Math93.com

TD 3 - 1re Spé Maths
Dérivation Partie 2

Table des matières

Partie I. Lectures graphiques : un premier classique

Méthode

Grand classique au bac et bien plus délicat qu'il n'y parait au premier regard !

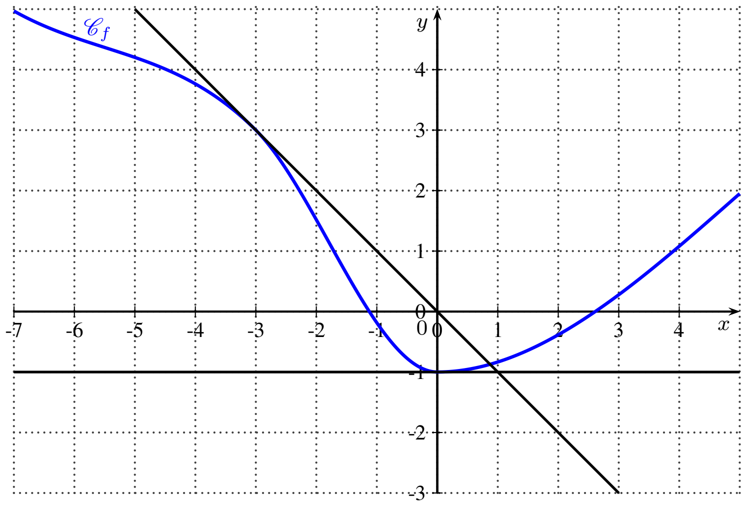
1. Soit on donne la courbe de la fonction et des tangentes et on doit répondre à des questions ;
2. Soit on donne la courbe de la fonction dérivée et on doit retrouver les variations de la fonction ou répondre à un QCM ;
3. Ou encore on donne 2 courbes, et on doit identifier celle de la fonction f et celle de la dérivée f' en argumentant ;
4. Ou encore on donne 3 courbes, et on doit identifier celle de la fonction f, celle de la dérivée f' et celle de la dérivée seconde f'' en argumentant.
5. Ou encore on donne plusieurs courbes et on doit répondre à plusieurs question en argumentant.

ASTUCE : CE QUI NOUS INTÉRESSE SUR LA DÉRIVÉE, C'EST SON SIGNE, DONC ON DRESSE LE TABLEAU DE SIGNE DE LA DÉRIVÉE GRÂCE A SA COURBE.

Exercice 1. (c) D'après la courbe de la fonction :Liban mai 2016

Question 1

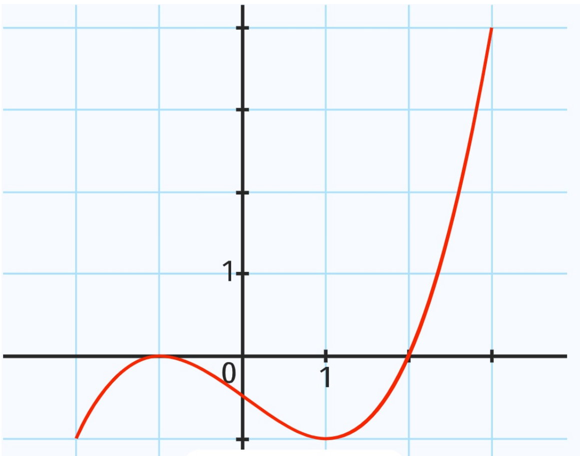
La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.



a. $f'(0) = -1$ **b.** $f'(-1) = 0$ **c.** $f'(-3) = -1$ **d.** $f'(-3) = 3$

Exercice 2. (c) D'après la courbe de la dérivée

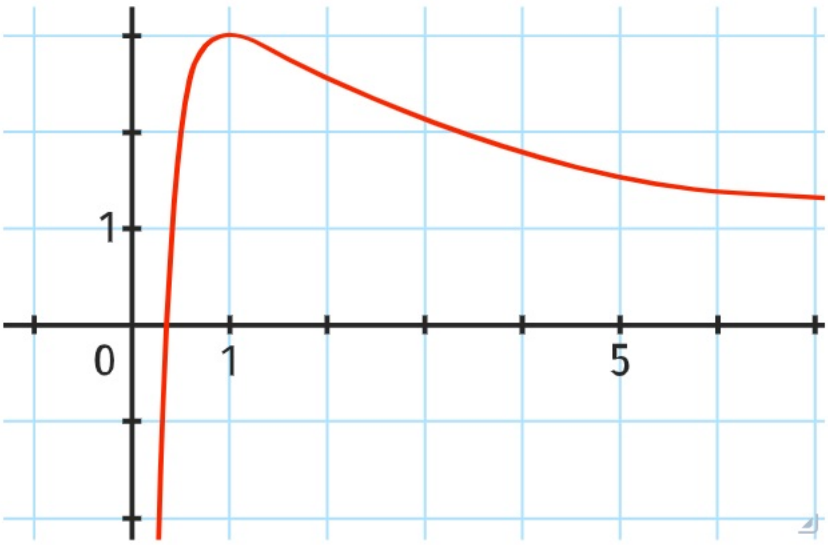
h est une fonction définie et dérivable sur $I = [-2\ ;\ 3]$. La courbe ci-dessous représente la fonction dérivée h' de h sur I.



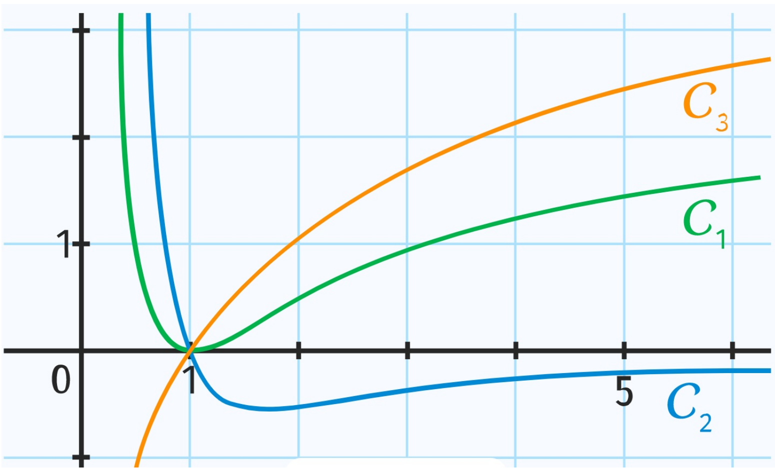
Dresser le tableau de variations de h sur I.

Exercice 3. Plusieurs courbes possibles pour la dérivée

f est une fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$. La représentation graphique de f est donnée ci-dessous.

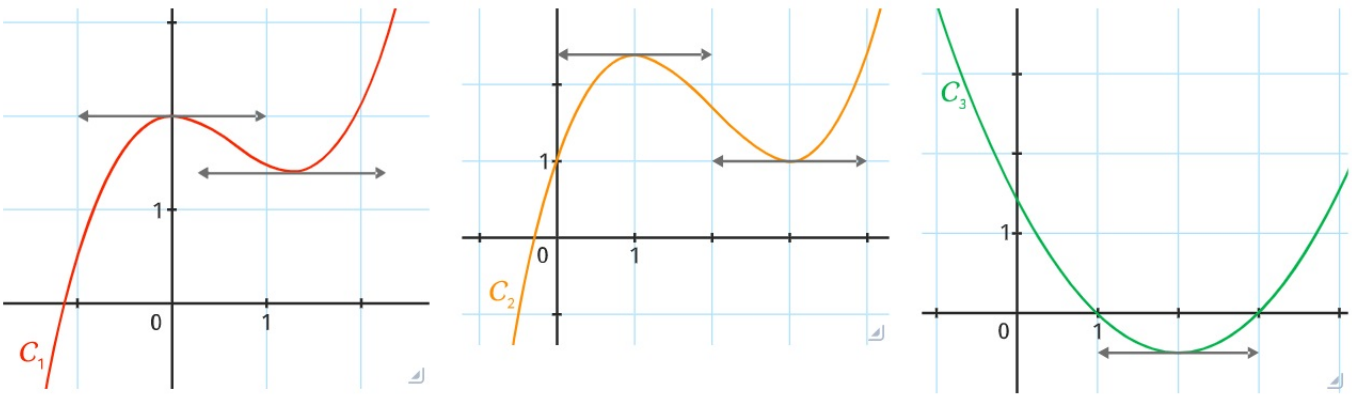


Parmi les trois représentations graphiques ci-dessous, laquelle est susceptible de représenter la fonction f' , fonction dérivée de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$? Justifier.

