Math93.com

TD 1 - 1re Spécialité Maths
La Fonction Exponentielle

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.

Table des matières

Partie I. A partir de la définition proposée

Exercice 1. Caractérisation fonctionnelle de la fonction exponentielle

On cherche à démontrer le théorème suivant qui montre que l'on aurait pu définir la fonction exponentielle comme l'unique fonction continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et vérifiant la relation fonctionnelle avec la condition $f'(0) = 1$.

Théorème 1

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Les trois propositions suivantes sont équivalentes.

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

2. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et telle que pour tous réels x et y on a :

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{et} \quad f'(0) = 1$$

1. $\underline{(1) \Longrightarrow (2)}$.
Cette implication est partiellement démontrée en cours. On applique juste la bonne propriété. Il reste juste à prouver que $f'(0) = 1$ ce qui est assez aisé.

2. $\underline{(2) \Longrightarrow (1)}$.
On suppose que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable en 0 et telle que pour tous réels x et y on a :

$$f(x+y) = f(x)f(y) \quad \text{et} \quad f'(0) = 1$$

2. a. Montrer que pour tout x réel et h réel non nul on a :

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x) \times \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

2. b. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f' = f$.

2. c. Conclure.

Partie II. Propriétés de la fonction exponentielle

Propriété 1 (Propriétés de la fonction exponentielle)

Pour tous réels x et y :

1. $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{y}$
2. $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}$
3. $\mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{y}}$
4. $\mathrm{e}^{xy} = (\mathrm{e}^{x})^{y}$

Exercice 2. Propriétés de la fonction exponentielle

Simplifier les expressions suivantes pour x réel quelconque en les exprimant sous la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$ où u sera un polynôme.

- $A(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-3x}}{(\mathrm{e}^{-x})^2}$
- $B(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} \times \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{3x}}$
- $C(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^{3x})^2}{\mathrm{e}^{3x+1}}$
- $D(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^{3x})^2 \times \mathrm{e}^{-3x}}{\mathrm{e}^{-2x} \times (\mathrm{e}^{2x})^2}$

Réponses
$A(x) = e^{0} = 1$; $B(x) = e^{-3x}$; $C(x) = e^{3x-1}$; $D(x) = e^{x}$

Exercice 3. Propriétés de la fonction exponentielle

Démontrer, pour tout réel x, les égalités suivantes :

1. $\dfrac{2\,\mathrm{e}^{-2x}}{1+\mathrm{e}^{-2x}} = \dfrac{2}{\mathrm{e}^{2x}+1}$
2. $\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}}\right)^2 = (1+\mathrm{e}^{x})^2 \times \mathrm{e}^{-2x}$
3. $\dfrac{2-\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1} = 2 - \dfrac{3}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

Partie III. Équations et inéquations

Propriété 2 (Equation et inéquation)

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tous réels x et y on a :

1. $\mathrm{e}^{x} = \mathrm{e}^{y} \iff x = y$
2. $\mathrm{e}^{x} < \mathrm{e}^{y} \iff x < y$

Par ailleurs : on note $\ln(k)$ et on lit **logarithme népérien** de $k > 0$, la solution unique de l'équation : $\mathrm{e}^{x} = k$.

$$\mathrm{e}^{x} = k \iff x = \ln k \quad (k > 0)$$

On en déduit que : $\ln 1 = 0$ et $\ln \mathrm{e} = 1$

Exercice 4. Équations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $(\mathrm{e}^{x})^2 = \mathrm{e}^{x^2+1}$
2. $(1+\mathrm{e}^{x}) \times (2-x^2) = 0$
3. $(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{x}) \times \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}} - \mathrm{e}^{x}\right) = 0$
4. $\dfrac{3\,\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+9} = 2$

Réponses
$S_1 = \{1\}$; $S_2 = \{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$; $S_3 = \{0 ; 1\}$; $S_4 = \{\ln 19\}$

Exercice 5. Équation et changement de variable

Méthode 1

On cherche à résoudre l'équation :

$$e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0$$

1. On effectue le changement de variable $X = e^{x}$.
On remarque tout d'abord que :

$$e^{2x} + 2e^{x} - 3 = 0 \Longleftrightarrow (e^{x})^2 + 2e^{x} - 3 = 0$$

On pose alors $X = e^{x}$ et donc :

$$(e^{x})^2 + 2e^{x} - 3 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} X = e^{x} \\ X^2 + 2X - 3 = 0 \end{cases}$$

2. On va résoudre l'équation en X.
L'expression $\left(X^2 + 2X - 3\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(aX^2 + bX + c\right)$. Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -3 \end{array} \right| \Longrightarrow \Delta = 16 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $X \longmapsto \left(X^2 + 2X - 3\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$X_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} = -3 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2} = 1$$

3. On en déduit les solutions en x en résolvant les équations $X_1 = e^{x}$ et $X_2 = e^{x}$.

- On a
$$X_1 = -3 \Longleftrightarrow e^{x} = -3$$
N'admet pas de solution car l'exponentielle est toujours strictement positive sur $\mathbb{R}$.

- On a
$$X_2 = 1 \Longleftrightarrow e^{x} = 1 = e^{0} \Longleftrightarrow x = 0$$

4. Conclusion : l'équation admet une unique solution $x = 0$.

Suivez le modèle pour résoudre les équations suivantes :

1. $e^{2x} + 4e^{x} = 5$

2. $e^{x}\left(e^{2x} + e^{x} - 2\right) = 0$

3. $\left(e^{x} - e\right)\left(e^{2x} + 3e^{x} + 2\right) = 0$

Réponses
$S_1 = \{0\}$; $S_2 = \{0\}$; $S_3 = \{1\}$

Exercice 6. Systèmes d'équations

Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} e^{x} e^{y} = \dfrac{1}{e} \\ (e^{x})^{y} = e^{-6} \end{cases}$

2. $\begin{cases} y e^{x} + e^{x} = 1 \\ y e^{2x} + e^{x+1} = e \end{cases}$

3. $(*) \begin{cases} e^{2x+1} - e^{y} = -e \\ e^{2x+1} + e^{y} = 5e \end{cases}$

Réponses

$S_1 = \{(2\,;\,-3)\,;\,(-3\,;\,2)\}$ $\quad S_2 = \{(0\,;\,0)\,;\,(1\,;\,e^{-1} - 1)\}$; $S_3 = \left\{\left(\frac{\ln 2}{2}\,;\,1 + \ln 3\right)\right\}$

Exercice 7. Inéquation et étude de signe

Méthode 2

Pour étudier le signe ou résoudre une inéquation comportant des termes en e^{x} on va chercher à factoriser l'expression au maximum en exhibant des facteurs strictement positifs ou positifs. Le fait que l'exponentielle soit strictement positive sur $\mathbb{R}$ est souvent invoqué. L'application principale de cela sera évidemment l'étude du signe de la dérivée ou de la dérivée seconde (pour étudier la convexité).

Par exemple étudions le signe de l'expression A définie sur $[-10\,;\,20]$ par : $A(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^{x}+1)\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{x^2+1}$.

1. On exhibe les facteurs strictement positifs sur l'intervalle d'étude.
   - La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc à fortiori sur $[-10\,;\,20]$ on a : $(\mathrm{e}^{x}+1) > 0$.
   - Sur $[-10\,;\,20]$ on a aussi : $x^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2+1 \geqslant 1 > 0$.
   - De ce fait $A(x)$ est du signe du facteur $\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)$.
2. Étude du signe de $\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)$.
   On a pour tout réel x de $[-10\,;\,20]$:

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)=0 &\iff \mathrm{e}^{2x}=1\\ &\iff \mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{0}\\ &\iff 2x=0\\ &\iff x=0\in[-10\,;\,20]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)>0 &\iff \mathrm{e}^{2x}>1\\ &\iff \mathrm{e}^{2x}>\mathrm{e}^{0}\end{aligned}$$

or exp strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\iff 2x>0\\ &\iff x>0 \text{ et } x\in[-10\,;\,20]\end{aligned}$$

Conclusion : **Attention**, on se ramène bien à l'ensemble de définition $[-10\,;\,20]$ donc :

$$\forall x\in[-10\,;\,20] \quad : \quad \begin{cases}\mathrm{e}^{2x}-1>0 \iff 0<x\leqslant 20\\ \mathrm{e}^{2x}-1=0 \iff x=0\end{cases} \quad \Longrightarrow \mathrm{e}^{2x}-1<0 \iff -10\leqslant x<0$$

3. Tableau de signe de $A(x)$.
   On a montré que A était du signe du facteur $(\mathrm{e}^{2x}-1)$ donc :

x	-10		0		20
Signe de $A(x)$		$-$	0	$+$	

4. Applications :
   - Avec $A(x) = f'(x)$: On applique cette méthode si l'expression est la dérivée de f par exemple pour obtenir les variations de f.
   - On peut résoudre l'inéquation $A(x) > 0$ ou $A(x) \leqslant 0$ par exemple : $A(x) > 0 \iff x \in]0\,;\,20]$

1. Résoudre sur l'intervalle $[-10\,;\,30]$ l'inéquation :

$$\frac{(x^2+\mathrm{e})(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e})}{(x^2+1)^2} \geqslant 0$$

2. Étudier sur l'intervalle $[0\,;\,30]$ le signe de l'expression : $B(x) = \dfrac{x\,\mathrm{e}^{x}+(2x-6)\,\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{3x}+\mathrm{e}}$.

