Math93.com

TD 1 - 1re Spé Maths
Produit Scalaire

Partie I. Produit Scalaire et cosinus

Exercice 1. Activité

Vincent s'initie au kitesurf. Il se déplace en ligne droite d'un point A à un point B sur une distance de 50 m. La force de traction $\overrightarrow{F}$ exercée par la vole a pour intensité 1 000 newtons $\left(\|\overrightarrow{F}\|\right)$.

En physique, le travail de la force $\overrightarrow{F}$ lors du déplacement de A en B est le nombre, noté W, tel que :

$$W = AB \times \|\overrightarrow{F}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

L'unité du travail est le joule (noté J).

1.

1. a. Compléter le tableau ci-dessous à l'aide de valeurs exactes.

$\widehat{BAC}$	0°	30°	45°		120°
W				25 000	

1. b. Louise affirme : « Si le vecteur $\overrightarrow{F}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{F}$ n'influence pas le déplacement. » Est-ce exact ?

2.

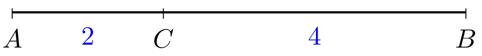
2. a. Étudier le signe de W en fonction de la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.

2. b. Les physiciens parlent de travail résistant lorsque $W < 0$. Justifier le vocabulaire.

Remarque

W est appelé produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur $\overrightarrow{F}$ et se note $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{F}$.

Exercice 2.



A, B, C sont trois points alignés.
Calculer :

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

b. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

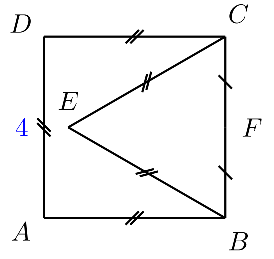
Exercice 3.

A, B, C sont trois points alignés distincts.
Compléter le tableau suivant :

AB	AC	$\widehat{BAC}$ en rad (dans $]-\pi:\pi]$)	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
	8	$\frac{\pi}{4}$	12
5	8		-20
2	4		$4\sqrt{2}$
2		$-\frac{\pi}{3}$	7,5

Exercice 4.

ABCD est un carré de côté 4.
BCE est un triangle équilatéral et F est le milieu du côté [BC].
Calculer les produits scalaires :



a. $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC}$

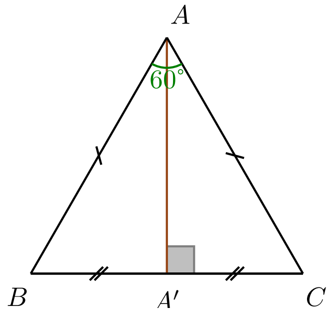
b. $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CF}$

c. $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$

d. $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BF}$

Exercice 5.

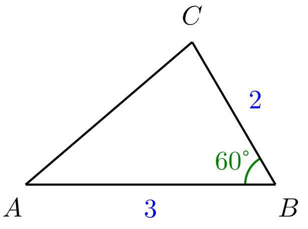
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de côté 4 et A' est le milieu du côté [BC].



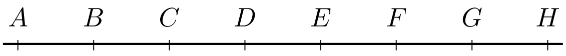
1. Justifier que $AA' = 2\sqrt{3}$.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC}$.

Exercice 6.

ABC est le tirangle ci-contre.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$.



Exercice 7. Avec des points alignés (c)



Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont placés sur une droite graduée de façon à ce que $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = 1$.
Déterminer les produits scalaires suivants :

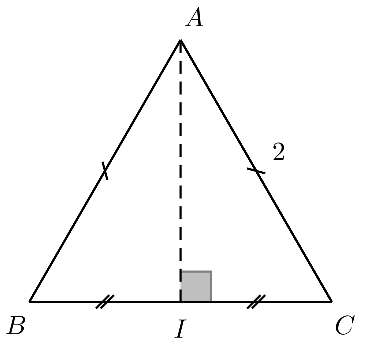
a. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$

b. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DF}$

c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$

d. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{HD}$

Exercice 8. Dans un triangle équilatéral (ex. 44p245) (c)

