



Math93.com

TD 2 - 1re Spécialité maths

Fonctions Trigonométriques

Les exercices suivants dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont corrigés intégralement en fin du présent TD.
Les autres présentent des éléments de réponses ou un lien vers une correction détaillée sur www.math93.com

Partie I. Étudier le signe d'une expression trigonométrique

Exercice 1. Inéquations (c)

Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$ puis sur $[0 ; 2\pi [$ les inéquations suivantes :

1. $\cos x > 0$

2. $\sin(x) \cos(x) < 0$

3. $\sin(x) < \frac{1}{2}$

4. $\cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$

5. $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

6. $\sin(x) > \cos(x)$

Exercice 2. Etude de signe (c)

Déterminer le signe de $(2 \cos x + 1)$ sur $] - \pi ; \pi]$ puis sur $[0 ; 2\pi[$.

Partie II. Étudier une fonction trigonométrique sur $[0 ; \pi]$

Exercice 3.

Soit f une fonction définie sur $[0 ; \pi]$ par :

$$f(x) = (1 - \cos x) \sin x$$

1. Calculer la dérivée de f .
2. Montrer que pour tout réel de $[0 ; \pi]$ on a :

$$f'(x) = (1 + 2 \cos x)(1 - \cos x)$$

3. En déduire les variations de f sur $[0 ; \pi]$.
4. Construire la courbe représentative de f sur $[0 ; \pi]$.



Réponses

$$f'(x) = \sin^2 x + \cos x - \cos^2 x; f \text{ croissante sur } \left[0; \frac{2\pi}{3}\right] \text{ et décroissante sur } \left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$$

Partie III. Étudier une fonction trigonométrique sur \mathbb{R}

Exercice 4. Prolongement de l'exercice 3

On reprend la fonction de l'exercice 3 mais sur \mathbb{R} .

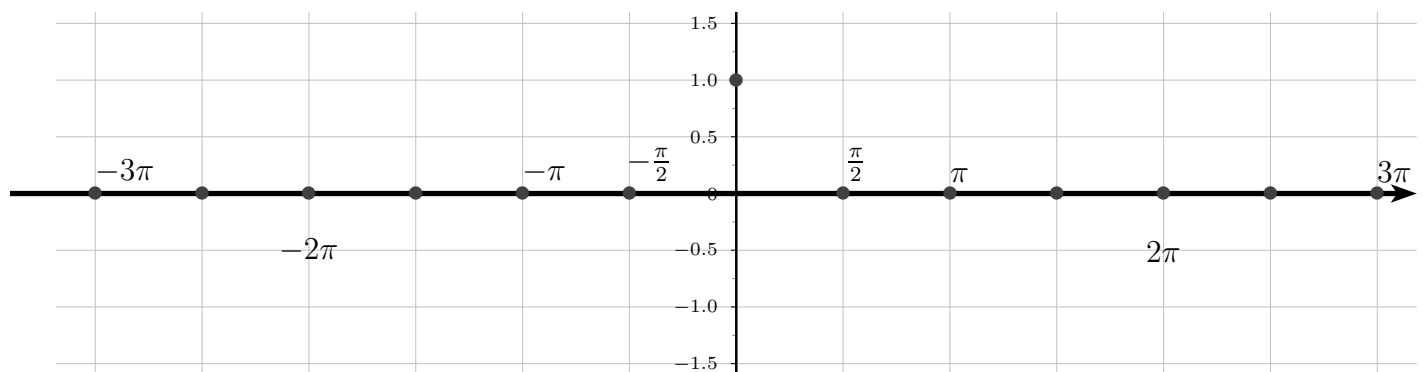
Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (1 - \cos x) \sin x$$

On a montré que sur $[0 ; \pi]$:

x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π	
Signe de $f'(x)$		+	0	-
Variations de f	0	$3\frac{\sqrt{3}}{4}$	0	

1. Étudier la parité de f . En déduire les variations de f sur $[-\pi ; \pi]$ et construire la courbe représentative de f sur $[-\pi ; \pi]$ sur le graphique ci-dessous.
2. Étudier la périodicité de f . En déduire les variations de f sur \mathbb{R} et construire la courbe représentative de f sur $[-3\pi ; 3\pi]$ sur le graphique ci-dessous.