Réponses
$S_1 = [-10\,;\,-1]$, $B(x)<0 \iff x\in[0\,;\,2[$ *et* $B(x)>0 \iff x\in\,]2\,;\,30]$

Partie IV. Dérivation et étude de fonctions

Exercice 8. Dérivation ... Un peu de gammes

Théorème 2

Soit u et v deux fonctions dérivables sur I.

I	f de la forme	Dérivée de f	Notation « abusive »
I	$u \times v$	$u'v + uv'$	$(u \times v)' = u'v + uv'$
I avec v non nul sur I	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
I avec v non nul sur I	$\dfrac{1}{v}$	$\dfrac{-v'}{v^2}$	$\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$
I	u^2	$2u'u$	$(u^2)' = 2u'u$
I avec u positif non nul sur I	$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
I	u^n où $n \in \mathbb{N}^*$	$n\, u'\, u^{n-1}$	$(u^n)' = n\, u'\, u^{n-1}$
I	e^{u}	$u'\ \mathrm{e}^{u}$	$(\mathrm{e}^{u})' = u'\ \mathrm{e}^{u}$

Montrer que les dérivées des fonctions suivantes, définies et dérivables sur un intervalle I à déterminer, peuvent s'écrire sous cette forme.

$f_1(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2+1}$	$f_1'(x) = \left(2x^2+1\right)\,\mathrm{e}^{x^2+1}$
$f_2(x) = x^2\,\mathrm{e}^{x^3} + \mathrm{e}^{-1}$	$f_2'(x) = \left(3x^4+2x\right)\,\mathrm{e}^{x^3}$
$f_3(x) = \mathrm{e}^{-x} \times \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}$	$f_3'(x) = \mathrm{e}^{x}$
$f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{-x}} + \dfrac{1}{\mathrm{e}}$	$f_4'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x}$
$f_5(x) = -\,\mathrm{e}^{2x} + 2\,\mathrm{e}^{x}$	$f_5'(x) = 2e^{x}\,(1-e^{x})$
$f_6(x) = 1 - \mathrm{e}^{2x} - 2x\,\mathrm{e}^{2x}$	$f_6'(x) = -4e^{2x}\,(1+x)$

$f_7(x) = (1+2x)\,\mathrm{e}^{1+2x}$	$f_7'(x) = 4(1+x)\,\mathrm{e}^{1+2x}$
$f_8(x) = \dfrac{3\,\mathrm{e}^{x}+2}{x}$	$f_8'(x) = \dfrac{3x\,\mathrm{e}^{x} - 3\,\mathrm{e}^{x} - 2}{x^2}$
$f_9(x) = \dfrac{0,01}{1+\mathrm{e}^{-2x}}$	$f_9'(x) = \dfrac{0,02\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(1+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2}$
$f_{10}(x) = (1-2x)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$	$f_{10}'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(-2x^2+2x-1\right)}{x^2}$
$f_{11}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+2x+1}}{\mathrm{e}^{x^2+x+1}}$	$f_{11}'(x) = \mathrm{e}^{x}$
$f_{12}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$	$f_{11}'(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{x}}{\left(\mathrm{e}^{x}+1\right)^2}$

Exercice 9. Etude des variations (c)

1. On considère la fonction f définie et dérivable sur $I = [0\,;\,100]$ par :

$$f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-3x+1}$$

Déterminer la dérivée de la fonction f , puis dresser le tableau de variation de f. Vous donnerez dans ce tableau les valeurs exactes de f aux bornes de l'intervalle.

2. On considère la fonction g définie et dérivable sur $J = [1\,;\,50]$ par :

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^{1-5x}}{x}$$

Déterminer la dérivée de la fonction g , puis dresser le tableau de variation de g. Vous donnerez dans ce tableau les valeurs exactes de g aux bornes de l'intervalle.

3. On considère la fonction h définie et dérivable sur $[0\,;\,10]$ par :

$$h(x) = x^2\ \mathrm{e}^{1-2x}$$

Déterminer la dérivée de la fonction h , puis dresser le tableau de variation de h. Vous donnerez dans ce tableau les valeurs exactes de h aux bornes de l'intervalle.

Réponses
$f'(x) = (2-6x)\,e^{-3x+1}$; *f croissante sur* $\left[0\,;\,\frac{1}{3}\right]$ *et décroissante sinon.*
$g'(x) = \dfrac{(-5x-1)\,e^{1-5x}}{x^2}$; *g décroissante sur* $[1\,;\,50]$.
$h'(x) = \left(2x-2x^2\right)\ e^{1-2x}$; *h croissante sur* $[0\ ;\ 1]$ *et décroissante sur* $[1\,;\,10]$. .

Exercice 10. Un problème de tangentes 1 (c)

f et g sont des fonctions définies sur R par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{x}}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$.

1. Étudier le sens de variation de chaque fonction.

2. Étudier les intersections éventuelles de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

3. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune en O.

Exercice 11. Un problème de tangentes 2 (c)

Soit f définie sur R par :

$$f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\right)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des tangentes qui passent par l'origine du repère ?

Exercice 12. Avec une fonction auxiliaire

Soit f la fonction définie sue I par :

$$f(x) = \frac{x\,\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}$$

1. Étude de g.

1. a. On considère la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = x^3 + x^2 + x - 1$$

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $[0\,;\,1]$ et que $g(x) > 0$ sur $[1\,;\,+\infty[$

1. b. En déduire le signe de $g(x)$ sur $[0\,;\,+\infty[$.

2. Étude de f.

2. a. Montrer que f est définie sur $I = [0\,;\,+\infty[$.

2. b. Montrer que sur $[0\,;\,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{-g(x)\,\mathrm{e}^{-x}}{(x^2+1)^2}$$

2. c. En déduire les variations de f sur $[0\,;\,+\infty[$.

Exercice 13. Avec une fonction auxiliaire ... plus fourbe

Soit f la fonction définie sur I par :

$$f(x) = \frac{x+1}{\mathrm{e}^{x}-1}$$

1. Étude de g.

1. a. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x\,\mathrm{e}^{x} - 1$$

1. b. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.

1. c. En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Étude de f.

2. a. Montrer que f est définie sur $I = \mathbb{R}^*$.

2. b. Montrer que f' et g sont de mêmes signes.

2. c. En déduire les variation de f sur $\mathbb{R}^*$.

Partie V. Avec des suites

Exercice 14. Sens de variations (c)

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie pour n entier par :

$$u_n = \frac{\mathrm{e}^{n} - 1}{\mathrm{e}^{n} + 1}$$

Exercice 15. Suites arithmétiques et géométriques

Soit (a_n) la suite arithmétique de raison $r = -0,5$ et de premier terme $a_0 = 2$.
Pour tout entier n on pose $b_n = \mathrm{e}^{-a_n}$.

1. Démontrer que (b_n) est une suite géométrique.

2. En déduire son terme général.

Exercice 16. (c) Suites et fonction exponentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\,\mathrm{e}^{0.4x}.$$

On définit la suite (u_n) par :

$$u_n = f(n) \quad \text{pour tout entier naturel } n \geq 0.$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_5.

2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

3. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

4. Donner l'expression de u_n en fonction de n sous la forme $u_n = A \cdot q^n$, puis sous la forme $u_n = B\,\mathrm{e}^{kn}$.

5. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 20$.

Partie VI. Bilan et préparation au Bac

Exercice 17. D'après sujet 0 du BAC première 2026

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Partie A

On considère la fonction P définie sur l'intervalle $[-5\,;3]$ par :

$$P(x) = 2x^2 + x - 10$$

1.

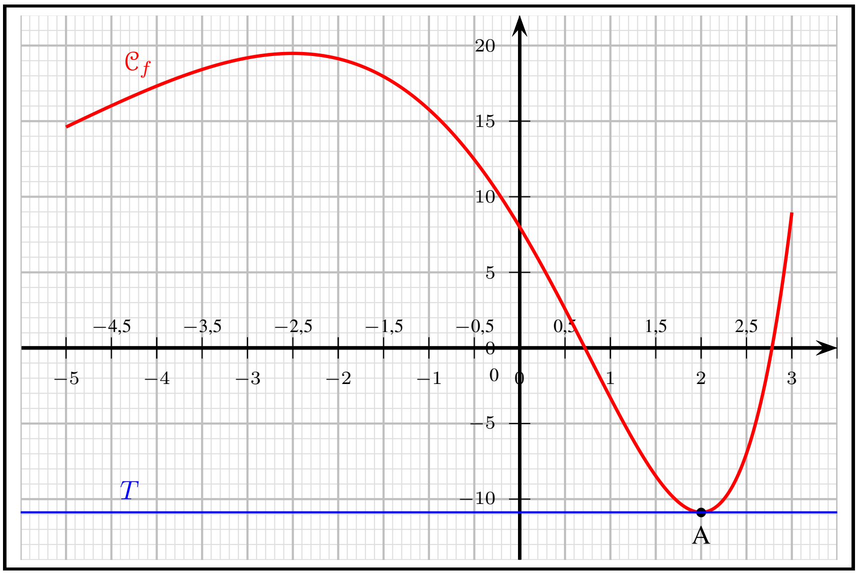
1. a. Déterminer les racines de P.

1. b. En déduire l'axe de symétrie de la parabole d'équation $y = P(x)$.

2. Établir le tableau de signes de la fonction P sur l'intervalle $[-5 \;:\; 3]$.