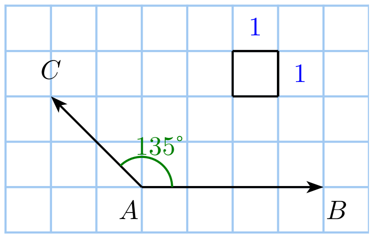


Le triangle ABC est un triangle équilatéral dont le côté mesure 2 cm. I est le pied de la hauteur issue de A. Déterminer les valeurs exactes des prodiuts scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ **2.** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$ **3.** $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$

Partie II. Produit Scalaire et projeté Orthogonal

Exercice 9. Application directe



A, B, C sont les trois points ci-contre.
Calculer la valeur exacte du produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

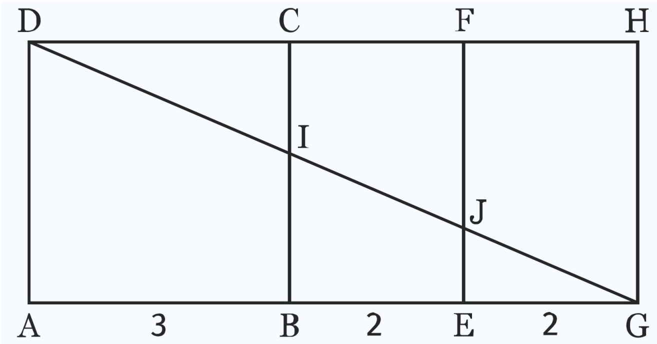
Exercice 10. Avec le projeté orthogonal 1 (c)

H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $AB = 4$, $AH = 3$ et $H \in [AB)$
2. $AB = 1$, $AH = 5$ et $H \notin [AB)$
3. $AB = 6$, $AH = \dfrac{19}{3}$ et $H \notin [AB)$

Exercice 11. PS et projeté : Dans un rectangle (c)

Dans une unité de longueur donnée, on considère un carré ABCD dont le côté mesure 3, accolé à deux rectangles identiques BEFC et EGHF de largeur 2.



En utilisant la formule du projeté orthogonal, calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$
3. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AG}$
4. $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{GD}$
5. $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{HG}$
6. $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA}$

Partie III. Produit Scalaire et coordonnées

Exercice 12. Avec les coordonnées (c)

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Exercice 13. Avec les coordonnées

On considère les vecteurs

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\-4\end{pmatrix}$$

Calculer :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ **2.** $(3\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v}$ **3.** $(4\overrightarrow{u}).(-2\overrightarrow{v})$ **4.** $\overrightarrow{u}.(\sqrt{2}\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$

Exercice 14. Déterminer t pour une orthogonalité (c)

Déterminer les éventuelles valeurs du réel t pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{V}$ sont orthogonaux.

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4t\\2\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}t\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}t+6\\2t-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}t\\2t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\sqrt{5}t+1\\\sqrt{12}\end{pmatrix}$

Partie IV. Produit Scalaire et normes

Exercice 15. Avec les normes (c)

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$
2. $AB = 2$, $AC = \dfrac{7}{3}$ et $BC = 1$
3. ABC est isocèle en A, $AB = 5$ et $BC = 2,5$

Exercice 16. Avec les normes

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $\|\overrightarrow{u}\| = 6$, $\|\overrightarrow{v}\| = 5$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2$.
Calculer les expressions suivantes.

1. $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$

2. $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$

3. $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$

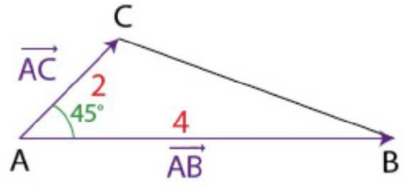
4. $(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}).(3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$

Partie V. Bilan 1

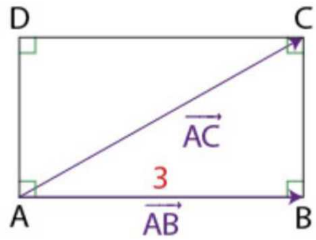
Exercice 17. Calcul d'un produit scalaire (c)

Dans chacun des quatre cas suivants, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

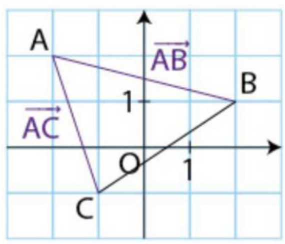
1. ABC est le triangle donné ci-contre.