Exercice 5. (c) Étude d'une fonction

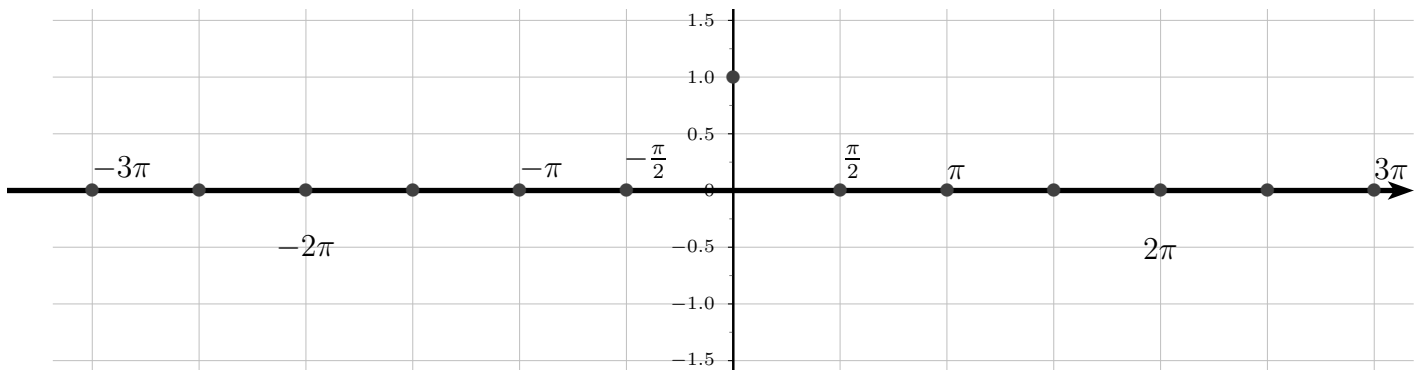
Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (1 + \cos x) \sin x$$

1. Étudier la parité et la périodicité de f .
2. Montrer que pour tout réel de \mathbb{R} on a :

$$f'(x) = (1 + \cos(x))(2 \cos(x) - 1)$$

3. En déduire les variations de f sur $[0 ; \pi]$ puis sur $[-3\pi ; 3\pi]$ en utilisant les résultats de la question 1.
4. Construire la courbe \mathcal{C}_1 , restriction de la courbe représentative de f sur $[0 ; \pi]$.
5. Expliquer comment tracer \mathcal{C}_f sur $[-3\pi ; 3\pi]$ et faite-le.

**Réponses**

f est 2π -périodique et impaire. f croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{3} ; \pi\right]$

Exercice 6. (c) Une fraction trigonométrique

**Méthode**

↯ Lors de l'étude d'une équation trigonométrique il faut être très vigilant sur le **domaine de définition**.

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\frac{1 + \cos x}{1 - \cos 2x} = 1$$

Exercice 7. (c) Étude d'une fonction (ex. 65)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 4 \cos x + \cos^2 x$$

1. Justifier que f est dérivable sur \mathbb{R} et que pour tout réel x :

$$f'(x) = -2 \sin x (2 + \cos x)$$

2. En déduire les variations de f sur $[0 ; 2\pi]$.

Partie IV. Bilan et Compléments

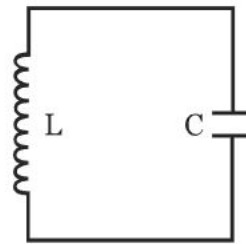
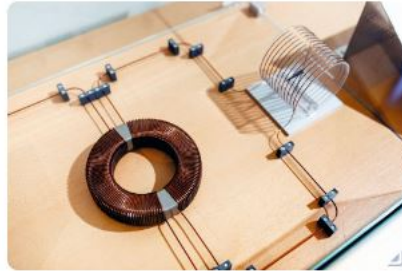
Exercice 8. (c) En Physique (ex. 76)

En physique, lors de l'étude des oscillateurs harmoniques d'ordre 2, on cherche des fonctions f qui vérifient

$$(E) : f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$$

pour tout $t \geq 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}$

(la fonction f'' est obtenue en dérivant deux fois la fonction f).