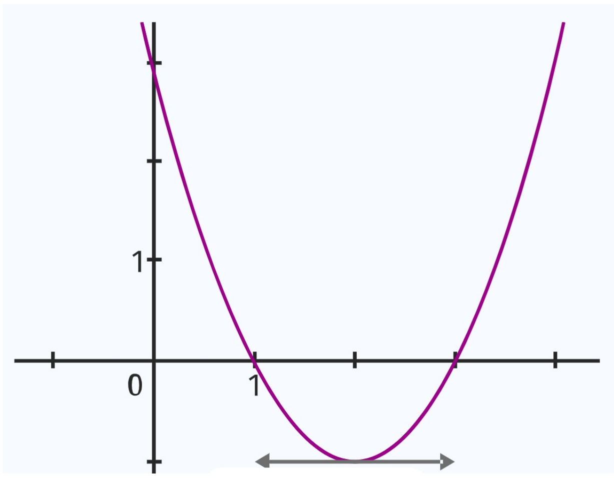


Exercice 4. Plusieurs courbes possibles pour la fonction

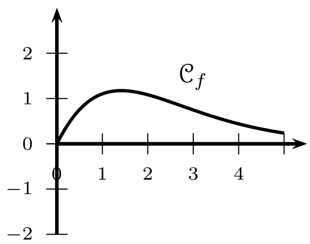
On note respectivement $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2 et f_3 définies sur $\mathbb{R}$.



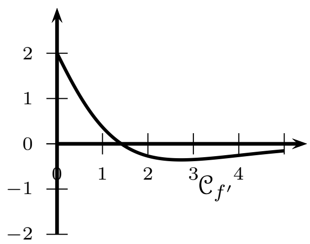
Des trois fonctions, laquelle a pour fonction dérivée une fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessous ? Justifier.



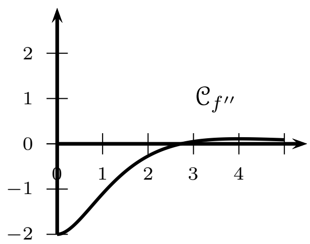
Exercice 5. (c) Lectures graphiques - D'après Bac (c)



Courbe $\mathcal{C}_f$



Courbe $\mathcal{C}_{f'}$



Courbe $\mathcal{C}_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathcal{C}_{f'}$ et $\mathcal{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.
Les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

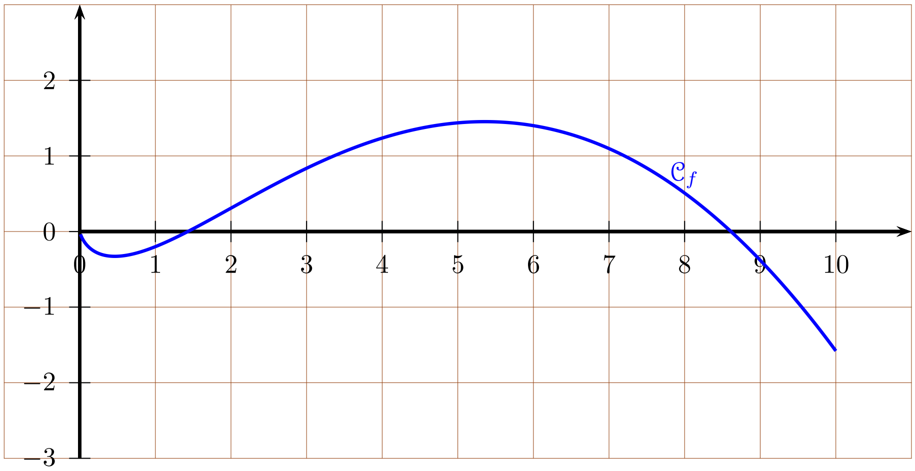
1. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.
2. Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?

$y = x$ $\qquad$ $y = 2x + 1$ $\qquad$ $y = 2x$ $\qquad$ $y = \dfrac{3}{4}x$

3. Que pensez-vous de l'affirmation suivante : "La fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 5]$".

Exercice 6. (c) Lectures graphiques - QCM d'après Bac (c)

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O :



On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

a. 1 **b.** 2 **c.** 3

2. Le nombre réel $f'(7)$ est :

a. nul **b.** strictement positif **c.** strictement négatif

3. La fonction f' est :

a. croissante sur $]0\,;\,10]$ **b.** croissante sur $[4\,;\,7]$ **c.** décroissante sur $[4\,;\,7]$

Partie II. Étudier les variations d'une fonction sur un intervalle donné

Méthode

L'idée est d'étudier le signe de la fonction dérivée sur l'intervalle de dérivation J , et d'en déduire les variations de la fonction sur son ensemble de définition I.

1. On repère bien sur quel intervalle I la fonction est définie.
2. On détermine rapidement l'ensemble de dérivabilité J (qui est souvent I en fait).
3. Pour tout x de J ... on dérive f.
4. Pour tout x de J ... on étudie le signe de la fonction dérivée f'. On s'intéresse surtout au cas où $f'(x)$ est nul, car cela nous donne les tangente horizontales
5. On dresse un tableau de signe de $f'(x)$ toujours pour tout x de J.
6. On en déduit les variations de f sur I.

Exercice 7. Fonctions polynômes

1. Étudier les variations de la fonction f définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par
$$f(x) = x^2 - 5x + 1$$
2. Étudier les variations de la fonction g définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par
$$g(x) = 3x^2 + 2x + 1$$
3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par
$$h(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x + 1$$
4. Étudier les variations de la fonction i définie sur $I' = [-10\,;\,10]$ par
$$i(x) = 2x^3 - 3x^2 - 120x + 1$$
5. Étudier les variations de la fonction j définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par
$$j(x) = \left(x^2 + x + 1\right)^2$$
6. Étudier les variations (en précisant les tangentes horizontales) de la fonction k définie sur $I = \mathbb{R}$ par
$$k(x) = \left(x^2 + 2x + 1\right)^3$$

Réponses

(1.) f décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{5}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$ (2.) g croissante sur $[0\,;\,+\infty]$.
(3.) h décroissante sur $[0\,;\,4]$ et croissante sur $[4\,;\,+\infty[$.
(4.) i décroissante sur $[-4\,;\,5]$ et croissante sur $[-10\,;\,-4] \cup [5\,;\,10]$.
(5.) j croissante sur $[0\,;\,+\infty]$.

Exercice 8. Fonctions quotients

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I = [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$.

1. a. Montrer que f est bien définie sur cet intervalle.

1. b. Montrer que sur cet intervalle, $f'(x) = \dfrac{-2}{(2x+3)^2}$.

1. c. Étudier les variations de f sur I.

1. d. Montrer que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = -\dfrac{2}{25}x + \dfrac{7}{25}$.

2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $I = [0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1-x}{x^2+5}$.

2. a. Montrer que g est bien définie sur cet intervalle.

2. b. Montrer que sur cet intervalle, $g'(x) = \dfrac{x^2-2x-5}{(x^2+5)^2}$.

2. c. Étudier les variations de g sur I.

> **Réponses**
> *(1.) f décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.*
> *(2.) g décroissante sur $\left[0\,;\,1+\sqrt{6}\right]$ et croissante sur $\left[1+\sqrt{6}\,;\,+\infty\right[$.*

Exercice 9. Fonctions quotients et ensemble de définition

On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{1-x^2}{2x+5}$$

1. Déterminer D_h, l'ensemble de définition de h.

2. Montrer que sur D_h on a :

$$h'(x) = \frac{-2x^2-10x-2}{(2x+5)^2}$$

3. Étudier les variations de h sur D_h.

Partie III. Étude des variations : avec une factorisation préalable

Exercice 10. Les 3 Méthodes : une dérivée de degré 3

Soit g la fonction définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = \dfrac{x^4}{4} - 2x^3 + \dfrac{3x^2}{2} + 10x$.

1. Calculer la dérivée de g.

2. Une forme factorisée de la dérivée.

> **Remarque**
> La fonction g est de degré 4, la dérivée est de degré 3, on est bloqué.
> On a alors besoin d'un coup de pouce pour obtenir la forme factorisée de la dérivée. On propose ici les 3 façons d'y parvenir.

2. a. Méthode 1 (on donne la forme factorisée) : Vérifier que sur I on a : $g'(x) = (x+1)(x^2 - 7x + 10)$.

> **Méthode**
> On nous va nous donner la forme factorisée de g'.
> ATTENTION DANGER : On n'écrit surtout pas que $g'(x) = (x+1)(x^2 - 7x + 10)$ la forme factorisée, c'est le résultat que l'on veut obtenir donc :
> - D'UNE PART : $g'(x) = x^3 - 6x + 3x + 10$
> - D'AUTRE PART : $(x+1)(x^2 - 7x + 10) = \ldots$

2. b. Méthode 2 (identification) : Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in I : g'(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.

> **Méthode**
> La méthode dite d'identification consiste à appliquer un résultat d'algèbre qui précise que deux polynômes sont égaux si leurs coefficients terme à terme le sont.
> Donc on fait en sorte d'écrire les deux expressions sous la même forme (souvent en développant), puis on identifie le coefficient de chaque terme en x^3, x^2, x, et la constante.
> Les exercices 10, 12 et 19 utilisent cette méthode.

2. c. Méthode 3 (division polynomiale) : Déterminer trois réels a, b et c tels que : $\forall x \in I : g'(x) = (x+1)(ax^2+bx+c)$.