Partie B

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[-5 \;:\; 3]$ dont on donne ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$.



La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 2 est horizontale.

1. Donner la valeur du nombre dérivé $f'(2)$.

2. Résoudre, avec la précision permise par le graphique, l'inéquation $f'(x) < 0$.

3. On sait que la fonction f a pour expression sur l'intervalle $[-5\;;\;3]$:

$$f(x) = \left(4x^2 - 14x + 8\right)\ \mathrm{e}^{\,0,5x}$$

Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[-5\;;\;3]$, on a :

$$f'(x) = P(x)\,\mathrm{e}^{\,0,5x}$$

4. En utilisant les résultats de la **partie A**, dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-5\;;\;3]$.
(Il n'est pas demandé de calculer les images).

Exercice 18. Étude de fonction ... comme au bac

Soit f la fonction de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ définie sur $[0\,;+\infty]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} - \frac{x^2}{2} - 2x - 2$$

1. Calculer f' la dérivée de f puis la dérivée seconde f''.

2. Étudier le signe de f'' et en déduire les variations de f'.

3. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0\,;+\infty]$. Donner un encadrement de α au millième.

4. En déduire les variations de f sur $[0\,;+\infty]$.

5. Montrer que $f(\alpha) = -\alpha\left(\frac{\alpha}{2} + 1\right)$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ au centième.

> **Remarque**
> C'est LA question type BAC qui fait la différence.
> L'astuce est d'utiliser le fait que α étant solution d'une équation, ici de $f'(x) = 0$ vérifie légalité
>
> $$f(\alpha) = 0$$
>
> Donc à partir de cette équation, on exprime e^{α} en fonction de α et on "plug-in" dans l'expression de $f(\alpha)$ pour obtenir l'égalité attendue.

6. Déterminer l'équation de la tangente T_2 à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2,
puis celle de la tangente T_α à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse α.

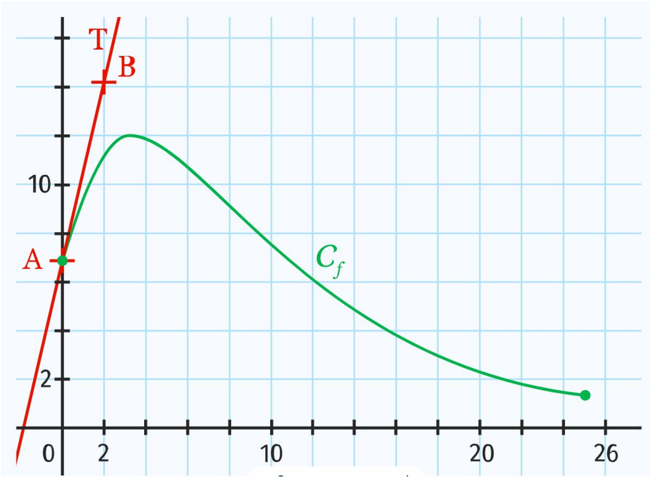
7. Tracer $\mathscr{C}_f$ et les tangentes T_2 et T_α.

Exercice 19. (c) D'après Bac : avec des lectures graphiques

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $I = [0; 25]$ par

$$f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$$

où a et b sont deux nombres réels. On a représenté également sa tangente $\mathcal{T}$ au point $A(0; 7)$. $\mathcal{T}$ passe par le point $B(2\ ;\ 14, 2)$.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$.

2.

2. a. Par lecture graphique, donner $f(0)$.

2. b. Écrire $f(0)$ en fonction de a et b.

2. c. En déduire que sur I,

$$f(x) = (ax + 7)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$$

3.

3. a. Quel est le coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$?

3. b. En déduire que $f'(0) = 3, 6$.

3. c. En déduire que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) = (5x + 7)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$$

4. On souhaite connaître le maximum de la fonction f sur I.

4. a. Montrer que, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = (-x + 3, 6)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$$

4. b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur I.

4. c. En déduire le maximum de f sur I.

Exercice 20. (c) D'après Bac : avec une modélisation

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;10]$ par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x+1}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x+1)$
	// Interprète f // Succès lors de la compilation f
	$x \longmapsto x + \exp(-x+1)$
2	derive $(f(x))$
	$-\exp(-x+1)+1$
3	solve $(-\exp(-x+1)+1>0)$
	$[x>1]$
4	derive $(-\exp(-x+1)+1)$
	$\exp(-x+1)$

1. Étude des variations de la fonction f

1. a. En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

1. b. En déduire que la fonction f admet un minimum dont on précisera la valeur.

2. ► **Terminale** ◄ Étudier les variations de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0\,;10]$.

> **Remarque**
> ► **Terminale** ◄ En terminale, on va qualifier de **fonction convexe** sur un intervalle I une fonction dont la dérivée seconde f'' est positive sur cet intervalle. Donc cette question deviendrait : « Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$. »

Partie B

Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.
Le coût de revient est modélisé par la fonction f où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum ?

2. Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour x centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.

2. a. Justifier que le montant obtenu par la vente de x centaines d'objets est $1,2x$ milliers d'euros.

2. b. Montrer que la marge brute pour x centaines d'objets, notée $g(x)$, en milliers d'euros, est donnée par :

$$g(x) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$$

2. c. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;10]$.

3.

3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;10]$.

3. b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,01$.

4. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.

Exercice 21. (c) Suite géométrique et fonction exponentielle

Soient a, b et k trois réels et n un entier naturel. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{kx}.$$

On admet que f est dérivable n fois.
On s'intéresse à la dérivée n-ième de f, c'est-à-dire la fonction que l'on obtient lorsque l'on dérive n fois la fonction f.
On la note $f^{(n)}$.

- Pour $n = 0$, $f^{(0)} = f$.
- Pour $n = 1$, $f^{(1)} = f'$.

On admet que, pour tout entier naturel n, la dérivée n-ième de f est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)\,\mathrm{e}^{kx}.$$

1. Déterminer a_1 et b_1.

2.

2. a. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2. b. En déduire l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

3.

3. a. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et de n.

3. b. On suppose que $k = 1$. Quelle est la nature de la suite (b_n) ?

3. c. Dans ce cas, en déduire l'expression de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22. D'après Bac S

La pharmacocinétique étudie l'évolution d'un médicament après son administration dans l'organisme, en mesurant sa concentration plasmatique, c'est-dire sa concentration dans le plasma.
On étudie dans cet exercice l'évolution de la concentration plasmatique chez un patient d'une même dose de médicament, en envisageant différents modes d'administration.

Partie A : administration par voie intraveineuse

On note $f(t)$ la concentration plasmatique, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), du médicament, au bout de t heures après administration par voie intraveineuse.
Le modèle mathématique est :

$$f(t) = 20\mathrm{e}^{-0,1t}, \text{ avec } t \in [0\ ;\ +\infty[.$$

La concentration plasmatique initiale du médicament est donc $f(0) = 20\ \mu\text{g.L}^{-1}$.

1. La demi-vie du médicament est la durée (en heure) après laquelle la concentration plasmatique du médicament est égale à la moitié de la concentration initiale.
Déterminer cette demi-vie, notée $t_{0,5}$.

2. On estime que le médicament est éliminé dès que la concentration plasmatique est inférieure à $0,2\mu$g.L^{-1}.
Déterminer le temps à partir duquel le médicament est éliminé. On donnera le résultat arrondi au dixième.

Partie B : administration par voie orale

On note $g(t)$ la concentration plasmatique du médicament, exprimée en microgramme par litre (μg.L^{-1}), au bout de t heures après ingestion par voie orale.
Le modèle mathématique est :

$$g(t) = 20\left(\mathrm{e}^{-0,1t} - \mathrm{e}^{-t}\right)$$

avec $t \in [0\ ;\ +\infty[$
Dans ce cas, l'effet du médicament est retardé, puisque la concentration plasmatique initiale est égale à :

$$g(0) = 0\ \mu\text{g.L}^{-1}.$$

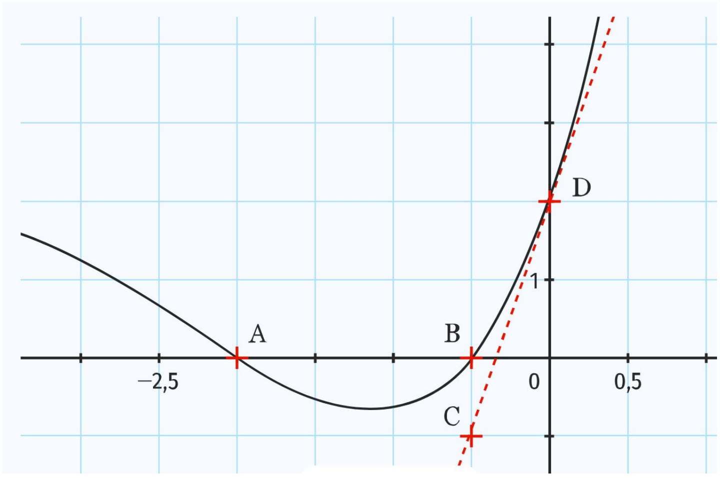
1. Démontrer que, pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$g'(t) = 20\mathrm{e}^{-t}\left(1 - 0,1\mathrm{e}^{0,9t}\right)$$

2. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$. (On ne demande pas la limite en $+\infty$.)
En déduire la durée après laquelle la concentration plasmatique du médicament est maximale. On donnera le résultat à la minute près.