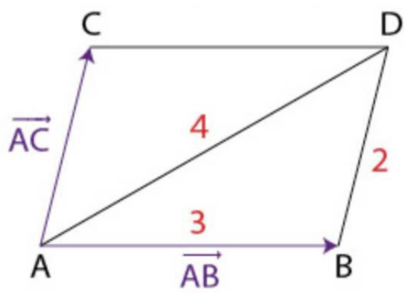
2. $ABCD$ est le rectangle donné ci-contre.



3. Les points A, B et C sont donnés dans le repère orthonormé ci-contre.



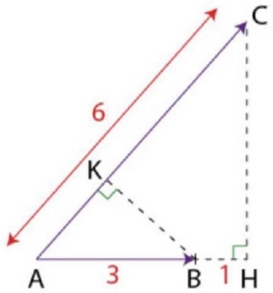
4. $ABDC$ est le parallélogramme donné ci-contre.



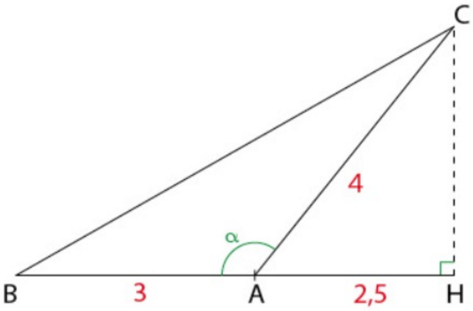
Partie VI. Calculer un angle ou une distance avec le produit scalaire

Exercice 18. Calcul de distance (c)

Avec les données de la figure donnée ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis en déduire la valeur de la distance AK.



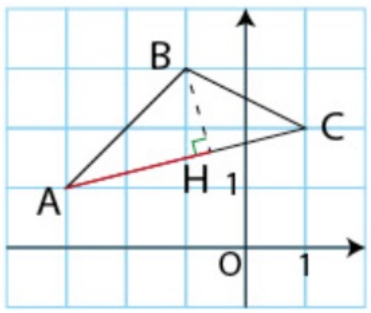
Exercice 19. Calcul d'angle (c)



ABC est le triangle ci-dessus avec $AB = 3$ et $AC = 4$.
H est le pied de la hauteur issue de C et $AH = 2,5$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire la mesure de l'angle α.

Exercice 20. Calcul de distance 2 (c)



dans un repère orthonormé on donne les points :

$$A(-3\,;\,1)\,;\;B(-1\,;\,3)\;\text{ et }\;C(1\,;\,2)$$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire la distance AH.

Partie VII. Perpendicularité et produit scalaire

Exercice 21. Dans un parallélogramme (c)

$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Montrer que $AB^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC} \, . \, \overrightarrow{DB}$.

2. En déduire la nature d'un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

Exercice 22. Dans un repère (c)

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(2;4)$ et $B(-2;2)$, ainsi que la droite *d* d'équation $y = x$.

Déterminer les coordonnées du point C appartenant à *d* tel que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 23. Dans un carré (DM)

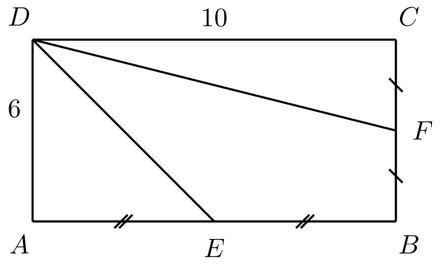
$ABCD$ est un carré de côté 1. E et F sont les points tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. *Faire une figure.*

Les droites (DE) et (CF) sont-elles perpendiculaires ?

Partie VIII. Bilan 2 ** : now we can Talk !

Exercice 24. Dans un rectangle * (Chasles est votre ami) (DM)

On considère le rectangle ABCD de longueur 10 et de largeur 6. E est le milieu du côté [AB] et F est le milieu du côté [BC]. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.



1. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$
2. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DF}$
3. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$
4. $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$
5. $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DB}$

Exercice 25. Diagonales d'un losange ** (c)

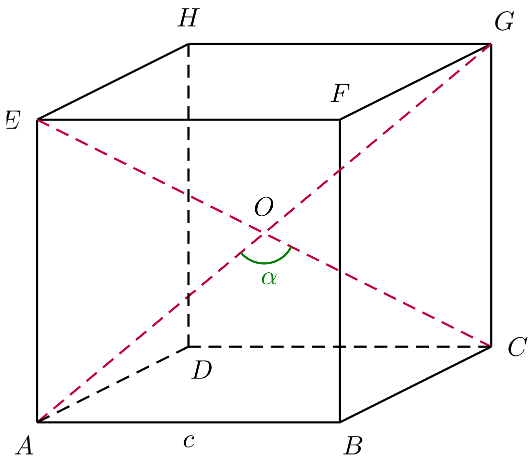
En utilisant la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire, démontrer le résultat connu :

« les diagonales d'un losange sont perpendiculaires » .

Exercice 26. Une démonstration * (c)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Montrer que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 27. Dans l'espace * (c)



On considère le cube de l'espace ABCDEFGH de côté c.
On note O le centre du cube. Le but de l'exercice est de montrer que l'angle α est indépendant de la longueur c des arêtes du cube.

1. Calculer les longueurs AC et AG.

2. À partir de deux expressions différentes du produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$, déterminer le cosinus de l'angle α.

Exercice 28. Une démonstration

Démontrer une propriété du cours

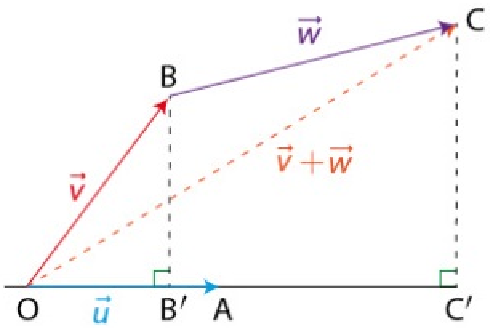
Prérequis : On suppose connue la définition du produit scalaire à l'aide d'un projeté orthogonal.

On se propose de démontrer que pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$

1. Justifier que l'égalité est vraie si au moins l'un des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ ou $\vec{w}$ est nul.

2. On suppose que les trois vecteurs sont non nuls et on note $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ et $\vec{w}=\overrightarrow{BC}$, ainsi que B′ et C′ les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur la droite (OA).



a) Justifier que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$.

b) En déduire que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = OA \times OC'$.

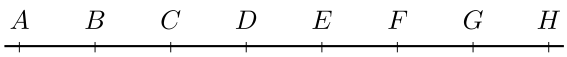
c) Justifier que $\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w} = OA\times OB' + OA\times B'C'$.

d) Conclure.

La démonstration est analogue pour B′, A et C′ alignés dans des ordres différents.

Partie IX. Correction

Correction de l'exercice 7 : Avec des points alignés



Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont placés sur une droite graduée de façon à ce que $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = 1$.
Déterminer les produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG} = 3 \times 6 = 18$

b. $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DF} = -1 \times 2 = -2$

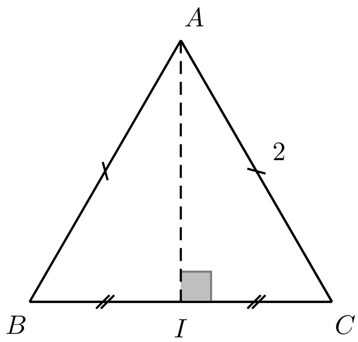
c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = 1 \times 1 = 1$

d. $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{HD} = 1 \times (-4) = -4$

Correction de l'exercice 8 : Dans un triangle équilatéral

Le triangle ABC est un triangle équilatéral dont le côté mesure 2 cm. I est le pied de la hauteur issue de A. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ **2.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$ **3.** $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$



1. I est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI} = 2 \times 1 = 2$

2. I est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BI} = BI^2 = 1^2 = 1$

3. I est le projeté orthogonal de C sur (AI) donc $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI} = AI^2$.
Le triangle AIC est rectangle en I. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AI^2 + IC^2$ donc $AI^2 = AC^2 - IC^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$.
Donc $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = 3$