Exemple d'oscillateur harmonique d'ordre 2 : oscillations libres dans un circuit LC en électricité.

1. Soit a_1 un réel.

1. a. Montrer que la fonction f_1 définie sur \mathbb{R} par $f_1(t) = \cos(\omega t + a_1)$ vérifie l'équation (E).

1. b. Déterminer une valeur possible de a_1 telle que $f_1(0) = 0$.

2. Soit a_2 un réel.

2. a. Montrer que la fonction f_2 définie sur \mathbb{R} par $f_2(t) = \sin(\omega t + a_2)$ vérifie l'équation (E).

2. b. Déterminer une valeur possible de a_2 telle que $f_2(0) = \frac{1}{2}$.

Exercice 9. (c) Vrai ou Faux (ex 80)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Affirmation 1

Si une fonction dérivable en tout point de son ensemble de définition est paire, alors sa fonction dérivée est impaire.

Affirmation 2

Si une fonction dérivable en tout point de son ensemble de définition est impaire, alors sa fonction dérivée est paire.

Exercice 10. (c) Maximum et Minimum (ex 81)

Trouver le maximum et le minimum de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 4 \sin x - \sin^2 x$$

Exercice 11. Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur $[-\pi ; \pi]$ par :

$$f(x) = \frac{-1}{2} \cos 2x + \cos x + \frac{3}{2}$$

1. Étudier la parité de f
2. Calculer les valeurs exactes de : $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $f(\pi)$.
3. Déterminer et factoriser la dérivée de f .
4. Résoudre dans $[-\pi ; \pi]$ l'équation :
$$(\sin x)(2 \cos x - 1) = 0$$
5. Calculer les valeurs exactes de : $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. En déduire le tableau de variations de f sur $[-\pi ; \pi]$.
6. Tracer le graphe de f .

Exercice 12. Optimisation

Le but de cet exercice est de chercher de deux façons différentes le minimum de la fonction g définie sur $] - \pi ; \pi[$ par :

$$g(x) = \frac{2 \cos x - 6 \sin x + 8}{1 + \cos x}$$

Méthode 1

1. Exprimer $(\sin x - \cos x)$ en fonction de $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
2. En déduire les solutions sur $] - \pi ; \pi[$ de l'équation $(\sin x - \cos x) = 1$.
3. déterminer la dérivée de g sur $] - \pi ; \pi[$.
4. Résoudre $g'(x) = 0$ et étudier les variations de g .
5. Conclure sur le minimum de g .

Méthode 2

1. Écrire $g(x)$ sous la forme $f(t)$ où $t = \tan \frac{x}{2}$.
2. Déterminer le minimum de f .
3. Conclure sur le minimum de g .

↩ **Fin du TD** ↪

Partie V. Corrections

Correction de l'exercice 1

Résoudre dans $] -\pi ; \pi]$:

1. $\cos x > 0 \iff x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$
2. $\sin(x) \cos(x) < 0 \iff x \in \left] \frac{-\pi}{2} ; 0 \right[\cup \left] \frac{\pi}{2} ; \pi \right[$
3. $\sin(x) < \frac{1}{2} \iff x \in]-\pi ; \frac{\pi}{6}[\cup \left] \frac{5\pi}{6} ; \pi \right[$
4. $\cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in \left] -\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} \right[$
5. $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in]-\pi ; \frac{\pi}{3}] \cup \left] \frac{2\pi}{3} ; \pi \right[$
6. $\sin(x) > \cos(x) \iff x \in]-\pi ; -\frac{3\pi}{4}[\cup \left] \frac{\pi}{4} ; \pi \right[$

Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$:

1. $\cos x > 0 \iff x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2} \right[\cup \left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi \right[$
2. $\sin(x) \cos(x) < 0 \iff x \in \left] \frac{\pi}{2} ; \pi \right[\cup \left] \frac{3\pi}{2} ; 2\pi \right[$
3. $\sin(x) < \frac{1}{2} \iff x \in \left[0 ; \frac{\pi}{6} \right[\cup \left] \frac{5\pi}{6} ; 2\pi \right[$
4. $\cos(x) > \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in \left[0 ; \frac{\pi}{4} \right[\cup \left] \frac{7\pi}{4} ; 2\pi \right[$
5. $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left[0 ; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left] \frac{2\pi}{3} ; 2\pi \right[$
6. $\sin(x) > \cos(x) \iff x \in \left] \frac{\pi}{4} ; \frac{5\pi}{4} \right[$

Correction de l'exercice 2

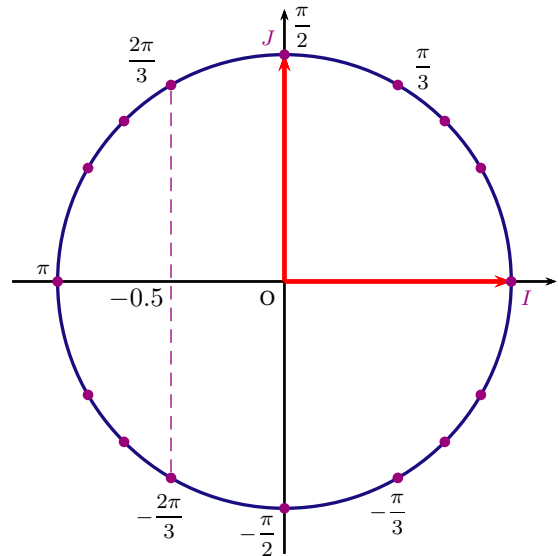
$$2 \cos x + 1 > 0 \iff \cos x > -0,5$$

• Sur $] -\pi ; \pi]$:

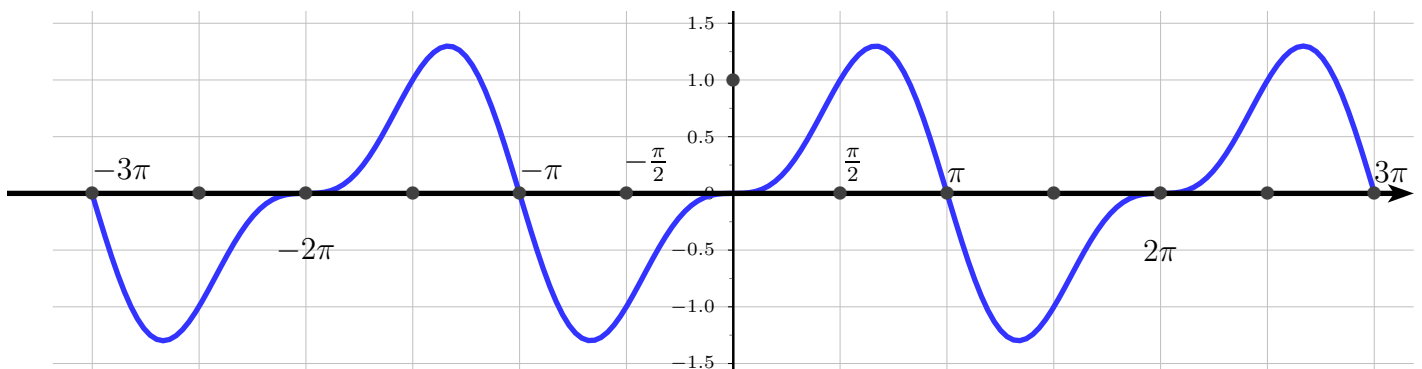
$$\begin{cases} \cos x > -0,5 \iff x \in \left] -\frac{2\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} \right[\\ \cos x < -0,5 \iff x \in \left] -\pi ; -\frac{2\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{2\pi}{3} ; \pi \right[\end{cases}$$

• Sur $[0 ; 2\pi[$:

$$\begin{cases} \cos x > -0,5 \iff x \in \left[0 ; \frac{2\pi}{3} \right[\cup \left] \frac{4\pi}{3} ; 2\pi \right[\\ \cos x < -0,5 \iff x \in \left] \frac{2\pi}{3} ; \frac{4\pi}{3} \right[\end{cases}$$



Correction de l'exercice 4



Correction de l'exercice 5

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (1 + \cos x) \sin x$$

1. Étudier la parité et la périodicité de f .