> **Méthode**
> La méthode dite de division polynomiale n'est pas explicitement au programme mais on peut l'utiliser pour résoudre ce problème. On pose une division qui est similaire à la division euclidienne :
>
> $$\begin{array}{rrrr|l} x^3 & -6x^2 & +3x & +10 & x+1 \\ \cline{5-5} -x^3 & -x^2 & & & x^2 - 7x + 10 \\ \cline{1-2} & -7x^2 & +3x & & \\ & 7x^2 & +7x & & \\ \cline{2-3} & & 10x & +10 & \\ & & -10x & -10 & \\ \cline{3-4} & & & 0 & \end{array}$$

3. Étudier les variations de g sur I.

Exercice 11. Une fonction dont le signe de la dérivée n'est pas facilement étudiable

Soit f la fonction définie sur $I =]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 - \frac{4}{x^2}$$

1. Calculer la dérivée de f sur son ensemble de dérivabilité.

> **Remarque**
> La dérivée est de degré 3 au numérateur, on est bloqué.
> On a alors besoin d'un coup de pouce.
> Dans ce cas, on nous va nous donner la forme factorisée de f'.
> ATTENTION : on dérive f, on la met sous forme de quotient (de numérateur un polynôme de degré 3) et on montre qu'elle correspond à la forme demandée avec RIGUEUR :
>
> D'UNE PART .. D'AUTRE PART !

2. Vérifier que sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{x^3}$$

3. Montrer que f est croissante sur I.

Exercice 12. Avec la méthode d'identification ou de division polynomiale

Soit f la fonction définie sur $I = R$ par :

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 12x + 1$$

1. Déterminer la dérivée de f.

> **Remarque**
> La dérivée est de degré 3, on est bloqué.
> On a alors besoin d'un coup de pouce.
> On peut remarque de $x = 2$ est une racine évidente (ou presque) de f', on va donc chercher à factoriser f' par $(x-2)$.

2. Déterminer par la méthode de votre choix, trois réels a, b et c tels que pour tout réel x :

$$f'(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

Partie IV. Résoudre des équations

Théorème des valeurs intermédiaires

Ces exercices utiliseraient normalement le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire qui sera vu en terminale.
Pour simplifier, si une fonction dérivable (même juste continue) est monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et passe d'une valeur positive à négative (ou le contraire), alors elle passe nécessairement par 0.
Elle prend même toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Théorème 1 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

***Remarque** : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

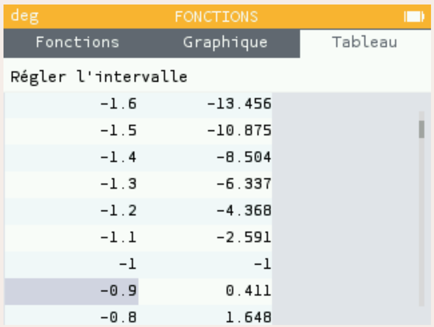
Exercice 13. (c) Approximation des racines d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;\,10]$ par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Étudier les variations de f sur $[-2\,;\,10]$
2. Montrer juste à l'aide du tableau de variations que l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions sur $[-2\,;\,10]$.
   Une solution unique α sur cet $[-2\,;\,0]$, β sur cet $[0\,;\,4]$ et γ sur $[4\,;\,10]$.
3. Donner un encadrement à $0,01$ près de α,β et γ par balayage avec la calculatrice.

Aide

Commencer avec un pas de 0,1 puis affiner la recherche.
Pour α par exemple, dans le tableau de valeurs de la fonction f, fixer d'abord le pas d'incrémentation à 0,1 pour faire émerger rapidement les valeurs (-1) et $(-0,9)$.
Ensuite, modifier le pas d'incrémentation à 0,01 pour obtenir l'encadrement souhaité.



deg FONCTIONS

Fonctions | Graphique | Tableau

Régler l'intervalle

-1.6	-13.456
-1.5	-10.875
-1.4	-8.504
-1.3	-6.337
-1.2	-4.368
-1.1	-2.591
-1	-1
-0.9	0.411
-0.8	1.648

Exercice 14. Équation du 3e degré

Donner des encadrements au centième des solutions de l'équation

$$\frac{x^3}{3} + x^2 - 15x + 1 = 0$$

Aide

Poser $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 - 15x + 1$ puis reprendre la méthode de l'exercice précédent.

Partie V. Résoudre des équations et Python : 2 grands classiques à connaitre

Remarque

Les 2 grands classique sont la méthode de résolution d'équation par balayage et surtout par dichotomie

LINK : https://vu.fr/QLNww

Partie VI. Résoudre des inéquations

Méthode

Très classique au bac.
On cherche à résoudre une inéquation du type :

$$u(x) \leqslant v(x)$$

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = u(x) - v(x)$$

2. On étudie le signe de f.
3. Si f est positive ou nulle sur I alors $u \geqslant v$ ce qui permet de conclure.

Exercice 15. Étude de signe et inégalité

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x - 10$.

1. Démontrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $f(2) = 0$.
3. Donner le signe de f sur $\mathbb{R}$.
4. En déduire la résolution de l'inéquation $x^3 > 10 - x$.

Réponses
f est positive sur $[2\,;\,+\infty[$ et négative sinon. Donc $x^3 > 10 - x \iff f(x) > 0 \iff x \in]2\,;\,+\infty[$.

Exercice 16. Étude de signe et inégalité

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$.

1. Démontrer que f est croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. Calculer $f(1)$.
3. Donner le signe de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. En déduire les solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant \dfrac{1}{x}$.

Réponses
f est positive sur $[1\,;\,+\infty[$ et négative sur $]0\,;\,1]$. Donc $x^2 \leqslant \dfrac{1}{x} \iff f(x) \leqslant 0 \iff x \in]0\,;\,1[$.

Exercice 17. EPI : Résoudre une inéquation

Méthode

Reprenez les exercices 15 et 16 pour résoudre ce problème qui est ce que l'on nomme un EPI (Exercice à Prise d'Initiative)

Démontrer que pour réel x positif ou nul on a :

$$\sqrt{x} \leqslant \frac{x+1}{2}$$

Partie VII. Les autres grands classiques : position relative, fonction auxiliaire

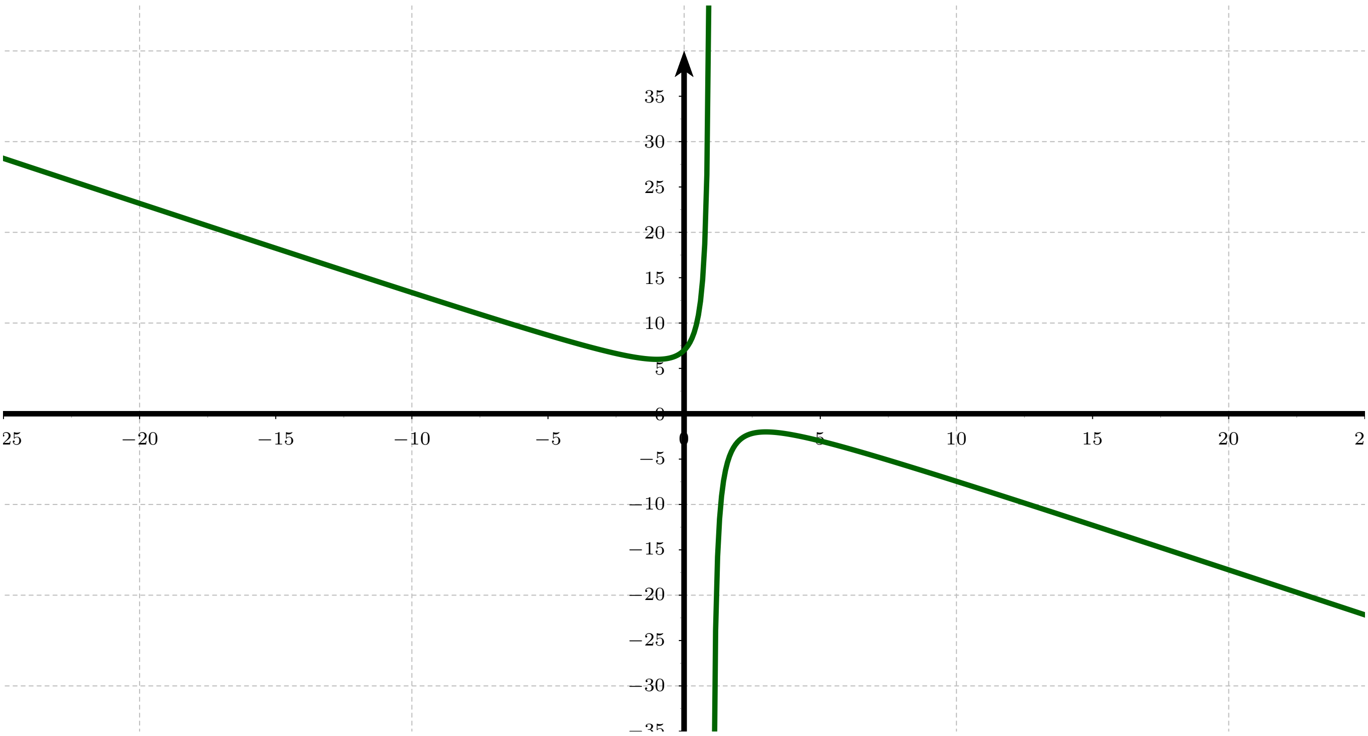
Exercice 18. Position relative (1)

On considère la fonction f définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty\ ;\ 1[\cup]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{-x^2+4x-7}{x-1}$$

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,
$$f(x) = -x+3-\frac{4}{x-1}$$
2. Δ est la droite d'équation $y=-x+3$. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.
3. f' est la fonction dérivée de f sur $\mathcal{D}_f$.
Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,
$$f'(x) = \frac{-(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$$
4. Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction de $x \in \mathcal{D}_f$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathcal{D}_f$.
5. Déterminer une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
6. Peut-on trouver une tangente à $\mathscr{C}_f$ de coefficient directeur égal à -1. Justifier.
7. On a ici tracé $\mathscr{C}_f$.



