décroissante sur $[2\ ;\ 4]$.

Correction de l'exercice 21 : Vrai /Faux

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. « Si $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(1\ ;\ 2)$ est parallèle à l'axe des abscisses. »

Si $f'(1) = 0$, alors la tangente au point d'abscisse 1 est parallèle à l'axe des abscisses. Or $f(1) = 2$ donc le point d'abscisse 1 de $\mathscr{C}_f$ est le point A.

$\boxed{\text{VRAI}}$

2. « Si la droite d'équation $y = 2x + 3$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(0\ ;\ 3)$, alors $f'(0) = 3$. »

Si la droite d'équation $y = 2x + 3$ est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(0\ ;\ 3)$, alors son coefficient directeur est 2, donc $f'(0) = 2 \neq 3$

$\boxed{\text{FAUX}}$

3. « Si $f(2) = 1$ et $f'(2) = 1$, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(2\ ;\ 1)$ a pour équation $y = x - 1$. »

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(a\ ;\ f(a))$ est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
Ici, $a = 2$, $f'(2) = 1$ et $f(2) = 1$ donc $y = 1 \times (x - 2) + 1$ soit $y = x - 1$

$\boxed{\text{VRAI}}$

Correction de l'exercice 22

On considère les fonction f et g définies par $f(x) = -x^2 + 4$ et $g(x) = x^2 - 4x + 6$ et dérivables sur $\mathbb{R}$. On note leur courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. On appelle A le point de coordonnées $(1\ ;\ 3)$.

1. Démontrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ admettent une tangente commune T en A.

Corrigé

Cherchons les points d'intersection des deux courbes.
Pour cela on résout l'équation

$$f(x) = g(x) \iff -x^2 + 4 = x^2 - 4x + 6$$

Soit

$$2x^2 - 4x + 2 = 0 \iff x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x = 1$$

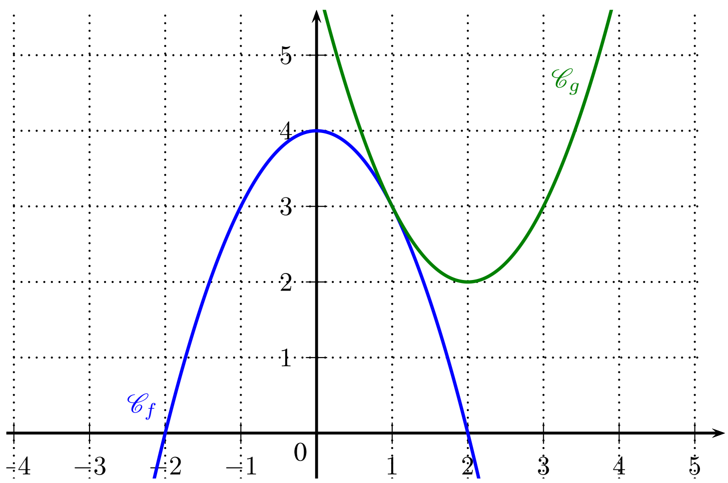
De plus, $f(1) = -1^2 + 4 = 3$. Donc les deux courbes ont donc un seul point d'intersection : $A(1\ ;\ 3)$.
$f'(1) = -2 \times 1 = -2$
$g'(1) = 2 \times 1 - 4 = -2$
Donc les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et à $\mathscr{C}_g$ au point A ont le même coefficient directeur.
Donc elles sont parallèles. Or elles ont un point commun, donc elles sont confondues.

2. Donner l'équation réduite de la tangente T et la tracer après avoir reproduit le repère.

Corrigé

- 1re méthode :

  $y = mx + p$ avec $m = f'(1) = -2$
  $y = -2x + p$
  $A(1\ ;\ 3) \in \mathscr{C}_f \iff 3 = -2 \times 1 + p \iff p = 5$
  $y = -2x + 5$
- 2e méthode :
  $y = f'(a)(x-a) + f(a)$
  $y = -2(x-1) + 3$
  $y = -2x + 5$



Correction de l'exercice 23

On considère la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 4x$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ et la droite d d'équation $y = -x + 1$.
Démontrer que la courbe représentative de f admet exactement deux tangentes parallèles à la droite d en des points que l'on déterminera.

Corrigé

On cherche des tangentes parallèles à d, donc elles doivent avoir le même coefficient directeur que d c'est-à-dire -1.
Le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x est $f'(x)$.
On doit donc résoudre $f'(x) = -1$.
$f'(x) = 3x^2 - 4$ donc $f'(x) = -1 \iff 3x^2 - 4 = -1 \iff 3x^2 - 3 = 0 \Longleftarrow x^2 - 1 = 0 \iff x = -1$ ou $x = 1$.
$\mathscr{C}_f$ a 2 tangentes parallèles à d aux points $A(-1\ ;\ 3)$ et $B(1\ ;\ -3)$.