Correction de l'exercice 10 : Avec le projeté orthogonal 1

H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

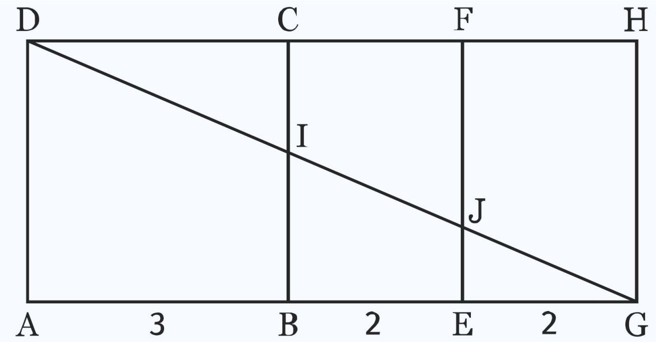
1. $AB = 4$, $AH = 3$ et $H \in [AB]$ — $H \in [AB]$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 4 \times 3 = 12$

2. $AB = 1$, $AH = 5$ et $H \notin [AB]$ — $H \notin [AB]$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -1 \times 5 = -5$

3. $AB = 6$, $AH = \dfrac{19}{3}$ et $H \notin [AB]$ — $H \notin [AB]$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -6 \times \dfrac{19}{3} = -38$

Correction de l'exercice 11 : PS et projeté : Dans un rectangle (c)

Dans une unité de longueur donnée, on considère un carré ABCD dont le côté mesure 3, accolé à deux rectangles identiques BEFC et EGHF de largeur 2.



En utilisant la formule du projeté orthogonal, calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

On projette le vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 3 = 9$.

2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$

On projette le vecteur $\overrightarrow{BF}$ sur le vecteur $\overrightarrow{BE}$:
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} = -3 \times 2 = -6$.

3. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AG}$

On projette le vecteur $\overrightarrow{EI}$ sur le vecteur $\overrightarrow{EB}$:
$\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AG} = -2 \times 7 = -14$.

4. $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{GD}$

On projette le vecteur $\overrightarrow{GD}$ sur le vecteur $\overrightarrow{HD}$: $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{HD} = -2 \times 7 = -14$.

5. $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{HG}$

Les droites (BC) et (GH) sont parallèles donc on projette le vecteur $\overrightarrow{IC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{HG}$.
Pour calculer la longueur IC, on utilise le théorème de Thalès dans le triangle GHD : $\frac{IC}{GH} = \frac{DC}{DH}$, donc $IC = \frac{DC \times GH}{DH} = \frac{3 \times 3}{7} = \frac{9}{7}$.
Alors $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{HG} = -\frac{9}{7} \times 3 = -\frac{27}{7}$.

6. $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA}$

Pour calculer la longueur EJ, on utilise le théorème de Thalès dans le triangle AGD : $\frac{EJ}{AD} = \frac{GE}{GA}$, donc $EJ = \frac{GE \times AD}{GA} = \frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$.
On projette le vecteur $\overrightarrow{FA}$ sur le vecteur $\overrightarrow{FE}$:
$\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FE} = -\frac{6}{7} \times 3 = -\frac{18}{7}$.

Correction de l'exercice 12 : Avec les coordonnées

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 0 \times 5 + (-2) \times (-1) = 2$

2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 3 \times 4 + 1 \times (-3) = 12 - 3 = 9$

3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 7 \times 5 + (-4) \times 6 = 35 - 24 = 11$

Correction de l'exercice 14 : Déterminer t

Déterminer les éventuelles valeurs du réel t pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{V}$ sont orthogonaux.

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4t\\2\end{pmatrix}$ **2.** $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}t\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}t+6\\2t-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ **3.** $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}t\\2t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\sqrt{5}t+1\\\sqrt{12}\end{pmatrix}$

Le repère est orthonormé.