Partie VII. Now We Can Talk ! : Problèmes et compléments

Exercice 23. (c) Par lecture graphique



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) \mathrm{e}^{kx}$$

où a, b, c et k sont des réels fixés.
La courbe représentative de la fonction f est donnée dans un repère orthogonal. Elle passe par les points $A(-2\ ;\ 0)$, $B\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ et $D(0\ ;\ 2)$. De plus, la droite (CD), où $C\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ -1\right)$, est tangente à la courbe en $x = 0$.

1. En utilisant le point D, déterminer la valeur de c.

2. En utilisant les points A et B, établir deux relations entre a et b.

3. Déterminer le coefficient directeur de la droite (CD).

4. En déduire la valeur de $f'(0)$.

5.

5. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

5. b. En déduire une relation entre b et k puis déterminer a, b et k.

5. c. Donner l'expression explicite de f.

Exercice 24. (c) Un grand classique : une suite qui tend vers e

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

1. Calculer les cinq premier termes de la suite.

2. Première étape.

2. a. Montrer que, pour tout réel x, on a :

$$1 + x \leqslant \mathrm{e}^{x}$$

2. b. En déduire que si $n \geqslant 1$ alors :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$$

3. Deuxième étape.

3. a. Montrer que, pour tout réel $x < 1$, on a :

$$\mathrm{e}^{x} \leqslant \frac{1}{1 - x}$$

3. b. En déduire que si $n \geqslant 1$ alors :

$$\mathrm{e} \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

4. Dernière étape.

4. a. En déduire que si $n \geqslant 1$ on a :

$$0 \leqslant \mathrm{e} - u_n \leqslant \frac{3}{n}$$

4. b. ► **Terminale** ◄ En conclure que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

Exercice 25. Un encadrement classique : à savoir redémontrer

1. Montrer que pour tout réel x on a :

$$1 + x \leqslant \mathrm{e}^{x}$$

Aide *: on pourra étudier la fonction* $f : x \longmapsto e^{x} - (1 + x)$.

2. Étudier les variation sur $\mathbb{R}_-$ de la fonction

$$g : x \longmapsto \mathrm{e}^{x} - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$$

3. En déduire que pour tout réel $x \leqslant 0$ on a :

$$\forall x \in \left]-\infty\,; 0\right], \quad 1 + x \leqslant \mathrm{e}^{x} \leqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Exercice 26. Fonctions hyperboliques : encore un grand classique

La fonction cosinus hyperboliques notée ch et la fonction sinus hyperbolique, notés sh sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{ch}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad \text{sh}\,(x) = \frac{\mathrm{e}^{\,x} - \mathrm{e}^{\,-x}}{2}$$

La fonction tangente hyperboliques notée th est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{th}\,(x) = \frac{\text{sh}\,(x)}{\text{ch}\,(x)}$$

1. Montrer que pour tous réels x et y on a :

1. a. $\text{ch}^{\,2}(x) - \text{sh}^{\,2}(x) = 1$.

1. b. $\text{sh}\,(x+y) = \text{sh}\,(x)\text{ch}\,(y) + \text{ch}\,(x)\text{sh}\,(y)$.

1. c. $\text{ch}\,(x+y) = \text{ch}\,(x)\text{ch}\,(y) + \text{sh}\,(x)\text{sh}\,(y)$.

1. d. $\text{sh}\,(2x) = 2\text{sh}\,(x)\text{ch}\,(x)$.

1. e. $\text{ch}\,(2x) = \text{ch}^{\,2}(x) + \text{sh}^{\,2}(x) = 2\text{ch}^{\,2}(x) - 1 = 1 + 2\text{sh}^{\,2}(x)$

2. Montrer que pour tout réel x les fonctions sh, ch et th sont dérivables et que :

$$\text{ch}\,'(x) = \text{sh}\,(x) \qquad \text{et} \qquad \text{sh}\,'(x) = \text{ch}\,(x) \qquad \text{et} \qquad \text{th}\,'(x) = \frac{1}{\text{ch}^{\,2}(x)} = 1 - \text{th}^{\,2}(x)$$

3. Étudier les variations des 3 fonctions hyperboliques.

4. Montrer que pour tout réel x :

$$\text{th}\,(2x) = \frac{2\text{th}\,(x)}{1 + \text{th}^{\,2}(x)}$$

En déduire que pour tout réel x non nul :

$$th(x) = \frac{2}{\text{th}\,(2x)} - \frac{1}{\text{th}\,(x)}$$

5. Si x est un réel non nul et n un entier naturel, simplifier l'écriture (i.e. l'écrire sans le symbole somme) :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k\,\text{th}\,\left(2^k\,x\right)$$

Exercice 27. Développer votre identité ...

Soit x et y deux réels distincts quelconques.

1. Montrer que :

$$\frac{\mathrm{e}^{\,x} + \mathrm{e}^{\,y}}{2} > \mathrm{e}^{\,\frac{x+y}{2}}$$

2. Donner une interprétation graphique de ce résultat.

Exercice 28. C'est limite ...

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n\,\mathrm{e}^{\,-u_n} \end{cases}$$

1. ► **Terminale** ◄ *[ADMIS] Démontrer par récurrence que pour tout n entier naturel : $u_n > 0$.*

2. Déterminer le sens de variation de (u_n).

3. ► **Terminale** ◄ En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

4. ► **Terminale** ◄ On admet que ℓ vérifie la relation : $\ell = \ell\,\mathrm{e}^{\,-\ell}$. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 29. (c) La loi de Poisson

Remarque historique

En 1837, le mathématicien et physicien français **Denis Poisson** publie l'ouvrage *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*. Il y introduit une nouvelle loi de probabilité destinée à modéliser des phénomènes rares, comme le nombre d'événements se produisant sur un intervalle de temps donné. Cette loi portera par la suite son nom et constitue aujourd'hui un outil fondamental en probabilités, en statistique et en modélisation des phénomènes aléatoires.

Soit $\lambda > 0$. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ lorsque, pour tout entier naturel k :

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

où $k!$ désigne le produit de tous les entiers naturels de 1 à k.
Par convention, $0! = 1$.

Factorielle n notée $n!$

Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$n! = \begin{cases} 0! = 1 & \text{si } n = 0 \\ n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n & \text{sinon} \end{cases}$$

On admet que cette expression définit bien une loi de probabilité sur l'ensemble des entiers naturels.
On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant chacune une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ et μ.
On s'intéresse à la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

1. Que valent $P(X = 0)$ et $P(Y = 0)$?
2. Calculer $P(X + Y = 0)$.
3. Décomposer l'événement $\{X + Y = 1\}$ selon les valeurs possibles de X et Y.
4. En déduire la probabilité $P(X + Y = 1)$.
5. Calculer $P(X + Y = 2)$.
6. Conjecturer la loi suivie par la variable aléatoire $X + Y$.

Partie VIII. Correction

Correction de l'exercice 9

1. On a :

$$f : \begin{cases} [0\,;\,100] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto f(x) = 2x\,\mathrm{e}^{-3x+1} \end{cases}$$

- Calcul de la dérivée.
  La fonction f est dérivable sur $[0\,;\,100]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
  La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in [0\,;\,100]\ ;\ f(x) = u(x) \times v(x) \quad : \quad \begin{cases} u(x) = 2x & ;\quad u'(x) = 2 \\ v(x) = \mathrm{e}^{-3x+1} & ;\quad v'(x) = \left(-3\,\mathrm{e}^{-3x+1}\right) \end{cases}$$

  On a donc :

$$\begin{aligned} \forall x \in [0\,;\,100]\,,\quad f'(x) &= u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) \\ f'(x) &= 2 \times \mathrm{e}^{-3x+1} + 2x \times \left(-3\,\mathrm{e}^{-3x+1}\right) \end{aligned}$$

  Soit

$$\boxed{\forall x \in [0\,;\,100]\ ;\ f'(x) = (2-6x)\,\mathrm{e}^{-3x+1}}$$

- Étude du signe de la dérivée.
  La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La dérivée est donc du signe du facteur $(2-6x)$ sur $[0\,;\,100]$ soit puisque :

$$2 - 6x = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{1}{3}$$

x	0		$\frac{1}{3}$		100
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	0	$\nearrow$	$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$	$\searrow$	$200\,\mathrm{e}^{-299}$

2. On a :

$$g : \begin{cases} [0\,;\,100] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto g(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{1-5x}}{x} \end{cases}$$

- Calcul de la dérivée.
  La fonction g est dérivable sur $[1\,;\,50]$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle.
  La fonction g est de la forme $\dfrac{u}{v}$ donc de dérivée $\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec :

$$\forall x \in [1\,;\,50]\ ;\ g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad : \quad \begin{cases} u(x) = \mathrm{e}^{1-5x} & ;\quad u'(x) = -5\,\mathrm{e}^{1-5x} \\ v(x) = x & ;\quad v'(x) = 1 \end{cases}$$

  On a donc :

$$\forall x \in [1\,;\,50]\,,\quad g'(x) = \frac{-5\,\mathrm{e}^{1-5x} \times x - \mathrm{e}^{1-5x} \times 1}{x^2}$$

$$\boxed{\forall x \in [1\,;\,50]\,,\quad g'(x) = \frac{(-5x-1)\,\mathrm{e}^{1-5x}}{x^2}}$$