Construire la courbe représentative de la fonction h définie sur $\mathcal{D}_f$ par

$$h(x) = \left|f(x)\right|$$

Exercice 19. Position relative et méthode d'identification (2)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x+1}$.

1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
3. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la droite d'équation $y = x - 1$.

Exercice 20. Avec une fonction auxiliaire (1)

Méthode

Le classique des classiques au Bac (obligatoire de le retrouver en DS).
L'idée est d'étudier une fonction f dont la dérivée est compliquée dans le sens où on ne peut pas facilement étudier son signe.

1. La partie A de ce style d'exercice introduit une fonction g, dite auxiliaire et qui intervient en fait dans la dérivée de f.
2. A l'issue de la partie A, on a le signe de g.
3. Dans la partie B, on dérive f, on factorise afin d'obtenir g en facteur dans la dérivée.
4. Puis on étudie le signe de chaque facteur.
   Souvent, le signe de f' dépend uniquement de celui de g, mais pas toujours. Dans ce cas il faut faire un autre tableau de signe.
5. Il arrive aussi que l'on n'obtienne pas directement la valeur qui annule g (voir exercice 21). Dans ce cas on en détermine un encadrement par la méthode de balayage.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^3 + 3x - 4$$

1. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations.
2. Calculer $g(1)$ puis conjecturer le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1. Soit f la fonction de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ et définie par

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 4x^2}{x^2+1}$$

   Démontrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f est dérivable et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-2x \times g(x)}{(x^2+1)^2}$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Peut-on trouver des points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente est parallèle à la droite ? d'équation $y = -2x$?
   Si oui, préciser leurs abscisses respectives.

Exercice 21. (c) Avec une fonction auxiliaire (2)

On considère la fonction f définie sur $[0,5\,;\,10]$ par :

$$f : \begin{cases} [0,5\,;\,10] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad x & \longmapsto \quad f(x) = \dfrac{2\,x^3 - 3\,x^2 + x + 5}{x} \end{cases}$$

1. Calculer la dérivée de f et vérifier que pour tout x de $[0,5\,;\,10]$:

$$f'(x) = \frac{4\,x^3 - 3\,x^2 - 5}{x^2}$$

2. Étude d'une fonction auxiliaire g pour obtenir les variation de f.
On considère la fonction g définie sur $[0,5\,;\,10]$ par :

$$g(x) = 4\,x^3 - 3\,x^2 - 5$$

2. a. Expliquer rapidement pourquoi f' est du signe de g sur $[0,5\,;\,10]$.

2. b. Étudier les variations de la fonction g sur $[0,5\,;\,10]$.

2. c. Expliquez juste en utilisant le tableau de variations de g, pourquoi l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0,5\,;\,10]$.

Donner un encadrement au millième de α.

2. d. En déduire le signe de g sur $[0,5\,;\,10]$.

2. e. En déduire alors les variations de f sur $[0,5\,;\,10]$.

3. Applications économiques.
Le coût moyen de production d'une entreprise est donné par $f(x)$ où x est la quantité produite en milliers d'unités, variant de 0,5 à 10 milliers d'unités de production, et $f(x)$ est exprimée en centaines d'euros.

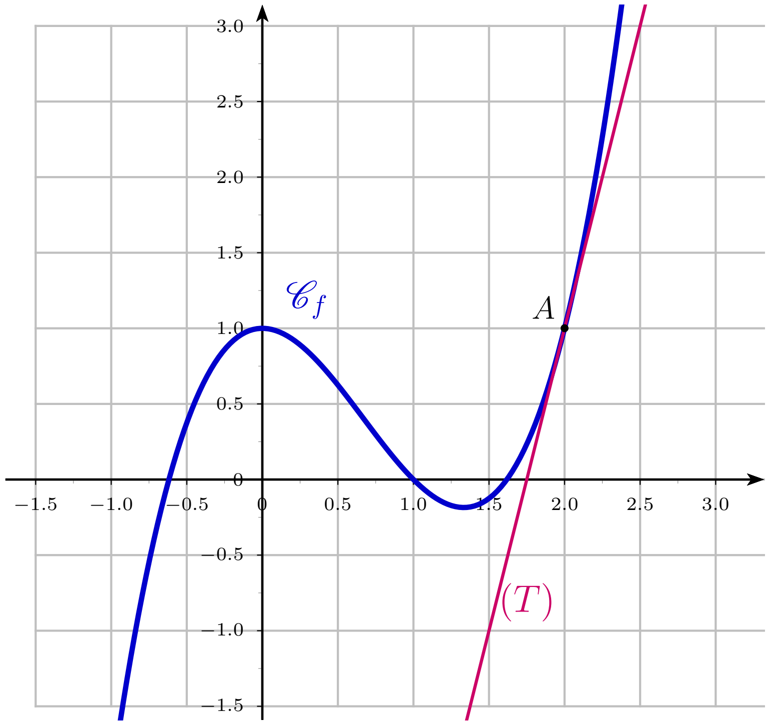
3. a. Déterminer une valeur approchée à l'unité, du coût moyen minimum de production.

3. b. Déterminer, à partir de quelle production, le coût moyen dépasse les 10 600 euros.

Partie VIII. Bilan

Exercice 22. D'étranges conjectures : Position relative par rapport à une tangente

Partie A : Lectures graphiques



Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Johan a des difficulté à régler l'écran d'affichage de sa calculatrice. Il a ainsi obtenu une partie du graphe de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f ainsi que (T), la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(2\ ;\ 1)$.

1. Par lecture graphique :

1. a. Conjecturer le tableau de variations de f.

1. b. Déterminer l'équation de la tangente (T).

1. c. Conjecturer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.

Partie B : Par le calcul

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$$

1. Établir les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer qu'une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 est $y = 4x - 7$.

3. Pour étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - (4x - 7)$$

3. a. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

3. b. Après avoir remarqué que $g(-2) = 0$, déduire du tableau de variation de g, le signe de g.

3. c. En déduire la position relative de de $\mathscr{C}_f$ par rapport à (T).

4. Vérifier ce résultat à l'aide de la calculatrice et ... comparer vos conclusions avec les conjectures émises dans la partie A.

Exercice 23. (c) Antilles sept 2014 (Exercice 3) — 6 points

Les deux parties sont indépendantes et peuvent être traitées séparément.
Un producteur de légumes souhaite s'implanter dans une commune et livrer directement chez le consommateur des paniers de 5 kg de légumes variés labellisés « *bio* ».

Partie A

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10.$$

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros. On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0\,;\,10]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

1. Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.

2. On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a $C"(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{8}x$.

2. a. Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0\ ;\ a]$ inclus dans $[0\,;\,10]$ sur lequel la fonction C'' est positive.

2. b. Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C ? Interpréter cette valeur de a en termes de coût.

Partie B

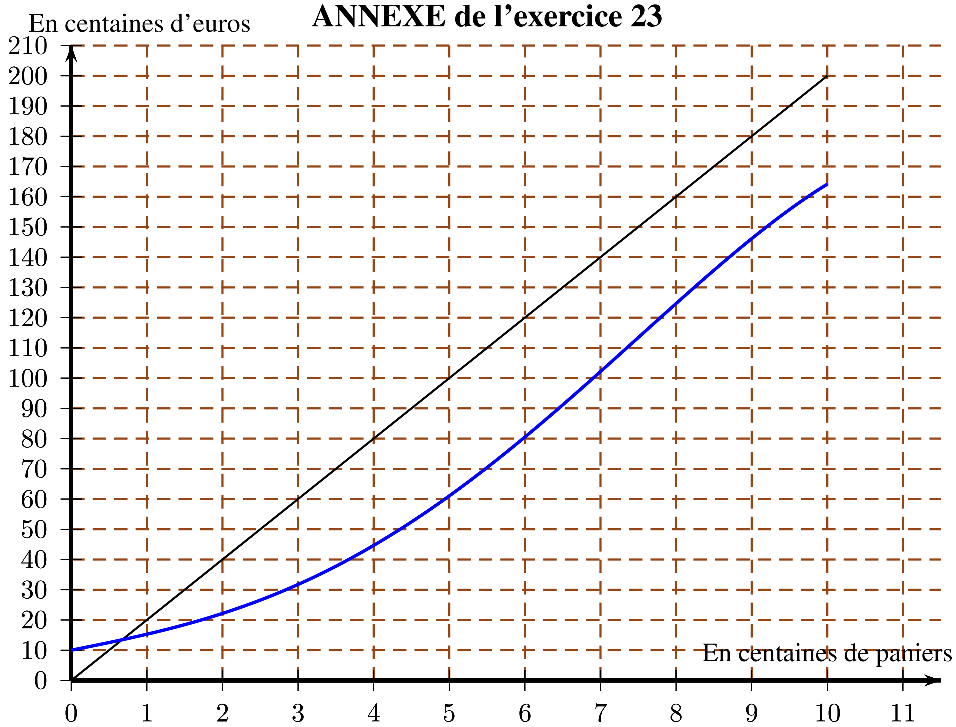
On admet que l'entreprise produit entre 0 et 1 000 paniers de légumes (par mois) et que tout ce qui est produit est vendu au prix de 20 euros le panier.
La recette mensuelle R, exprimée en centaines d'euros, ainsi que la fonction C sont représentées par les courbes C_R et C_C sur le graphique donné en annexe.
Par lecture graphique, répondre aux questions qui suivent.