1.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0\\
&\iff -2\times 4t + t\times 2 = 0\\
&\iff -8t + 2t = 0\\
&\iff -6t = 0\\
&\iff t = 0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0\\
&\iff t\times(t+6) - 2\times(2t-\frac{1}{2}) = 0\\
&\iff t^2 + 6t - 4t + 1 = 0\\
&\iff t^2 + 2t + 1 = 0\\
&\iff (t+1)^2 = 0\\
&\iff t = -1
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0\\
&\iff \sqrt{3}\times(\sqrt{5}t+1) + 2t\sqrt{12} = 0\\
&\iff \sqrt{15}t^2 + \sqrt{3}t + 2t\sqrt{12} = 0\\
&\iff t(\sqrt{15}t + \sqrt{3} + 2\sqrt{12}) = 0\\
&\iff t = 0 \text{ ou } t = \frac{-\sqrt{3} - 2\sqrt{12}}{\sqrt{15}}\\
&\iff t = 0 \text{ ou } t = \frac{-\sqrt{3} - 2\times 2\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\\
&\iff t = 0 \text{ ou } t = \frac{-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}\\
&\iff t = 0 \text{ ou } t = \frac{-5}{\sqrt{5}}\\
&\iff t = 0 \text{ ou } t = -\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 : Avec les normes

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(3^2 + 4^2 - 6^2) \\
&= \frac{1}{2}(9 + 16 - 36) \\
&= \frac{1}{2}(-11)
\end{aligned}$$

2. $AB = 2$, $AC = \frac{7}{3}$ et $BC = 1$

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(2^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 1^2) \\
&= \frac{1}{2}(4 + \frac{49}{9} - 1) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{36 + 49 - 9}{9}\right) \\
&= \frac{38}{9}
\end{aligned}$$

3. ABC est isocèle en A, $AB = 5$ et $BC = 2,5$

ABC est isocèle en A donc $AB = AC$

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ donc :

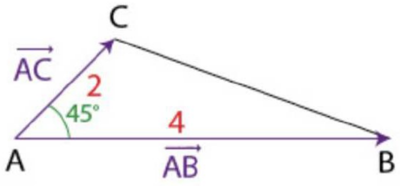
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2) \\
&= \frac{1}{2}(5^2 + 5^2 - 2,5^2) \\
&= \frac{1}{2}\left(25 + 25 - \frac{25}{4}\right) \\
&= \frac{175}{8}
\end{aligned}$$

Correction Bilan1

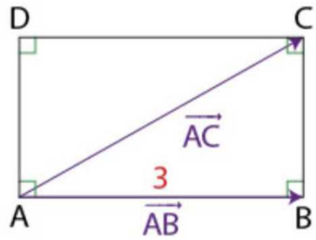
Correction de l'exercice 17 : Calcul d'un produit scalaire

Dans chacun des quatre cas suivants, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

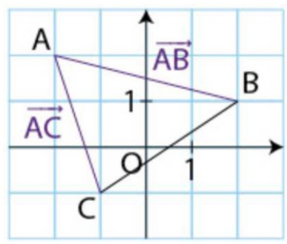
1. ABC est le triangle donné ci-contre.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right) = 4\times 2\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8\times\frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$



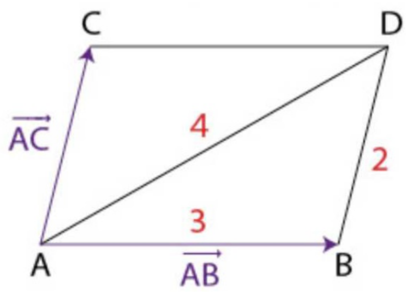
2. $ABCD$ est le rectangle donné ci-contre.
B est le projeté orthogonal de C sur (AB) et $B\in[AB]$ donc :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB\times AB = 3\times 3 = 9$



3. Les points A, B et C sont donnés dans le repère orthonormé ci-contre.
Le repère est orthonormé.
$\overrightarrow{AB}\ (4\,;\,-1)$ et $\overrightarrow{AC}\ (1\,;\,-3)$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 4\times 1 + (-1)\times(-3) = 7$



4. $ABDC$ est le parallélogramme donné ci-contre.
1ère méthode :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$.
Or $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - \|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(3^2+4^2-\|\overrightarrow{DB}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(25-2^2\right) = \frac{21}{2}$.
Et $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC} = -AD\times DC = -3\times 3 = 9$
Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{21}{2} - 9 = \frac{21}{2} - \frac{18}{2} = \frac{3}{2}$