- Étude du signe de la dérivée.
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et le dénominateur x^2 est strictement positif sur $[1\,;\,50]$. La dérivée est donc du signe du facteur $(-5x-1)$ sur $[1\,;\,50]$ soit puisque :

$$\begin{cases} -5x-1=0 \iff x=\dfrac{-1}{5} \notin [1\,;\,50] \\ -5x-1>0 \iff x<\dfrac{-1}{5} \end{cases}$$

x	1	50
Signe de $g'(x)$	$-$	
Variation de g	e^{-4} ↘	$\dfrac{\mathrm{e}^{-249}}{50}$

3. On a :

$$h : \begin{cases} [1\,;\,10] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto h(x)=x^2\ \mathrm{e}^{1-2x} \end{cases}$$

- Calcul de la dérivée.
La fonction h est dérivable sur $[1\,;\,10]$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur cet intervalle.
La fonction h est de la forme uv donc de dérivée $u'v+uv'$ avec :

$$\forall x \in [1\,;\,10]\ ;\ h(x)=u(x)\times v(x)\ :\ \begin{cases} u(x)=x^2 & ;\ u'(x)=2x \\ v(x)=\mathrm{e}^{1-2x} & ;\ v'(x)=\left(-2\,\mathrm{e}^{1-2x}\right) \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in [1\,;\,10],\ h'(x)=u'(x)\times v(x)+u(x)\times v'(x)$$
$$h'(x)=2x\times \mathrm{e}^{1-2x}+x^2\times\left(-2\,\mathrm{e}^{1-2x}\right)$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in [1\,;\,10]\ ;\ h'(x)=\left(2x-2x^2\right)\ \mathrm{e}^{1-2x}}$$

- Étude du signe de la dérivée.
La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$. La dérivée est donc du signe du facteur $\left(2x-2x^2\right)$ sur $[1\,;\,10]$.
La fonction $x \longmapsto \left(2x-2x^2\right)=2x(1-x)$ est une fonction polynôme du second degré dont les racines sont 0 et 1.
Elle est donc du signe du coefficient de x^2 qui est $-2<0$ soit négative à l'extérieur des racines et positive ailleurs. La fonction dérivée est donc négative sur $[1\,;\,10]$ et on obtient alors :

x	1	10
Signe de $h'(x)$	0 $-$	
Variation de h	e^{-1} ↘	$100\,\mathrm{e}^{-19}$

Correction de l'exercice 10

f et g sont des fonctions définies sur R par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{\,x} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^{\,x}}$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ \right)$.

On donne juste ***des éléments de correction****, cela ne constitue pas une rédaction ...*

1. Étudier le sens de variation de chaque fonction.

$$f'(x) = (x+1)\,\mathrm{e}^{\,x} \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \frac{1-x}{\mathrm{e}^{\,x}}$$

Donc f croissante sur $[-1\ ;\ +\infty[$ et décroissante ailleurs.
g décroissante sur $[1\ ;\ +\infty[$ et croissante ailleurs.

2. Étudier les intersections éventuelles de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

$$f(x) = g(x) \iff x = 0$$

Or $f(0) = g(0) = 0$ donc les courbes se croisent en O(0 ; 0).

3. Montrer que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont une tangente commune en O.

- Tangente à $\mathscr{C}_f$ en O d'équation : $y = x$.
- Tangente à $\mathscr{C}_g$ en O d'équation : $y = x$.

Correction de l'exercice 11

On donne juste ***des éléments de correction****, cela ne constitue pas une rédaction ...*

Soit f définie sur R par : $f(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des tangentes qui passent par l'origine du repère ?
On a :

$$f'(x) = (2x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$$

L'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) = f'(a)x - af'(a) + f(a)$$

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet des tangentes qui passent par l'origine du repère si et seulement si $-af'(a) + f(a) = 0$ soit :

$$-af'(a) + f(a) = 0 - a(2a - a^2)\,\mathrm{e}^{-x} + a^2\,\mathrm{e}^{-a} = 0$$

Puisque la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} -af'(a) + f(a) = 0 &\iff -a(2a - a^2) + a^2 = 0 \\ &\iff a^3 - a^2 = 0 \\ &\iff a^2(a-1) = 0 \\ &\iff a = 0 \ \text{ ou } \ a = 1 \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 14

Étudier le sens de variation de la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{\mathrm{e}^{n} - 1}{\mathrm{e}^{n} + 1}$.

On obtient pour n entier :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2\,\mathrm{e}^{n}(\mathrm{e} - 1)}{(\mathrm{e}^{n+1} + 1)(\mathrm{e}^{n} + 1)} < 0$$

Donc la suite est strictement décroissante.

Correction de l'exercice 21

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\,\mathrm{e}^{\,0.4x}.$$

On définit la suite (u_n) par :

$$u_n = f(n) \quad \text{pour tout entier naturel } n \geq 0.$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_5.

Corrigé (1,5 points)

On a, par définition de la suite :

$$u_n = f(n) = 2\,\mathrm{e}^{\,0.4n}.$$

$$\begin{aligned} u_0 &= 2\,\mathrm{e}^{\,0} = 2 \\ u_1 &= 2\,\mathrm{e}^{\,0.4} \\ u_5 &= 2\,\mathrm{e}^{\,0.4\times 5} = 2\,\mathrm{e}^{\,2} \end{aligned}$$

$$\boxed{u_0 = 2 \quad ; \quad u_1 = 2\,\mathrm{e}^{\,0.4} \quad ; \quad u_5 = 2\,\mathrm{e}^{\,2}}$$

2. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

3. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.

Corrigé (1,5 points)

Pour tout entier naturel $n \geq 0$, on a :

$$u_n = 2\,\mathrm{e}^{\,0.4n}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 2\,\mathrm{e}^{\,0.4(n+1)} \\ &= 2\,\mathrm{e}^{\,0.4n}\,\mathrm{e}^{\,0.4} \\ &= \mathrm{e}^{\,0.4}\,u_n. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q\,u_n \quad \text{avec} \quad q = \mathrm{e}^{\,0.4}.$$

La suite (u_n) est donc une suite géométrique de raison :

$$\boxed{q = \mathrm{e}^{\,0.4}}.$$

4. Donner l'expression de u_n en fonction de n sous la forme $u_n = A \cdot q^n$, puis sous la forme $u_n = B\,\mathrm{e}^{\,kn}$.

Corrigé (1 point)

La suite (u_n) est géométrique de premier terme :

$$u_0 = 2$$

et de raison :

$$q = \mathrm{e}^{\,0.4}.$$

On a donc :

$$u_n = u_0 q^n = 2\big(\mathrm{e}^{\,0.4}\big)^n.$$

Or :

$$\left(\mathrm{e}^{0.4}\right)^n = \mathrm{e}^{0.4n}.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_n = 2\,\mathrm{e}^{0.4n}}.$$

5. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).

Corrigé (1 point)

La suite (u_n) est géométrique de raison :

$$q = \mathrm{e}^{0.4} > 1.$$

Une suite géométrique de raison strictement supérieure à 1 et de premier terme positif est strictement croissante.
Ainsi :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

6. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 20$.

Corrigé (1 point) – Méthode A : sans logarithme

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2\,\mathrm{e}^{0.4n}.$$

La suite (u_n) est croissante.
On calcule alors deux valeurs consécutives :

$$u_5 = 2\,\mathrm{e}^{0.4\times 5} = 2\,\mathrm{e}^{2} \approx 2 \times 7.39 \approx 14.78$$
$$u_6 = 2\,\mathrm{e}^{0.4\times 6} = 2\,\mathrm{e}^{2.4} \approx 2 \times 11.02 \approx 22.04$$

On a donc :

$$u_5 < 20 \quad \text{et} \quad u_6 \geq 20.$$

Comme (u_n) est croissante, le plus petit entier n tel que $u_n \geq 20$ est :

$$\boxed{n = 6}.$$

Corrigé (1 point) – Méthode B : avec logarithme ► Terminale ◄

On cherche à résoudre :

$$u_n \geq 20 \iff 2\,\mathrm{e}^{0.4n} \geq 20 \iff \mathrm{e}^{0.4n} \geq 10.$$

On compose les deux membres par la fonction $\ln$. Or $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc le sens de l'inégalité est conservé :

$$\mathrm{e}^{0.4n} \geq 10 \iff \ln\left(\mathrm{e}^{0.4n}\right) \geq \ln(10).$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \ln\left(\mathrm{e}^{0.4n}\right) \geq \ln(10) &\iff 0.4n \geq \ln(10) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(10)}{0.4}. \end{aligned}$$

Or :

$$\frac{\ln(10)}{0.4} \approx 5.76.$$

Le plus petit entier naturel solution est donc :

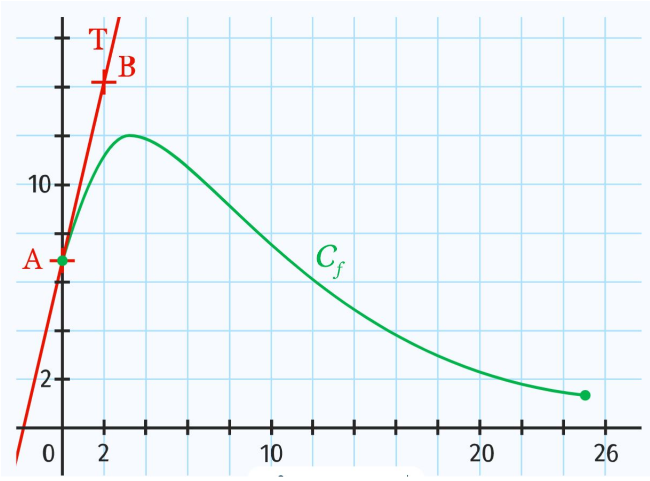
$$\boxed{n = 6}.$$

Correction de l'exercice 19 : avec des lectures graphiques

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie sur $I = [0; 25]$ par

$$f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$$

où a et b sont deux nombres réels. On a représenté également sa tangente $\mathcal{T}$ au point $A(0; 7)$. $\mathcal{T}$ passe par le point $B(2\ ;\ 14,2)$.