1. Indiquer le nombre minimal de paniers que le producteur doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice. Donner une valeur approchée à la dizaine.

2. Indiquer le bénéfice réalisé par le producteur s'il produit et vend 500 paniers dans le mois.
Donner une valeur approchée à la centaine d'euros.

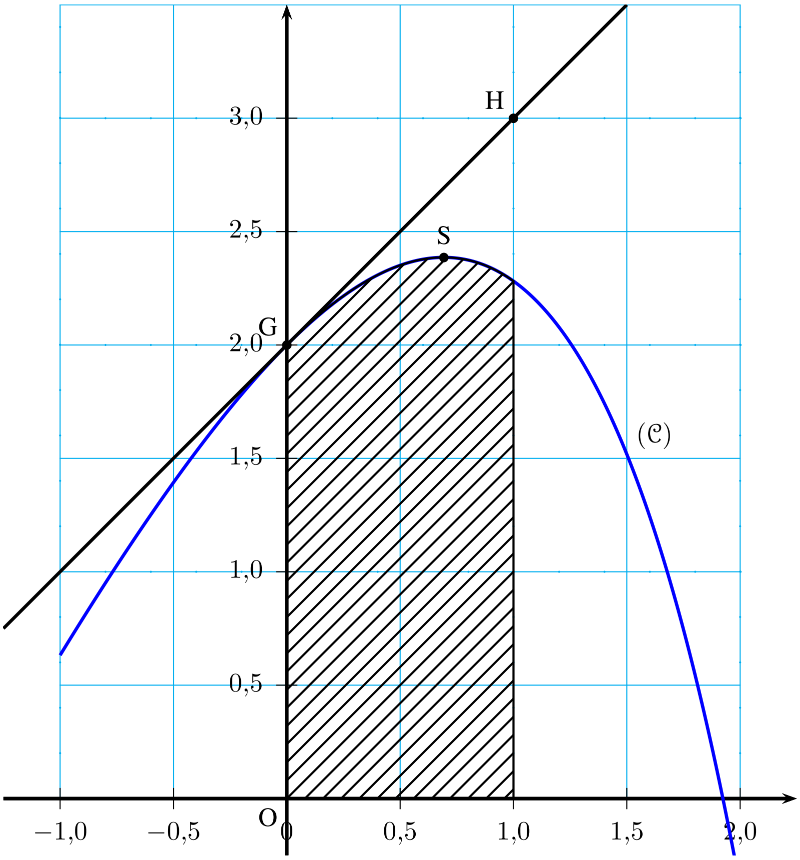
3. Le producteur peut-il espérer réaliser un bénéfice de 5 000 euros dans un mois ? Argumenter la réponse.

ANNEXE de l'exercice 23



Exercice 24. D'après Nouvelle Calédonie novembre 2014

La courbe $(\mathcal{C})$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-1\ ;2]$.



On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
Le point G a pour coordonnées (0 ; 2).
Le point H a pour coordonnées (1 ; 3).
La droite (GH) est la tangente à la courbe $(\mathcal{C})$ au point G.
La courbe $(\mathcal{C})$ admet une tangente horizontale au point S d'abscisse $0,7$.
Le domaine hachuré est délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $x = 1$ et la courbe $(\mathcal{C})$.

Partie A

Dans cette partie aucune justification n'est demandée. Par lecture graphique :

1. Donner les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.
2. Résoudre sur $[-1\ ;\ 2]$ l'inéquation $f'(x) \leqslant 0$.
3. Encadrer par deux entiers consécutifs l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique.

Réponses
(1.) $f(0) = 2$ *et* $f'(0) = 1$. *(2.)* $[0.7\ ;2]$. *(3.)* *entre* 2 *et* 3 *unité d'aire.*

Exercice 25. D'après Polynésie juin 2014 (Exercice 4)

Les antibiotiques sont des molécules possédant la propriété de tuer des bactéries ou d'en limiter la propagation.
Le tableau ci-dessous donne la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient.

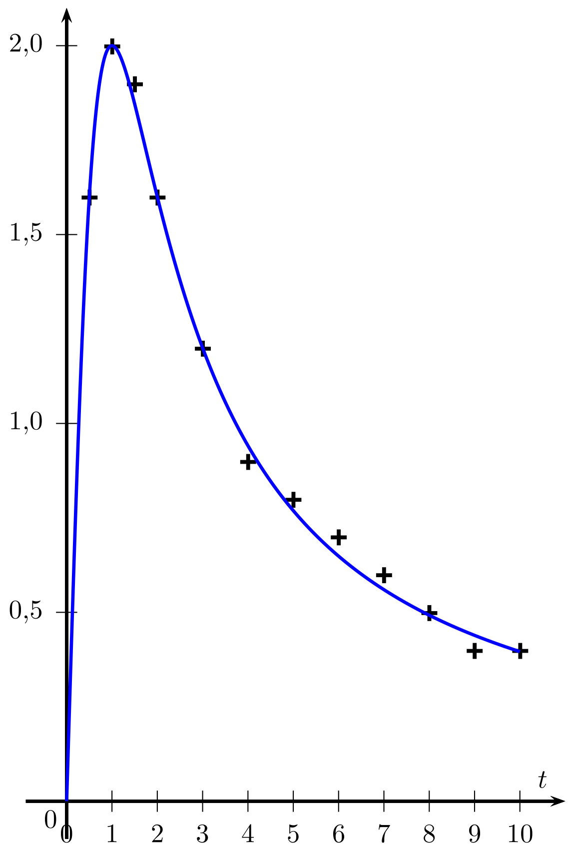
Temps en heure	0,5	1	1,5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Concentration en mg/l	1,6	2	1,9	1,6	1,2	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,4

Ces données conduisent à la modélisation de la concentration en fonction du temps par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par :

$$g(t) = \frac{4t}{t^2+1}.$$

Lorsque t représente le temps écoulé, en heures, depuis l'injection de l'antibiotique, $g(t)$ représente la concentration en mg/l de l'antibiotique. Le graphique suivant représente les données du tableau et la courbe représentative de la fonction g.

1. Par lecture graphique donner sans justification :
   1. a. les variations de la fonction g sur $[0\ ;\ 10]$;
   1. b. la concentration maximale d'antibiotique lors des 10 premières heures ;
   1. c. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration de l'antibiotique dans le sang est supérieure à 1,2 mg/l.
2. **2. a.** La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ et sa dérivée est g'. Montrer que :
   $$g'(t) = \frac{4\left(1-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$$
   2. b. En utilisant l'expression de $g'(t)$, montrer que la concentration maximale serait, avec cette modélisation, atteinte exactement 1 heure après l'injection.



3. On définit la CMI (Concentration Minimale Inhibitrice) d'un antibiotique comme étant la concentration au dessus de laquelle les bactéries ne peuvent plus se multiplier.
   La CMI de l'antibiotique injecté est $1,2$ mg/l.
   Déterminer, par le calcul, le temps d'antibiotique utile c'est-à-dire la durée pendant laquelle la concentration de l'antibiotique étudié est supérieure à sa CMI.

Réponses
(1.b.) *2mg/l* ***(1.c.)*** *[0, 4 ; 3]* ***(3.)*** *2 h 40 min*
Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Exercice 26. D'après Polynésie juin 2014 (Exercice 2)

Une entreprise fabrique chaque jour des objets. Cette production ne peut dépasser 700 objets par jour. On modélise le coût total de production par une fonction C. Lorsque x désigne le nombre d'objets fabriqués, exprimé en centaines, $C(x)$, le coût total correspondant, est exprimé en centaines d'euros. La courbe représentative de la fonction C est donnée en annexe.

Partie A

Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes en arrondissant au mieux. On laissera apparents les traits de construction sur la figure donnée en annexe.

1. Quel est le coût total de production pour 450 objets ?

2. Combien d'objets sont produits pour un coût total de 60 000 euros ? On considère que le coût marginal est donné par la fonction C' dérivée de la fonction C.

2. a. Estimer le coût marginal pour une production de 450 objets puis de 600 objets.