Correction de l'exercice 27

Find the equation of the tangent line to the curve $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ at the point where $x = 2$.

Corrigé

We start by finding $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9.$$

At $x = 2$:

$$\frac{dy}{dx} = 3(2)^2 - 12(2) + 9 = 12 - 24 + 9 = -3.$$

The slope of the tangent line is -3.
Now calculate y when $x = 2$:

$$y = (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 4 = 8 - 24 + 18 + 4 = 6.$$

The point of tangency is $(2, 6)$.
The equation of the tangent line is :

$$y - 6 = -3(x - 2),$$

which simplifies to :

$$y = -3x + 12.$$

Correction de l'exercice 28

Determine the critical points of the function $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$.

Corrigé

The derivative of $f(x)$ is :

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x.$$

Factoring $f'(x)$:

$$f'(x) = 4x(x^2 - 3x + 3).$$

Set $f'(x) = 0$:

$$4x = 0 \quad \text{or} \quad x^2 - 3x + 3 = 0.$$

The first solution gives $x = 0$.
For $x^2 - 3x + 3 = 0$, use the quadratic formula :

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{3 \pm \sqrt{9-12}}{2} = \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Since these are complex roots, they are not critical points.
Thus, the only critical point is $x = 0$.

Correction de l'exercice 31 page 26

Soit f une fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan.

On sait que $\mathscr{C}_f$ passe par le point A d'abscisse 1 de l'axe des abscisses et par le point B d'ordonnée 3 de l'axe des ordonnées.
Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est égal à -5.
Déterminer la forme développée de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Corrigé

f est une fonction du second degré donc f est de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$\mathscr{C}_f$ passe par le point A d'abscisse 1 de l'axe des abscisses : $A(1\ ;\ 0) \in \mathscr{C}_f \iff f(1) = 0 \iff a + b + c = 0$

$\mathscr{C}_f$ passe par le point B d'ordonnée 3 de l'axe des ordonnées : $B(0\ ;\ 3) \in \mathscr{C}_f \iff f(0) = 3 \iff c = 3$

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est égal à -5 : $f'(1) = -5$. Or $f'(x) = 2ax + b$ donc $2a + b = -5$

Donc

$$\begin{cases} a + b = -3\ (E_1) \\ 2a + b = -5\ (E_2) \end{cases}$$

$$(E_2) - (E_1) : a = -5 - (-3) = -2$$

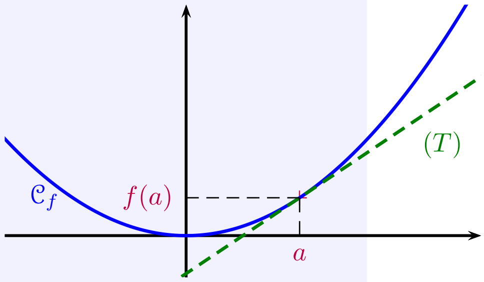
Donc en remplaçant a par -2 dans (E_1) : $-2 + b = -3$ donc $b = -1$.
Ainsi $\boxed{f(x) = -2x^2 - x + 3}$

Correction de l'exercice 33

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On dit que la fonction carré f est convexe, car sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de toutes ses tangentes. Le démontrer.

Corrigé

La tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a représente une fonction affine g.
Montrons que, pour tout x réel, $f(x) \geqslant g(x)$ pour n'importe quelle abscisse a.



$g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec

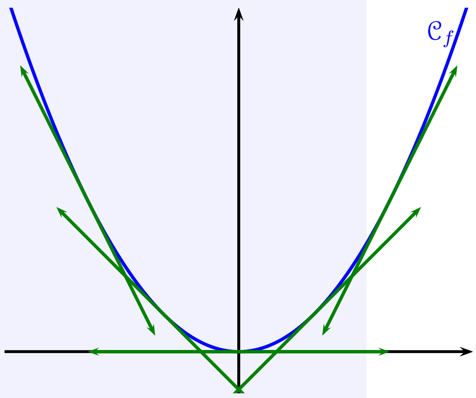
$$\begin{cases} f(x) = x^2 \\ f'(x) = 2x \end{cases}$$

Donc $g(x) = 2a(x-a) + a^2$
$g(x) = 2ax - 2a^2 + a^2$
$g(x) = 2ax - a^2$

L'équation réduite de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est donc $y = 2ax - a^2$

Comparons $f(x)$ et $g(x)$. Pour cela, étudions le signe de $f(x) - g(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - (2ax - a^2) \\ &= x^2 - 2ax + a^2 \\ &= (x-a)^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$



Donc, pour n'importe quelle abscisse a, $f(x) - g(x) \geqslant 0$ pour tout réel x.
Donc la courbe de la fonction carrée est au-dessus de toutes ses tangentes.