1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$.

Corrigé (1 point)

Graphiquement, on trace la droite horizontale d'équation $y = 6$ puis on lit l'abscisse du point d'intersection avec $\mathcal{C}_f$.

On obtient, sur I, une unique solution :

$$\boxed{x \approx 12,2.}$$

2.

2. a. Par lecture graphique, donner $f(0)$.

Corrigé (0,5 point)

Par lecture graphique, le point $A(0\ ;\ 7)$ appartient à $\mathcal{C}_f$, donc :

$$\boxed{f(0) = 7.}$$

2. b. Écrire $f(0)$ en fonction de a et b.

Corrigé (0,5 point)

$$\begin{aligned} f(0) &= (a \times 0 + b)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 0} \\ &= b\,\mathrm{e}^{0} \\ &= b. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{f(0) = b.}$$

2. c. En déduire que sur I, $f(x) = (ax + 7)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$.

Corrigé (1 point)

D'après 2.a et 2.b :

$$f(0) = 7 \quad \text{et} \quad f(0) = b.$$

Donc :

$$\boxed{b = 7.}$$

Ainsi, pour tout $x \in I$:

$$\boxed{f(x) = (ax + 7)\,\mathrm{e}^{-0,2x}.}$$

3.

3. a. Quel est le coefficient directeur de la droite $\mathcal{T}$?

Corrigé (1 point)

La droite $\mathcal{T}$ passe par $A(0\ ;\ 7)$ et $B(2\ ;\ 14,2)$.

$$\begin{aligned} m &= \frac{14,2 - 7}{2 - 0} \\ &= \frac{7,2}{2} \\ &= 3,6. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{m = 3,6.}$$

3. b. En déduire que $f'(0) = 3,6$.

Corrigé (1 point)

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est égal à $f'(0)$.

Or, d'après la question précédente :

$$m = 3,6.$$

Donc :

$$\boxed{f'(0) = 3,6.}$$

3. c. En déduire que, pour tout $x \in I$, $f(x) = (5x + 7)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$.

Corrigé (1,5 point)

On sait que :

$$f(x) = (ax + 7)\,\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

La fonction f est de la forme $u \times v$ avec :

$$u(x) = ax + 7 \qquad \text{et} \qquad v(x) = \mathrm{e}^{-0,2x}.$$

Donc :

$$u'(x) = a \qquad \text{et} \qquad v'(x) = -0,2\,\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= a\,\mathrm{e}^{-0,2x} + (ax+7)\big(-0,2\,\mathrm{e}^{-0,2x}\big) \\ &= \big(a - 0,2(ax+7)\big)\,\mathrm{e}^{-0,2x}. \end{aligned}$$

En particulier :

$$\begin{aligned} f'(0) &= \big(a - 0,2\times 7\big)\,\mathrm{e}^{0} \\ &= a - 1,4. \end{aligned}$$

Or :

$$f'(0) = 3,6.$$

Donc :

$$\begin{aligned} a - 1,4 &= 3,6 \\ a &= 5. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in I$:

$$\boxed{f(x) = (5x+7)\,\mathrm{e}^{-0,2x}.}$$

4. On souhaite connaître le maximum de la fonction f sur I.

4. a. Montrer que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = (-x+3,6)\,\mathrm{e}^{-0,2x}$.

Corrigé (2 points)

On a :

$$f(x) = (5x+7)\,\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

f est de la forme $u \times v$ avec :

$$u(x) = 5x+7 \qquad \text{et} \qquad v(x) = \mathrm{e}^{-0,2x}.$$

Donc :

$$u'(x) = 5 \qquad \text{et} \qquad v'(x) = -0,2\,\mathrm{e}^{-0,2x}.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= 5\,\mathrm{e}^{-0,2x} + (5x+7)\big(-0,2\,\mathrm{e}^{-0,2x}\big) \\ &= \big(5 - 0,2(5x+7)\big)\,\mathrm{e}^{-0,2x} \\ &= \big(5 - (x+1,4)\big)\,\mathrm{e}^{-0,2x} \\ &= (-x+3,6)\,\mathrm{e}^{-0,2x}. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{f'(x) = (-x+3,6)\,\mathrm{e}^{-0,2x}.}$$

4. b. Étudier le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur I.

Corrigé (1,5 point)

Pour tout $x \in I$:

$$\mathrm{e}^{-0,2x} > 0.$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $-x+3,6$.

- Si $0 \leq x < 3,6$, alors $f'(x) > 0$.
- Si $x = 3,6$, alors $f'(x) = 0$.
- Si $3,6 < x \leq 25$, alors $f'(x) < 0$.

Ainsi, f est croissante sur $[0;3,6]$ puis décroissante sur $[3,6;25]$.

4. c. En déduire le maximum de f sur I.

Corrigé (1 point)

Le maximum de f sur I est atteint pour $x = 3,6$.

$$\begin{aligned} f(3,6) &= (5 \times 3,6 + 7)\,\mathrm{e}^{-0,2\times 3,6} \\ &= (18+7)\,\mathrm{e}^{-0,72} \\ &= 25\,\mathrm{e}^{-0,72}. \end{aligned}$$

Ainsi, le maximum de f sur I vaut :

$$\boxed{25\,\mathrm{e}^{-0,72} \approx 12,17.}$$

Correction de l'exercice 20 : avec une modélisation

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x+1}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x+1)$
	// Interprète f // Succès lors de la compilation f
	$x \longmapsto x + \exp(-x+1)$
2	derive $(f(x))$
	$-\exp(-x+1)+1$
3	solve $(-\exp(-x+1)+1>0)$
	$[x>1]$
4	derive $(-\exp(-x+1)+1)$
	$\exp(-x+1)$

1. Étude des variations de la fonction f

1. a. En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.

Corrigé (4 points)

D'après le tableau fourni par le logiciel :

$$f'(x) = -\exp(-x+1) + 1.$$

On étudie le signe de $f'(x)$ sur $[0;10]$.

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff -\exp(-x+1)+1>0 \\ &\iff 1 > \exp(-x+1) \\ &\iff \ln(1) > \ln\big(\exp(-x+1)\big) \\ &\iff 0 > -x+1 \\ &\iff x > 1. \end{aligned}$$

Ainsi :

- sur $[0;1]$, $f'(x) \leq 0$ donc f est décroissante ;
- sur $[1;10]$, $f'(x) \geq 0$ donc f est croissante.

On calcule les valeurs utiles :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 + \mathrm{e}^{-0+1} \\ &= \mathrm{e}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= 1 + \mathrm{e}^{-1+1} \\ &= 1 + \mathrm{e}^{0} \\ &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(10) &= 10 + \mathrm{e}^{-10+1} \\ &= 10 + \mathrm{e}^{-9}. \end{aligned}$$

Tableau de variations :

x	0		1		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	e	$\searrow$	2	$\nearrow$	$10+\mathrm{e}^{-9}$

1. b. En déduire que la fonction f admet un minimum dont on précisera la valeur.

Corrigé (1 point)

D'après l'étude des variations, f est décroissante sur $[0;1]$ puis croissante sur $[1;10]$.
Donc f admet un minimum sur $[0;10]$, atteint pour $x=1$.

$$\begin{aligned} f(1) &= 1+\mathrm{e}^{-1+1} \\ &= 1+\mathrm{e}^{0} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le minimum de } f \text{ sur } [0;10] \text{ vaut } 2 \text{ et il est atteint pour } x=1.}$$

2. ► **Terminale** ◄ Étudier les variations de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0\,;10]$.

Remarque

► **Terminale** ◄ En terminale, on va qualifier de **fonction convexe** sur un intervalle I une fonction dont la dérivée seconde f'' est positive sur cet intervalle. Donc cette question deviendrait : « Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;10]$. »

Corrigé (2 points)

On rappelle :

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x+1}+1.$$

D'après le logiciel :

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x+1}.$$

Or, pour tout $x \in [0;10]$:

$$\mathrm{e}^{-x+1} > 0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La fonction } f' \text{ est strictement croissante sur } [0;10].}$$

(► **Terminale** ◄) Comme $f''(x) > 0$ sur $[0;10]$, on en déduit aussi que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est convexe sur } [0;10].}$$

Partie B

Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.

Le coût de revient est modélisé par la fonction f où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum ?

Corrigé (1,5 point)

D'après la partie A, le minimum de f sur $[0; 10]$ est atteint pour :

$$x = 1.$$

Or x représente le nombre d'objets en centaines.
Donc $x = 1$ correspond à :

$$\boxed{100 \text{ objets.}}$$

2. Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour x centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.

2. a. Justifier que le montant obtenu par la vente de x centaines d'objets est $1,2x$ milliers d'euros.