Corrigé

- La fonction f est 2π -périodique car les fonction sinus et cosinus le sont. On peut restreindre son étude à un intervalle de longueur 2π , par exemple $I = [-\pi ; \pi]$.

On prend un intervalle centré en 0 pour pouvoir profiter de l'éventuelle parité de la fonction.

- f est aussi impaire en effet :

$$- \forall x \in I, (-x) \in I;$$

- $\forall x \in I$: le sinus est impaire et le cosinus paire donc :

$$f(-x) = (1 + \cos(-x)) \sin(-x)$$

$$= (1 + \cos x) \times (-\sin x)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

- On peut donc réduire notre étude à l'intervalle $[0 ; \pi]$, la fonction étant impaire, il suffit de faire une symétrie de la courbe par rapport à l'origine du repère.

2. Montrer que pour tout réel de \mathbb{R} on a :

$$f'(x) = (1 + \cos(x))(2 \cos(x) - 1)$$



Corrigé

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = (1 + \cos(x)) \times \sin x \end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} .

La fonction f est de la forme uv donc de dérivée $u'v + uv'$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = u(x) \times v(x) : \begin{cases} u(x) = (1 + \cos(x)) & ; & u'(x) = -\sin x \\ v(x) = \sin x & & ; & v'(x) = \cos x \end{cases}$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

$$f'(x) = -\sin x \times \sin x + (1 + \cos(x)) \times \cos x$$

$$f'(x) = -\sin^2 x + (1 + \cos x) \cos x$$

$$f'(x) = \cos^2 x - 1 + (1 + \cos x) \cos x$$

$$f'(x) = (\cos x - 1)(\cos x + 1) + (1 + \cos x) \cos x$$

Soit

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}; f'(x) = (1 + \cos(x))(2 \cos(x) - 1)}$$

3. En déduire les variation de f sur $[0 ; \pi]$ puis sur $[-3\pi ; 3\pi]$ en utilisant les résultats de la question 1.



Corrigé

- On va étudier le signe de chaque facteur sur $I = [0 ; \pi]$.
- Pour x de $[0 ; \pi]$, puisque le cosinus est compris entre (-1) et 1 :

$$\begin{cases} 1 + \cos x \geq 0 \\ 1 + \cos x = 0 \iff x = \pi \end{cases}$$

- Pour x de $[0 ; \pi]$:

$$\begin{cases} 2 \cos x - 1 = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} \\ 2 \cos x - 1 > 0 \iff \cos x > \frac{1}{2} \iff 0 \leq x < \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

- On en déduit les variation sur $[0 ; \pi]$:

$$f(x) = (1 + \cos x) \sin x \implies \begin{cases} f(0) = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1,3 \\ f(\pi) = 0 \end{cases}$$

t	0	$\frac{\pi}{3}$	π
Signe de $1 + \cos x$	+	⋮	+
Signe de $2 \cos x - 1$	+	0	-
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

- On en déduit les variation sur $[-\pi ; \pi]$ par symétrie par rapport à l'origine du repère :

t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{3}$	π
Variations de f					

- Pour obtenir ensuite les variations sur $[-3\pi ; 3\pi]$, il suffit de faire des translations.