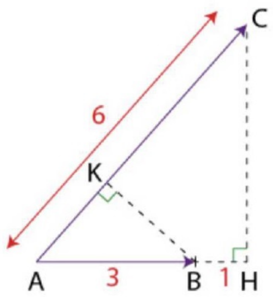


2e méthode :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\|^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AD}\|^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2\right) = \frac{1}{2}\left(4^2-3^2-2^2\right) = \frac{1}{2}(16-9-4) = \frac{3}{2}$

Correction Distances et Angles

Correction de l'exercice 18 : Calcul de distance

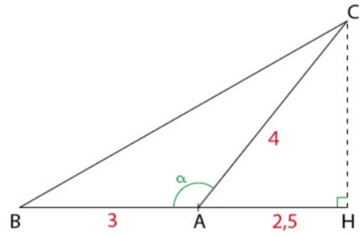
Avec les données de la figure donnée ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis en déduire la valeur de la distance AK.



H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et $H \in [AB)$ donc :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 3 \times 4 = 12$
K est le projeté orthogonal de B sur (AC) et $K \in [AC)$ donc :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AK \times AC = AK \times 6 = 12$
Donc $AK = 2$

Correction de l'exercice 19 : Calcul d'angle (c)

ABC est le triangle ci-contre avec $AB = 3$ et $AC = 4$.
H est le pied de la hauteur issue de C et $AH = 2,5$.
a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
b) En déduire la mesure α, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.
Arrondir à l'unité.



Solution

a) H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraires,
donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -3 \times 2,5 = -7,5$.

b) De plus, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\alpha)$,
c'est-à-dire $-7,5 = 3 \times 4 \times \cos(\alpha)$.
Ainsi, $\cos(\alpha) = \dfrac{-7,5}{12} = -\dfrac{5}{8}$ et avec la calculatrice, $\alpha \approx 129°$.

On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes :
– au **a)**, avec un projeté orthogonal,
– au **b)**, avec un cosinus.

Correction de l'exercice 20 :Calcul de distance 2 (c)

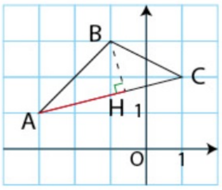
Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$A(-3\,;1)$, $B(-1\,;3)$ et $C(1\,;2)$.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire la distance AH, où H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

Arrondir au dixième.



a) $\overrightarrow{AB}(2\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;1)$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 4 + 2\times 1 = 10$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AH\times AC$.

Ainsi $AH\times AC = 10$, c'est-à-dire $AH = \dfrac{10}{AC} = \dfrac{10}{\sqrt{4^2+1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{17}}$.

Donc $AH \approx 2{,}4$.

On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes :

– au **a)**, avec l'expression analytique,

– au **b)**, avec un projeté orthogonal.

Correction perpendicularité et produit scalaire

Correction de l'exercice 21 : Dans un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Montrer que $AB^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.

$AB^2 - AD^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$
Or $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.
De plus ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
Donc $AB^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

2. En déduire la nature d'un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

ABCD est un parallélogramme dont les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$.
Donc $AB^2 - AD^2 = 0$ soit $AB^2 = AD^2$ soit $AB = AD$ puisque ce sont des longueurs.
Or ABCD est un parallélogramme, donc $AB = DC$ et $AD = BC$.
Donc $AB = AD = DC = BC$.
Donc ABCD est un losange.

Correction de l'exercice 22 : Dans un repère

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(2;4)$ et $B(-2;2)$, ainsi que la droite *d* d'équation $y=x$.