Corrigé (2 points)

x centaines d'objets correspondent à $100x$ objets.
Chaque objet est vendu 12 €, donc le montant total des ventes vaut :

$$\begin{aligned} \text{Recette} &= 12 \times (100x) \\ &= 1200x \text{ euros.} \end{aligned}$$

Or 1000 euros correspondent à 1 millier d'euros, donc :

$$\begin{aligned} 1200x \text{ euros} &= \frac{1200x}{1000} \text{ milliers d'euros} \\ &= 1,2x \text{ milliers d'euros.} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Le montant des ventes est } 1,2x \text{ milliers d'euros.}}$$

2. b. Montrer que la marge brute pour x centaines d'objets, notée $g(x)$, en milliers d'euros, est donnée par : $g(x) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}$.

Corrigé (1,5 point)

Par définition, la marge brute est :

$$g(x) = \text{recette} - \text{coût de revient.}$$

Or :

$$\text{recette} = 1,2x \qquad \text{et} \qquad f(x) = x + \mathrm{e}^{-x+1}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} g(x) &= 1,2x - \left(x + \mathrm{e}^{-x+1}\right) \\ &= 1,2x - x - \mathrm{e}^{-x+1} \\ &= 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{g(x) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}.}$$

2. c. Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

Corrigé (2 points)

On a :

$$g(x) = 0,2x - \mathrm{e}^{-x+1}.$$

On dérive sur $[0; 10]$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (0,2x)' - \left(\mathrm{e}^{-x+1}\right)' \\ &= 0,2 - \left(\mathrm{e}^{-x+1} \times (-1)\right) \\ &= 0,2 + \mathrm{e}^{-x+1}. \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in [0; 10]$:

$$\mathrm{e}^{-x+1} > 0 \quad \Longrightarrow \quad 0,2 + \mathrm{e}^{-x+1} > 0.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est strictement croissante sur } [0; 10].}$$

3.

3. a. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

Corrigé (2 points)

On sait (question 2.c) que g est strictement croissante sur $[0; 10]$.

On calcule :

$$\begin{aligned} g(0) &= 0,2 \times 0 - \mathrm{e}^{-0+1} \\ &= -\mathrm{e} \\ &< 0, \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} g(10) &= 0,2 \times 10 - \mathrm{e}^{-10+1} \\ &= 2 - \mathrm{e}^{-9} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $g(0) < 0$ et $g(10) > 0$. Comme g est continue sur $[0; 10]$, l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution sur $[0; 10]$.

De plus, g étant strictement croissante sur $[0; 10]$, cette solution est unique.

On la note α.

$$\boxed{\exists!\ \alpha \in [0; 10] \text{ tel que } g(\alpha) = 0.}$$

3. b. Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0,01$.

Corrigé (2 points)

On cherche un encadrement $[a; b]$ tel que $b - a = 0,01$ et $g(a) \leq 0 \leq g(b)$, en utilisant la croissance de g.

Calculs :

$$\begin{aligned} g(1,94) &= 0,2 \times 1,94 - \mathrm{e}^{-1,94+1} \\ &= 0,388 - \mathrm{e}^{-0,94} \\ &\approx -0,0026 \end{aligned}$$

donc $g(1,94) < 0$.

$$\begin{aligned} g(1,95) &= 0,2 \times 1,95 - \mathrm{e}^{-1,95+1} \\ &= 0,39 - \mathrm{e}^{-0,95} \\ &\approx 0,0033 \end{aligned}$$

donc $g(1,95) > 0$.
Comme g est strictement croissante, on en déduit :

$$\boxed{1,94 < \alpha < 1,95}$$

et l'amplitude vaut bien $0,01$.

4. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.

Corrigé (1 point)

La marge brute est positive lorsque :

$$g(x) > 0.$$

Comme g est strictement croissante sur $[0; 10]$ et $g(\alpha) = 0$, on a :

$$g(x) > 0 \iff x > \alpha.$$

Or :

$$1,94 < \alpha < 1,95.$$

Donc, pour avoir $x > \alpha$, il suffit de produire au moins $1,95$ centaines d'objets, soit 195 objets.

$$\boxed{\text{Il faut produire au minimum 195 objets pour avoir une marge brute positive.}}$$

Correction de l'exercice 21 : une suite géométrique

Soient a, b et k trois réels et n un entier naturel. On considère la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{kx}.$$

On admet que f est dérivable n fois.
On s'intéresse à la dérivée n-ième de f, c'est-à-dire la fonction que l'on obtient lorsque l'on dérive n fois la fonction f.
On la note $f^{(n)}$.

- Pour $n = 0$, $f^{(0)} = f$.
- Pour $n = 1$, $f^{(1)} = f'$.

On admet que, pour tout entier naturel n, la dérivée n-ième de f est de la forme :

$$f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)\,\mathrm{e}^{kx}.$$

1. Déterminer a_1 et b_1.

Corrigé (2 points)

On a :

$$f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{kx}.$$

La fonction f est de la forme $u \times v$ avec :

$$u(x) = ax + b \qquad \text{et} \qquad v(x) = \mathrm{e}^{kx}.$$

Ainsi :

$$u'(x) = a \qquad \text{et} \qquad v'(x) = k\,\mathrm{e}^{kx}.$$

Par la formule de dérivation d'un produit :

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

d'où :

$$f'(x) = a\,\mathrm{e}^{kx} + k(ax + b)\,\mathrm{e}^{kx}.$$

On factorise par e^{kx} :

$$f'(x) = \big(ka\,x + (a + kb)\big)\,\mathrm{e}^{kx}.$$

Ainsi :

$$\boxed{a_1 = ka \quad \text{et} \quad b_1 = a + kb.}$$

2. 2. a. Montrer que la suite (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Corrigé (2 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$. On admet que :

$$f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)\,\mathrm{e}^{kx}.$$

Alors :

$$f^{(n+1)}(x) = \big(a_n + k(a_n x + b_n)\big)\,\mathrm{e}^{kx} = \big(ka_n x + (a_n + kb_n)\big)\,\mathrm{e}^{kx}.$$

Par identification, on obtient :

$$a_{n+1} = ka_n.$$

La suite (a_n) est donc une suite géométrique de raison k et de premier terme :

$$a_0 = a.$$

2. b. En déduire l'expression de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé (1 point)

Puisque (a_n) est une suite géométrique de premier terme a et de raison k, on a :

$$\boxed{a_n = k^n a \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

3. 3. a. Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n et de n.

Corrigé (2 points)

D'après le calcul précédent :

$$f^{(n+1)}(x) = \big(ka_n x + (a_n + kb_n)\big)\,\mathrm{e}^{kx}.$$

Par identification :

$$b_{n+1} = a_n + kb_n.$$

Or, d'après la question précédente :

$$a_n = k^n a.$$

Ainsi :

$$\boxed{b_{n+1} = kb_n + k^n a.}$$

3. b. On suppose que $k = 1$. Quelle est la nature de la suite (b_n) ?

Corrigé (1 point)

Si $k = 1$, la relation devient :

$$b_{n+1} = b_n + a.$$

La suite (b_n) est donc une suite arithmétique de premier terme $b_0 = b$ et de raison a.

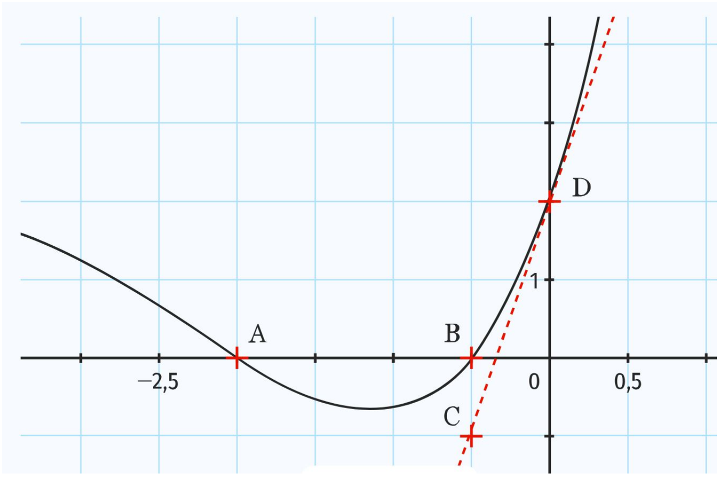
3. c. Dans ce cas, en déduire l'expression de b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé (1 point)

Puisque (b_n) est arithmétique de premier terme b et de raison a, on a :

$$\boxed{b_n = b + na \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

Correction de l'exercice 23



On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right) \mathrm{e}^{kx}$$

où a, b, c et k sont des réels fixés.
La courbe représentative de la fonction f est donnée dans un repère orthogonal. Elle passe par les points $A(-2\ ;\ 0)$, $B\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ et $D(0\ ;\ 2)$. De plus, la droite (CD), où $C\left(-\dfrac{1}{2}\ ;\ -1\right)$, est tangente à la courbe en $x = 0$.