4. Construire la courbe \mathcal{C}_1 , restriction de la courbe représentative de f sur $[0 ; \pi]$.

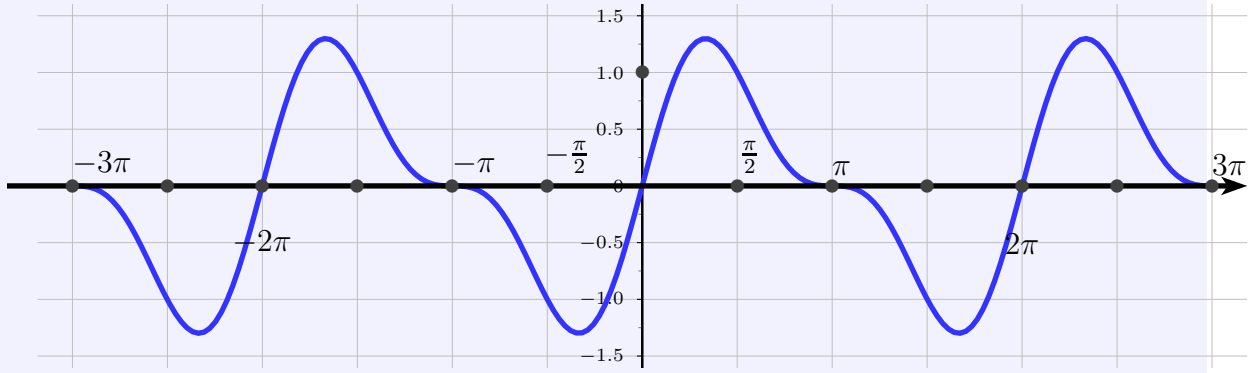


Corrigé

5. Expliquer comment tracer \mathcal{C}_f sur $[-3 ; 3\pi]$ et faite-le.



Corrigé



Correction de l'exercice 6

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation :

$$\frac{1 + \cos x}{1 - \cos 2x} = 1$$



Corrigé

- L'équation est définie si $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

On note I son ensemble de définition.

- On a pour tout réel x de l'ensemble de définition I :

$$\frac{1 + \cos x}{1 - \cos 2x} = 1 \iff 1 + \cos x = 1 - \cos 2x \quad (\text{et } x \neq k\pi)$$

$$\iff -\cos x = \cos 2x \quad (\text{et } x \neq k\pi)$$

$$\iff \cos(x + \pi) = \cos 2x \quad (\text{et } x \neq k\pi)$$

$$\iff \begin{cases} x + \pi = 2x + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x + \pi = -2x + 2k\pi \end{cases} \quad (\text{et } x \neq k\pi)$$

$$\iff \begin{cases} x = \pi + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (\text{et } x \neq k\pi)$$

- Les premières solutions de la forme $x = \pi + 2k\pi$ ne sont pas dans l'ensemble de définition. Certaines solutions de la deuxième équation n'y sont pas non plus ... (ex. pour $k = 2 \dots$) :

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + 2k\frac{\pi}{3} = \frac{2k-1}{3}\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\pi \end{cases}$$

Il va rester les $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{\pi}{3}$ modulo $2\pi \dots$

Correction de l'exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto 4 \cos(x) + (\cos(x))^2$ définie sur \mathbb{R} .

1. Justifier que f est dérivable et montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2 \sin(x) \times (2 + \cos(x))$.

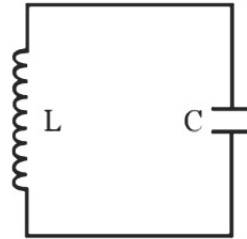
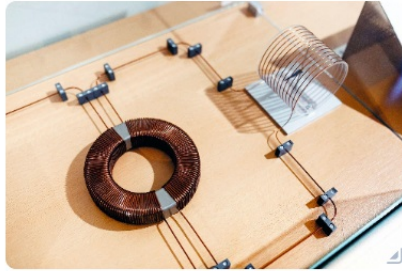
La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} car elle en l'obtient ^{$f(x)$} par somme et produit de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et pour tout x réel, $f'(x) = -4 \sin x - 2 \sin x \cos x = -2 \sin x (2 + \cos x)$.