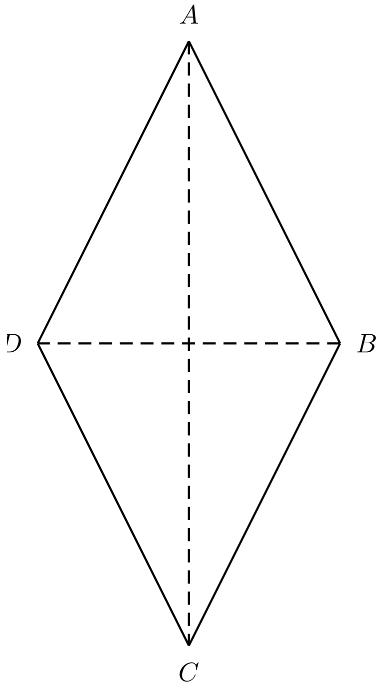
Déterminer les coordonnées du point C appartenant à *d* tel que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
$(AB) \perp (AC)$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.
$\overrightarrow{C}\begin{pmatrix} x_C \\ x_C \end{pmatrix}$ car C appartient à la droite d'équation $y=x$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2-2 \\ 2-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-2 \\ x_C-4 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -4(x_C-2)-2(x_C-4)=0$.
$-4x_C+8-2x_C+8=0$.
$-6x_C=-16$.
$x_C=\dfrac{16}{6}=\dfrac{8}{3}$.
Donc $C\left(\dfrac{8}{3}\,;\,\dfrac{8}{3}\right)$

Correction Bilan 2

Correction de l'exercice 25 : Diagonales d'un losange (c)

En utilisant la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire, démontrer le résultat connu :

« les diagonales d'un losange sont perpendiculaires » .



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)\\ &= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}\\ &= \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}^2\end{aligned}$$

Or ABCD est un losange donc un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{0}$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{0}+\overrightarrow{AB}.\left(-\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BC}^2\\ &= -\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}^2 \text{ car ABCD est un losange donc } AB=CD\\ &= 0\end{aligned}$$

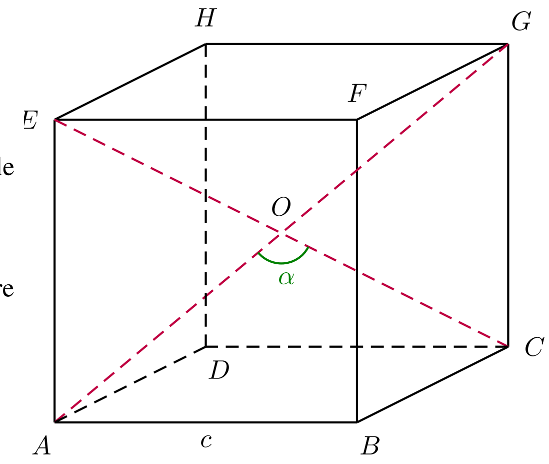
On a prouvé que si ABCD est un losange, alors $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$, donc les diagonales sont perpendiculaires.

Correction de l'exercice 26 : Une démonstration * (c)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Montrer que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = 0 \\
&\iff \|\overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
&\iff \|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| \text{ car } \|\overrightarrow{u}\| > 0 \text{ et } \|\overrightarrow{v}\| > 0
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 27 : Dans l'espace * (c)



On considère le cube de l'espace ABCDEFGH de côté c.
On note O le centre du cube. Le but de l'exercice est de montrer que l'angle α est indépendant de la longueur c des arêtes du cube.

1. Calculer les longueurs AC et AG.

2. À partir de deux expressions différentes du produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$, déterminer le cosinus de l'angle α.

1. Le triangle ABC est rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = c^2 + c^2 = 2c^2$.
$AC = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2}$ car $c > 0$.
De même, dans le triangle ACG rectangle en C : $AG^2 = 2c^2 + c^2 = 3c^2$ donc $AG = c\sqrt{3}$.

2. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = OA \times OC \times \cos\alpha$

Or $OA = OC = \dfrac{AG}{2} = c\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \left(c\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \cos(\alpha) = \dfrac{3c^2}{4}\cos(\alpha)$.

De plus $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}\left(OA^2 + OC^2 - \|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\|^2\right)$.

Or $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CA}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} &= \frac{1}{2}\left(\frac{3c^2}{4} + \frac{3c^2}{4} - 2c^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-2c^2}{4}\right) \\
&= \frac{-c^2}{4}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{3c^2}{4}\cos(\alpha) = \dfrac{-c^2}{4}$. Donc $\cos(\alpha) = \dfrac{-1}{3}$