2. b. Que pensez-vous de l'affirmation : « le coût marginal est croissant sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ » ?

Partie B

Le prix de vente de chacun de ces objets est de 75 euros.

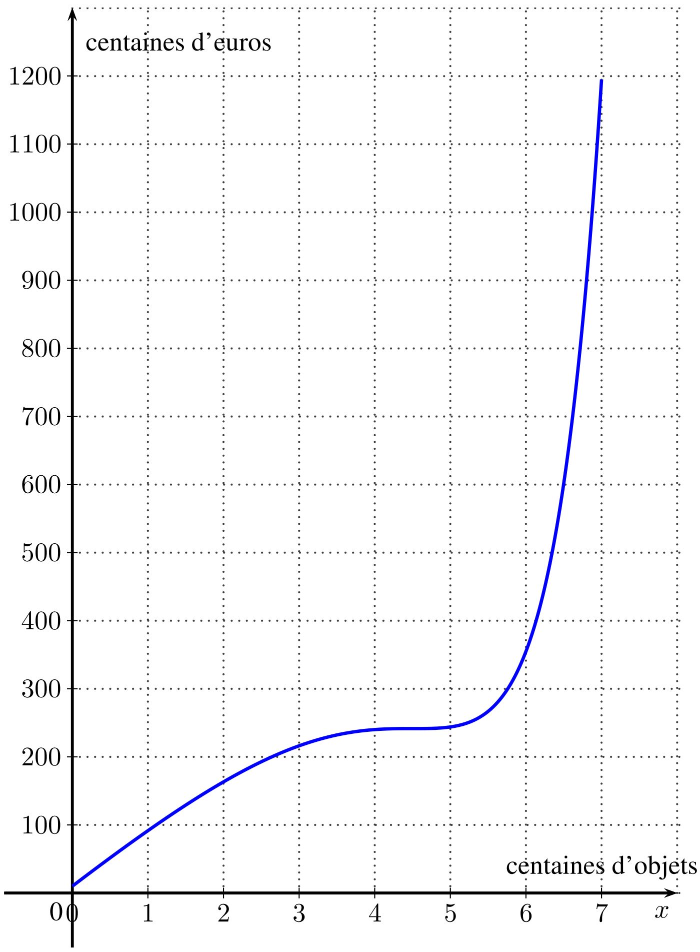
1. On note r la fonction « recette ». Pour tout nombre réel x dans l'intervalle $[0\ ;\ 7]$, $r(x)$ est le prix de vente, en centaines d'euros, de x centaines d'objets. Représenter la fonction r dans le repère donné en annexe.

2. En utilisant les représentations graphiques portées sur l'annexe, répondre aux questions qui suivent.

2. a. En supposant que tous les objets produits sont vendus, quelle est, pour l'entreprise, la fourchette maximale de rentabilité ? Justifier la réponse.

2. b. Que penser de l'affirmation : « il est préférable pour l'entreprise de fabriquer 500 objets plutôt que 600 objets » ?

ANNEXE de l'exercice 26



Réponses
Le corrigé détaillé sur www.math93.com

Exercice 27. Coût de fabrication

Dans une usine, le coût de fabrication unitaire d'un article est donné par la fonction f définie sur $[0,5\ ;\ 3]$ par

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x}$$

où x est le nombre de milliers d'articles fabriqués.
$f(x)$ est exprimé en millier d'euros.

1. Quel est le coût unitaire de fabrication de 500 articles ? 501 articles ?
2. Démontrer que la fonction f admet un minimum sur $[0,5\ ;\ 3]$.

Partie IX. Now We Can talk !

Exercice 28. (c-DM) Fonction composée et TVI

Théorème des valeurs intermédiaires

Cet exercice utilise le corollaire du théorème des valeurs intermédiaire qui sera vu en terminale.
Pour simplifier, si une fonction dérivable (même juste continue) est monotone sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ et passe d'une valeur positive à négative (ou le contraire), alors elle passe nécessairement par 0.
Elle prend même toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Théorème 2 (Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est une fonction définie, **continue** et strictement **monotone** sur un intervalle $[a\ ;\ b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a\ ;\ b]$.

***Remarque** : Le première démonstration rigoureuse de ce théorème est due au mathématicien autrichien Bernard Bolzano (1781-1848).*

Pour l'affirmation ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier avec soin votre raisonnement.
Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1

- Soit g une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ telle que :
  - la fonction g est dérivable et strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$;
  - On a : $g(0) = 10$ et $g(1) = 0$.
- Soit h une fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ telle que :
  - h est dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
  - On sait de plus que :
$$h(10) = 100 \text{ et } h(0) = -1$$
- Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 1]$ par :
$$f(x) = h\Big(g(x)\Big)$$

Alors l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[0\ ;\ 1]$.

Affirmation 2

Avec les même données.
Soit la fonction k définie par :
$$k(x) = \sqrt{f(x)}$$
Alors k est définie et dérivable sur $I = [0\ ;\ \alpha]$ avec α un réel de $]0\ ;\ 1[$

Exercice 29. (c-DM) De l'intérêt de la dérivée seconde

Soit f la fonction définie sur $[-5\ ;\ 5]$ par :

$$f(x) = x - \frac{2}{x^2+1}$$

1. Déterminer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de f, (c'est à dire la dérivée de la dérivée) sur $[-5\ ;\ 5]$.
2. Étudier le signe de f'' selon les valeurs de x.
3. En déduire le sens de variation de la dérivée f'.
4. Montrer que f' s'annule deux dois sur $[-5\ ;\ 5]$. Une fois en (-1) et une autre fois en α dont on donnera un encadrement.
5. En déduire le signe de f' puis les variations de f sur $[-5\ ;\ 5]$.

Exercice 30. Avec la valeur absolue

Définition 1 (Valeur absolue)

Pour x réel, la valeur absolue de x, notée $|x|$ est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a par exemple : $|-2| = 2$ et $|5| = 5$.

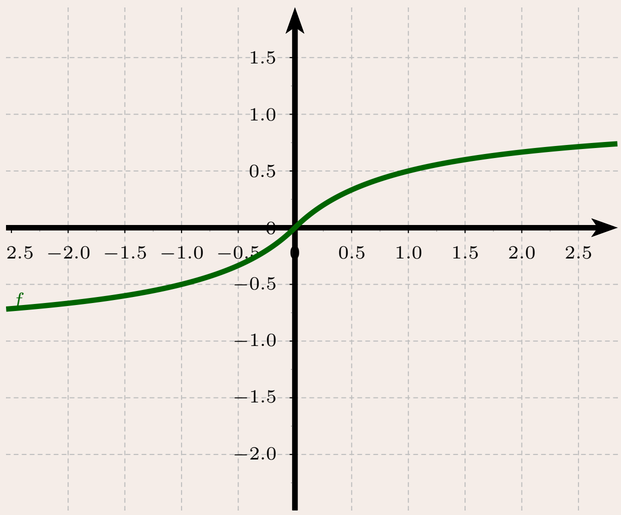
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}$$

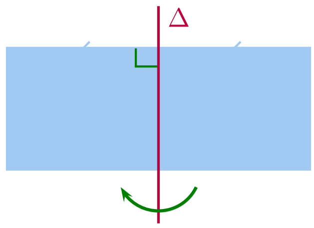
1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$, et calculer la dérivée $f'(x)$ sur chacun de ces intervalles.
2. f est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

Remarque

On peut visualiser $\mathscr{C}_f$ sur votre calculatrice (ou sur Geogebra).



Exercice 31. Volume et Aire Max



On fait tourner un rectangle de périmètre 60 cm autour de l'axe de symétrie Δ représenté ci-contre.
Déterminer les dimensions du rectangle pour que le solide de révolution ainsi obtenu ait :

1. le plus grand volume ;
2. la plus grande surface latérale.

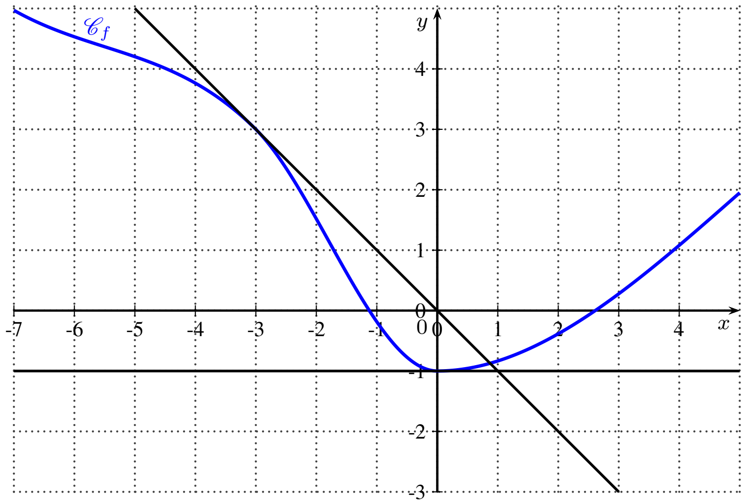
Fin du TD

Partie X. Correction

Correction de l'exercice 1 : Antilles juin 2016

Question 1

La représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ est tracée ci-dessous ainsi que les tangentes respectives aux points d'abscisses -3 et 0.



a. $f'(0) = -1$ **b.** $f'(-1) = 0$ **c.** $f'(-3) = -1$ **d.** $f'(-3) = 3$

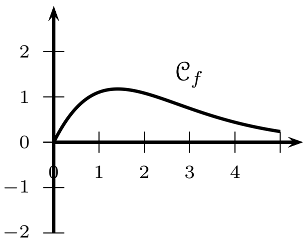
Question 1 (Réponse c)

a. $f'(0) = -1$ **b.** $f'(-1) = 0$ **c.** $f'(-3) = -1$ **d.** $f'(-3) = 3$

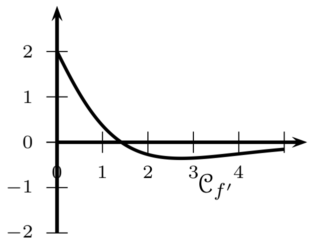
Preuve.