1. En utilisant le point D, déterminer la valeur de c.

Corrigé (1 point)

Le point $D(0\ ;\ 2)$ appartient à la courbe, donc :

$$f(0) = 2.$$

Or :

$$\begin{aligned} f(0) &= \left(a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c\right) \mathrm{e}^{k \cdot 0} \\ &= c\,\mathrm{e}^{0} \\ &= c. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{c = 2.}$$

2. En utilisant les points A et B, établir deux relations entre a et b.

Corrigé (2 points)

Comme $A(-2\ ;\ 0)$ appartient à la courbe :

$$f(-2) = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} f(-2) &= \left(a(-2)^2 + b(-2) + c\right) \mathrm{e}^{k(-2)} \\ &= \left(4a - 2b + c\right) \mathrm{e}^{-2k}. \end{aligned}$$

Or $\mathrm{e}^{-2k} \neq 0$, donc :

$$4a - 2b + c = 0.$$

Avec $c = 2$:

$$\boxed{4a - 2b + 2 = 0.}$$

De même, comme $B\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right)$ appartient à la courbe :

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{1}{2}\right) &= \left(a\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + b\left(-\frac{1}{2}\right) + c\right) \mathrm{e}^{k\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= \left(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c\right) \mathrm{e}^{-\frac{k}{2}}. \end{aligned}$$

Or $\mathrm{e}^{-\frac{k}{2}} \neq 0$, donc :

$$\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c = 0.$$

Avec $c = 2$:

$$\boxed{\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + 2 = 0.}$$

3. Déterminer le coefficient directeur de la droite (CD).

Corrigé (1 point)

On a :

$$C\left(-\frac{1}{2}\ ;\ -1\right) \quad \text{et} \quad D(0\ ;\ 2).$$

Le coefficient directeur de (CD) vaut :

$$\begin{aligned} m &= \frac{2-(-1)}{0-(-\frac{1}{2})} \\ &= \frac{3}{\frac{1}{2}} \\ &= 6. \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{m = 6.}$$

4. En déduire la valeur de $f'(0)$.

Corrigé (1 point)

La droite (CD) est tangente à la courbe en $x = 0$, donc son coefficient directeur est égal à $f'(0)$.
Or, d'après la question précédente, ce coefficient directeur vaut 6.
Donc :

$$\boxed{f'(0) = 6.}$$

5. 5. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

5. b. En déduire une relation entre b et k puis déterminer a, b et k.

5. c. Donner l'expression explicite de f.

Corrigé (3 points)

1) Calcul de $f'(x)$.

On pose :

$$u(x) = ax^2 + bx + c \qquad \text{et} \qquad v(x) = \mathrm{e}^{kx}.$$

Alors :

$$u'(x) = 2ax + b \qquad \text{et} \qquad v'(x) = k\,\mathrm{e}^{kx}.$$

Par produit :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= (2ax+b)\,\mathrm{e}^{kx} + (ax^2+bx+c)\,k\,\mathrm{e}^{kx} \\ &= \Big(2ax + b + k(ax^2+bx+c)\Big)\,\mathrm{e}^{kx}. \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = \Big(2ax + b + k(ax^2+bx+c)\Big)\,\mathrm{e}^{kx}.}$$

2) Relation entre b et k.

$$\begin{aligned} f'(0) &= \Big(2a\cdot 0 + b + k(a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c)\Big)\,\mathrm{e}^{0} \\ &= (b + kc). \end{aligned}$$

Or $f'(0) = 6$ et $c = 2$, donc :

$$b + 2k = 6.$$

$$\boxed{b + 2k = 6.}$$

3) Détermination de a, b, k.

Des relations obtenues avec A et B (question 2) et $c = 2$:

$$\begin{aligned} 4a - 2b + 2 &= 0 \\ \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + 2 &= 0 \end{aligned}$$

On simplifie la première :

$$\begin{aligned} 4a - 2b + 2 &= 0 \\ 2a - b + 1 &= 0 \\ b &= 2a + 1. \end{aligned}$$

On simplifie la seconde :

$$\begin{aligned} \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + 2 &= 0 \\ a - 2b + 8 &= 0. \end{aligned}$$

On remplace b par $2a + 1$:

$$\begin{aligned} a - 2(2a+1) + 8 &= 0 \\ a - 4a - 2 + 8 &= 0 \\ -3a + 6 &= 0 \\ a &= 2. \end{aligned}$$

Alors :

$$b = 2a + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{b = 5.}$$

Enfin, avec $b + 2k = 6$:

$$\begin{aligned} 5 + 2k &= 6 \\ 2k &= 1 \\ k &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\boxed{k = \frac{1}{2}.}$$

4) Expression de f.

Ainsi :

$$\boxed{f(x) = \left(2x^2 + 5x + 2\right) \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.}$$

(On peut aussi factoriser : $2x^2 + 5x + 2 = (2x + 1)(x + 2)$.)

Correction de l'exercice 24 : une suite qui tend vers e

Éléments de correction. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par : $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1. Calculer les cinq premier termes de la suite.

2. Première étape.

2. a. Montrer que, pour tout réel x, on a : $1+x \leqslant \mathrm{e}^x$.
Il suffit d'étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

2. b. En déduire que si $n \geqslant 1$ alors : $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e}$.

Pour n entier $n \geqslant 1$, on pose $x = \frac{1}{n}$ puis on compose par la fonction $x \longmapsto x^n$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $n \geqslant 1$.

3. Deuxième étape.

3. a. Montrer que, pour tout réel $x < 1$, on a : $\mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{1-x}$.
On remplace x par $(-x)$ dans l'inégalité précédente et donc pour tout réel x on a :

$$1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$$

Si $x < 1$ alors $0 < 1 - x \leqslant \mathrm{e}^{-x}$ et donc par composition par la fonction inverse, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ on a : $\mathrm{e}^x \leqslant \frac{1}{1-x}$.

3. b. En déduire que si $n \geqslant 1$ alors : $\mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Pour n entier $n \geqslant 1$, on pose $x = \frac{1}{n+1} < 1$ et en remplaçant dans l'inégalité :

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}} \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = 1 + \frac{1}{n}$$

Puis on compose par la fonction $x \longmapsto x^{n+1}$ qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $n \geqslant 1$.

4. Dernière étape.

4. a. En déduire que si $n \geqslant 1$ on a : $0 \leqslant \mathrm{e} - u_n \leqslant \frac{3}{n}$.
D'après les questions 1 et 2 on a pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Donc

$$0 \leqslant \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n}}$$

Soit

$$0 \leqslant \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n} \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n} \leqslant \frac{3}{n}$$

4. b. En conclure que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.
Aisé par théorème d'encadrement.

Correction de l'exercice 29 : La loi de Poisson

Remarque historique

En 1837, le mathématicien et physicien français **Denis Poisson** publie l'ouvrage *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*. Il y introduit une nouvelle loi de probabilité destinée à modéliser des phénomènes rares, comme le nombre d'événements se produisant sur un intervalle de temps donné. Cette loi portera par la suite son nom et constitue aujourd'hui un outil fondamental en probabilités, en statistique et en modélisation des phénomènes aléatoires.

Soit $\lambda > 0$. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ lorsque, pour tout entier naturel k :

$$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

où $k!$ désigne le produit de tous les entiers naturels de 1 à k.
Par convention, $0! = 1$.
On admet que cette expression définit bien une loi de probabilité sur l'ensemble des entiers naturels.
On considère deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivant chacune une loi de Poisson, de paramètres respectifs λ et μ.
On s'intéresse à la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

1. Que valent $P(X = 0)$ et $P(Y = 0)$?

Corrigé (1 point)

On a :

$$P(X = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} = \mathrm{e}^{-\lambda}.$$

De même :

$$P(Y = 0) = \mathrm{e}^{-\mu}.$$

2. Calculer $P(X + Y = 0)$.

Corrigé (1 point)

On a :

$$X + Y = 0 \iff X = 0 \text{ et } Y = 0.$$

Les variables X et Y étant indépendantes :

$$P(X + Y = 0) = P(X = 0) \times P(Y = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{-\mu} = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}.$$

3. Décomposer l'événement $\{X + Y = 1\}$ selon les valeurs possibles de X et Y.

Corrigé (1 point)

On a :

$$X + Y = 1 \iff (X = 1 \text{ et } Y = 0) \text{ ou } (X = 0 \text{ et } Y = 1).$$

4. En déduire la probabilité $P(X + Y = 1)$.

Corrigé (2 points)

Les événements précédents sont incompatibles et, X et Y étant indépendantes :

$$\begin{aligned} P(X+Y=1) &= P(X=1)P(Y=0)+P(X=0)P(Y=1) \\ &= \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda}\,\mathrm{e}^{-\mu}+\mu\,\mathrm{e}^{-\mu}\,\mathrm{e}^{-\lambda} \\ &= (\lambda+\mu)\,\mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}. \end{aligned}$$

5. Calculer $P(X+Y=2)$.

Corrigé (2 points)

On a :

$$X+Y=2 \iff \begin{cases} X=2 \text{ et } Y=0, \\ X=1 \text{ et } Y=1, \\ X=0 \text{ et } Y=2. \end{cases}$$

Les événements sont incompatibles et X et Y indépendantes :

$$\begin{aligned} P(X+Y=2) &= P(X=2)P(Y=0)+P(X=1)P(Y=1)+P(X=0)P(Y=2) \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\left(\frac{\lambda^2}{2}+\lambda\mu+\frac{\mu^2}{2}\right) \\ &= \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\,\frac{(\lambda+\mu)^2}{2}. \end{aligned}$$

6. Conjecturer la loi suivie par la variable aléatoire $X+Y$.

Corrigé (1 point)

Les résultats obtenus suggèrent que, pour tout entier naturel k :

$$P(X+Y=k) = \mathrm{e}^{-(\lambda+\mu)}\,\frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}.$$

On conjecture donc que la variable aléatoire $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.