2. En déduire les variations de f sur $[0 ; 2\pi]$.

Comme $-2(2 + \cos x)$ est toujours négatif, $f'(x)$ ^{$f(x)$} est du signe opposé à $\sin x$. La fonction f est donc décroissante sur $[0 ; \pi]$ et croissante sur $[\pi ; 2\pi]$.

Correction de l'exercice 8

En physique, lors de l'étude des oscillateurs harmoniques d'ordre 2, on cherche des fonctions f qui vérifient (E) : $f''(t) + \omega^2 f(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}$ (la fonction f'' est obtenue en dérivant deux fois la fonction f).



Exemple d'oscillateur harmonique d'ordre 2 : oscillations libres dans un circuit LC en électricité.

1. Soit a_1 un réel.

a. Montrer que $f_1 : t \mapsto \cos(\omega t + a_1)$ vérifie (E).

On dérive f_1 deux fois. On a $f_1'(t) = -\omega \sin(\omega t + a_1)$. $f^{(0)}$
Donc $f_1''(t) = -\omega^2 \cos(\omega t + a_1)$. Donc $f_1''(t) + \omega^2 f_1(t) = 0$.

b. Déterminer une valeur possible de a_1 telle que $f_1(0) = 0$.

La condition $f_1(0) = 0$ se traduit par $\cos a_1 = 0$ donc $f^{(0)}$
 $a_1 = \frac{\pi}{2}$ (par exemple). Donc on peut poser $f_1(t) = \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$.

2. Soit a_2 un réel.

a. Montrer que $f_2 : t \mapsto \sin(\omega t + a_2)$ vérifie (E).

On dérive de même f_2 deux fois. On a $f_2'(t) = \omega \cos(\omega t + a_2)$. $f^{(0)}$
Donc $f_2''(t) = -\omega^2 \sin(\omega t + a_2)$.
Donc $f_2''(t) + \omega^2 f_2(t) = 0$.

b. Déterminer une valeur possible de a_2 telle que $f_2(0) = \frac{1}{2}$.

La condition $f_2(0) = \frac{1}{2}$ se traduit par $\sin a_2 = \frac{1}{2}$ donc $f^{(0)}$
 $a_2 = \frac{\pi}{6}$ (par exemple). Donc on peut poser $f_2(t) = \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Correction de l'exercice 9

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. Si une fonction dérivable en tout point de son ensemble de définition est paire, alors sa fonction dérivée est impaire.

La proposition est vraie. Si une fonction dérivable est paire, alors en dérivant pour x réel la fonction $g : x \mapsto f(-x)$ on a $g'(x) = -f'(-x)$. Or on sait que $g(x) = f(x)$ car f est paire. Donc $g'(x) = f'(x)$. Finalement, on obtient $f'(x) = -f'(-x)$ ce qui montre que f' est impaire.

2. Si une fonction dérivable en tout point de son ensemble de définition est impaire, alors sa fonction dérivée est paire.

La proposition est vraie. On prouve cette assertion de la même manière que la première proposition.

Correction de l'exercice 10

Trouver le maximum et le minimum de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = 4 \sin x - \sin^2 x$$



Corrigé

- La fonction f est 2π -périodique, il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π , par exemple sur $I = [-\pi ; \pi]$.

- Pour tout réel x de I , la fonction f est dérivable et :

$$f'(x) = 4 \cos x - 2 \cos x \sin x = 2 \cos x (2 - \sin x)$$

- On va étudier le signe de chaque facteur sur I :

- Sur I le facteur $(2 - \sin x)$ est strictement positif puisque le sinus est compris entre (-1) et 1 . La dérivée est donc du signe de $2 \cos x$.

- Sur I on a :

$$\begin{cases} 2 \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos x > 0 \iff 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- De ce fait puisque :

$$f(x) = 4 \sin x - \sin^2 x \implies \begin{cases} f(-\pi) = 0 \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - 1 = 3 \\ f(\pi) = 0 \end{cases}$$

t	$-\pi$	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $f'(x)$		+	0
Variations de f		3	-
	0		0

- Conclusion** : le maximum de la fonction f est 3, atteint en $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et le minimum 0 atteint en $\pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.