- Au point d'abscisse 0, la tangente est horizontale donc $f'(0) = 0$ ce qui exclu la réponse a.
- Au point d'abscisse -1, la tangente n'est pas horizontale donc $f'(-1) \neq 0$ ce qui exclu la réponse b.
- Au point d'abscisse -3, la tangente est de pente négative donc $f'(-3) < 0$ ce qui exclu la réponse d.
- La seule réponse possible à la question 1 est la réponse c.

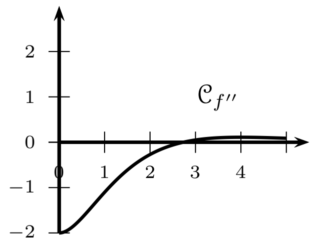
Correction de l'exercice 5



Courbe $\mathcal{C}_f$



Courbe $\mathcal{C}_{f'}$



Courbe $\mathcal{C}_{f''}$

On donne ci-dessus la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative dans un repère donné d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,5]$ ainsi que les courbes représentatives $\mathcal{C}_{f'}$ et $\mathcal{C}_{f''}$ respectivement de la dérivée f' et de la dérivée seconde f'' de la fonction f.
Les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

1. **Donner un encadrement par deux entiers consécutifs du nombre réel pour lequel la fonction f semble atteindre son maximum.**
   La fonction f semble atteindre son maximum en $x = m$ avec $\underline{1 < m < 2}$.
   La fonction dérivée f' s'annule entre 1 et 2 en changeant de signe, ce qui est la caractéristique d'un extremum local.

2. **Parmi les équations suivantes quelle est l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 ?**
   a. $y = x$, **b.** $y = 2x + 1$, **c.** $y = 2x$, **d.** $y = \frac{3}{4}x$.

   - Sur la courbe $\mathcal{C}_{f'}$: l'image de 0 est 2 par f' soit $f'(0) = 2$;
   - Sur la courbe $\mathcal{C}_f$: l'image de 0 est 0 par f soit $f(0) = 0$;
   - Équation
     L'équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a = 0$ est

     $$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

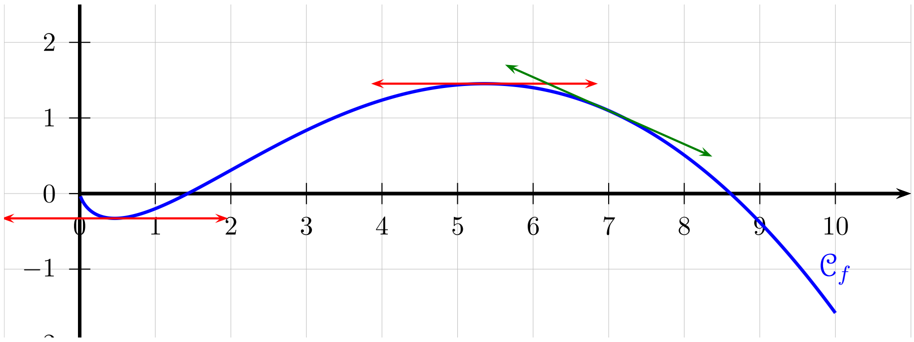
     Donc ici on obtient :

     $$\left\{\begin{array}{ll} a & = 0 \\ f(0) & = +0 \\ f'(0) & = 2 \end{array}\right. \;\Bigg|\; \Rightarrow \ (T)\ :\ y = 2 \times (x - 0) + 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = 2x}$$

3. **Que pensez-vous de l'affirmation suivante : "La fonction dérivée f' est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 5]$".**
   La fonction dérivée seconde f'' est visiblement positive sur $[3\,;\,5]$ donc la fonction dérivée f' est croissante sur cet intervalle.

Correction de l'exercice 6

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;\ 10]$ dont la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



Question 2 (Réponse b)

Le nombre de solutions sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ est égal à :

a. 1 | $\boxed{\textbf{b. } 2}$ | **c.** 3

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Les solutions sur l'intervalle $]0\,;\,10]$ de l'équation $f'(x) = 0$ sont donc les abscisses des points de la courbe qui admettent une tangente horizontale. Ils sont au nombre de 2 car la courbe semble posséder deux tangentes horizontales sur cet intervalle (en rouge).

Question 3 (Réponse c)

Le nombre réel $f'(7)$ est :

a. nul | **b.** strictement positif | $\boxed{\textbf{c. } \text{strictement négatif}}$

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Le nombre $f'(7)$ est donc négatif car la tangente à la courbe au point d'abscisse 7 semble être de coefficient directeur strictement négatif (en vert).

Question 4 (Réponse c)

La fonction f' est :

a. croissante sur $]0\,;\,10]$ | **b.** croissante sur $[4\,;\,7]$ | $\boxed{\textbf{c. } \text{décroissante sur } [4\,;\,7]}$

Preuve.
Le nombre dérivé $f'(x)$ es le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x. Sur l'intervalle $[4\,;\,7]$, le coefficient directeur des tangentes à la courbe ont des coefficients directeurs de plus en plus petit, donc la fonction f' est bien décroissante sur cet intervalle.

Correction de l'exercice 23 : Antilles, Septembre 2014

Partie A

La production mensuelle de légumes permettra de livrer au maximum 1 000 paniers par mois. Le coût total de production est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0\,;10]$ par :

$$C(x) = -\frac{1}{48}x^4 + \frac{5}{16}x^3 + 5x + 10$$

Lorsque x est exprimé en centaines de paniers, $C(x)$ est égal au coût total exprimé en centaines d'euros. On admet que, pour tout nombre x de l'intervalle $[0\ ;\ 10]$, le coût marginal est donné par la fonction $C_m = C'$ où C' est la fonction dérivée de C.

1. **Calculer $C_m(6)$, le coût marginal pour six cents paniers vendus.**
   La fonction polynôme C est définie et dérivable sur $[0\ ;\ 10]$. Pour tout réel x de cet intervalle on a :

$$C'(x) = -\frac{4}{48}x^3 + \frac{15}{16}x^2 + 5 = -\frac{1}{12}x^3 + \frac{15}{16}x^2 + 5$$

   Donc

$$C_m(6) = C'(6) = -\frac{1}{12}6^3 + \frac{15}{16}6^2 + 5 = \frac{83}{4} = 20,75$$

   Le coût marginal pour 600 paniers vendus est donc, exprimé en centaines d'euros : $C_m(6) = 20,75$.

2. **On note C'' la fonction dérivée seconde de C et on a $C''(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{8}x$.**

   2. a. Déterminer le plus grand intervalle de la forme $[0\ ;\ a]$ inclus dans $[0\ ;\ 10]$ sur lequel la fonction C'' est positive.
   On résout dans $]0\,;\,10]$ l'inéquation $C''(x) \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} C''(x) \geqslant 0 &\iff -\frac{1}{4}x^2 + \frac{15}{8}x \geqslant 0 \\ &\iff -2x^2 + 15x \geqslant 0 \ \ \text{(on a multiplier les 2 membres par 8)} \\ C''(x) \geqslant 0 &\iff x(-2x+15) \geqslant 0 \end{aligned}$$

   La fonction $x \longrightarrow x(-2x+15)$ alors une fonction polynôme de degré 2 dont les racines sont $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 7.5 \end{cases}$.

   L'expression est alors du signe de $a = -2$ soit négative à l'extérieur des racines, et positive sur l'intervalle $[0\,;\,7,5]$.
   Le plus grand intervalle de la forme $[0\,;\,a]$ dans lequel la fonction C'' est positive est donc $[0\,;\,7,5]$.

   2. b. Que peut-on dire du point d'abscisse a de la courbe de la fonction C ? Interpréter cette valeur de a en termes de coût.
   Pour $x > 7,5$, $C''(x) < 0$ donc C' est décroissante et le coût marginal C' diminue.

Partie B

On admet que l'entreprise produit entre 0 et 1 000 paniers de légumes (par mois) et que tout ce qui est produit est vendu au prix de 20 euros le panier. La recette mensuelle R, exprimée en centaines d'euros, ainsi que la fonction C sont représentées par les courbes $\mathcal{C}_R$ et $\mathcal{C}_C$ sur le graphique donné en annexe page 23.

1. **Indiquer le nombre minimal de paniers que le producteur doit produire et vendre pour réaliser un bénéfice. Donner une valeur approchée à la dizaine.**
   Le producteur réalise un bénéfice quand la recette est supérieure au coût, autrement dit quand la courbe $\mathcal{C}_R$ est au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_C$; cela se produit à partir de 70 paniers.

2. **Indiquer le bénéfice réalisé par le producteur s'il produit et vend 500 paniers dans le mois. Donner une valeur approchée à la centaine d'euros.**
   Le bénéfice réalisé pour la vente de 500 paniers est de $R(5)-C(5)$ centaines d'euros soit à peu près $40 \times 100 = 4\,000$ euros.

3. **Le producteur peut-il espérer réaliser un bénéfice de 5 000 euros dans un mois ? Argumenter la réponse.**
   Pour réaliser un bénéfice d'au moins 5 000 euros, il faut que l'écart entre R et C soit au moins de 50. En traçant la droite d, parallèle à la droite $\mathcal{C}_R$, il faudrait que la courbe $\mathcal{C}_C$ passe en-dessous de la droite d.

   Ce n'est pas le cas donc le producteur ne peut pas espérer un bénéfice supérieur à 5 000 euros.

Correction de l'exercice 13 : Équation de degré 3

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;\,10]$ par : $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$.

1. Étudier les variations de f sur $[-2\,;\,10]$

Corrigé

f définie et dérivable sur $[-2\,;\,10]$ car c'est une fonction polynôme.

Pour tout réel x de $[-2\,;\,10]$ on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4)$$

Donc f' a deux racines évidentes, 0 et 4 et puisque le coefficient de x^2 est $3 > 0$ on a le tableau de signe suivant (positif à l'extérieur des racines)

x	-2	α	0	β	4	γ	10
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-26 ↗	0 ↗	6 ↘	0 ↘	-26 ↗	0 ↗	406

2. Montrer juste à l'aide du tableau de variations que l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions sur $[-2\,;\,10]$.

Une solution unique α sur cet $[-2\,;\,0]$, β sur cet $[0\,;\,4]$ et γ sur $[4\,;\,10]$.

Corrigé

x	-2	α	0	β	4	γ	10
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f	-26 ↗	0 ↗	6 ↘	0 ↘	-26 ↗	0 ↗	406

- Sur $[-2\,;\,0]$ f est croissante et passe de (-26) à 6 donc elle passe nécessairement par 0 (si elle est continue) pour une valeur $x = \alpha \in]-2\,;\,0[$;
- Sur $[0\,;\,4]$ f est décroissante et passe de 6 à (-26) donc elle passe nécessairement par 0 (si elle est continue) pour une valeur $x = \beta \in]0\,;\,4[$;
- Sur $[4\,;\,10]$ f est croissante et passe de (-26) à 406 donc elle passe nécessairement par 0 (si elle est continue) pour une valeur $x = \gamma \in]4\,;\,10[$.

3. Donner un encadrement à $0,01$ près de α,β et γ par balayage avec la calculatrice.

Aide

Commencer avec un pas de 0,1 puis affiner la recherche.

Pour α par exemple, dans le tableau de valeurs de la fonction f, fixer d'abord le pas d'incrémentation à 0,1 pour faire émerger rapidement les valeurs (-1) et $(-0,9)$.

Ensuite, modifier le pas d'incrémentation à 0,01 pour obtenir l'encadrement souhaité.

-1.6	-13.456
-1.5	-10.875
-1.4	-8.504
-1.3	-6.337
-1.2	-4.368
-1.1	-2.591
-1	-1
-0.9	0.411
-0.8	1.648

Corrigé

Correction de l'exercice 21 : Avec une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie sur $[0,5\,;\,10]$ par :

$$f : \begin{cases} [0,5\,;\,10] & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ \qquad x & \longmapsto \quad f(x) = \dfrac{2\,x^3 - 3\,x^2 + x + 5}{x} \end{cases}$$

1. **[1.5 pt] Calculer la dérivée de f et vérifier que pour tout x de $[0,5\,;\,10]$: $f'(x) = \dfrac{4\,x^3 - 3\,x^2 - 5}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$**

La fonction f est définie et dérivable surl'intervalle $[0,5\,;\,10]$. Elle est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$u(x) = 2\,x^3 - 3\,x^2 + x + 5$	$u'(x) = \left(6\,x^2 - 6\,x + 1\right)$
$v(x) = x$	$v'(x) = 1$

Pour tout réel x de $[0,5\,;\,10]$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\left(6\,x^2 - 6\,x + 1\right) \times (x) - \left(2\,x^3 - 3\,x^2 + x + 5\right) \times (1)}{(x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3 - 6x^2 + x - 2x^3 + 3x^2 - x - 5}{(x)^2}$$

$$\underline{\forall x \in [0,5\,;\,10]}\,;\ \boxed{f'(x) = \frac{4\,x^3 - 3\,x^2 - 5}{(x)^2}}$$

2. Étude d'une fonction auxiliaire g.

2. a. [0.5 pt] Expliquer rapidement pourquoi f' est du signe de g sur $[0,5\,;\,10]$.
Puisque x^2 le dénominateur de la dérivée est strictement positif sur $[0,5\,;\,10]$, f' est du signe de g sur $[0,5\,;\,10]$.

2. b. [2 pt] Étudier les variations de la fonction g sur $[0,5\,;\,10]$.
La fonction g est définie et dérivable sur $[0,5\,;\,10]$ car c'est une fonction polynôme. On a facilement pour tout réel x de $[0,5\,;\,10]$:

$$g'(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x - 1)$$

On obtient alors une fonction polynôme du second degré dont les racines sont évidentes :

$$g'(x) = 0 \iff 6x(2x-1) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \notin [0,5\,;\,10] \\ \text{ ou} \\ x = \dfrac{1}{2} \in [0,5\,;\,10] \end{cases}$$

g' est alors du signe de $a = 12 >$ (le coefficient de x^2) à l'extérieur des racines soit :

x	0.5	α	10
Signe de $g'(x)$		$+$	
Variations de g	-5.25 ↗	0	↗ $3\,695$

2. c. [1.5 pt] Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0,5\,;\,10]$ et en donner un encadrement au millième.

- Justification : D'après le tableau de variations, la fonction g est strictement croissante sur $[0,5\,;\,10]$, dérivable (donc continue) et passe d'une valeur négative en 0,5 à une valeur positive en 10. Donc nécessairement elle prend la valeur 0 en α qui est compris entre 0,5 et 10.

> **Remarque**
> En terminale, on utilisera le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires pour résoudre cette question

- Valeur approchée .
  Pour avoir un encadrement de α, on peut utiliser la fonction TABLE de la calculatrice.
  - Avec un pas de $\Delta = 0.001$ on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lll} g(1,393) & \approx & -0,009 < 0 \\ g(1,394) & \approx & 0,006 > 0 \end{array}\right| \text{, donc } \underline{1,393 \ < \alpha < 1,394.}$$

2. d. [1 pt] En déduire le signe de g sur $[0,5\,;\ 10]$.

On a vu que g était croissante sur $[0,5\,;\ 10]$:

x	0.5		α		10
Variations de g	-5.25	↗	0	↗	3 695

Donc on a :

x	0.5		$1.393 < \alpha < 1.394$		10
Signe de $g(x)$		$-$	0	$+$	

2. e. [1 pt] En déduire alors les variations de f sur $[0,5\,;\ 10]$.

On a démontré lors de la question (2.a.) que le signe de g nous donnait celui de f' donc :

x	0.5		$1.393 < \alpha < 1.394$		10
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	10	↘	$f(\alpha)$	↗	171.5

3. Applications économiques.

Le coût moyen de production d'une entreprise est donné par $f(x)$ où x est la quantité produite en milliers d'unités, variant de 0,5 à 10 milliers d'unités de production, et $f(x)$ est exprimée en centaines d'euros.

3. a. [1 pt] Déterminer une valeur approchée à l'unité, du coût moyen minimum de production.

D'après la question (3.), le coût moyen de production est obtenu pour une production comprise entre 1 393 et 1 394 unités ! On n'a donc que deux choix possibles, testons-les :

$$\begin{cases} f(1,393) \approx 4,291273 \\ f(1,394) \approx 4,291273 \end{cases}$$

On peut donc affirmer, qu'avec cette modélisation, le coût moyen minimum de production est de 4,291273 centaines d'euros soit 429 euros en arrondissant à l'unité d'euros.

3. b. [1 pt] Déterminer, à partir de quelle production, le coût moyen dépasse les 10 600 euros.

- Sur $[0\,;\ \alpha]$, le maximum de f est 10 donc le coût moyen ne dépasse pas 106 centaines d'euros.

- La fonction f est strictement croissante et continue sur $[\alpha\,;\ 10]$ et la calculatrice donne :

$$\begin{cases} f(8,056) \approx 105.9803175 \\ f(8,056) \approx 106.0096166 \end{cases}$$

Le coût moyen dépasse les 10 600 euros à partir d'une production de 8 056 unités.