Math93.com

TD 1 - 1re Spé Maths
Produit Scalaire

Partie I. Produit Scalaire et cosinus

Exercice 1. Activité

Vincent s'initie au kitesurf. Il se déplace en ligne droite d'un point A à un point B sur une distance de 50 m. La force de traction $\overrightarrow{F}$ exercée par la vole a pour intensité 1 000 newtons $\left(\|\overrightarrow{F}\|\right)$.

En physique, le travail de la force $\overrightarrow{F}$ lors du déplacement de A en B est le nombre, noté W, tel que :

$$W = AB \times \|\overrightarrow{F}\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$$

L'unité du travail est le joule (noté J).

1.

1. a. Compléter le tableau ci-dessous à l'aide de valeurs exactes.

$\widehat{BAC}$	0°	30°	45°		120°
W				25 000	

1. b. Louise affirme : « Si le vecteur $\overrightarrow{F}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{F}$ n'influence pas le déplacement. » Est-ce exact ?

2.

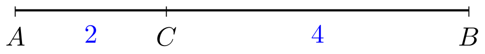
2. a. Étudier le signe de W en fonction de la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.

2. b. Les physiciens parlent de travail résistant lorsque $W < 0$. Justifier le vocabulaire.

Remarque

W est appelé produit scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le vecteur $\overrightarrow{F}$ et se note $\overrightarrow{AB}\,.\overrightarrow{F}$.

Exercice 2.



A, B, C sont trois points alignés.
Calculer :

a. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ **b.** $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$

Exercice 3.

A, B, C sont trois points alignés distincts.
Compléter le tableau suivant :

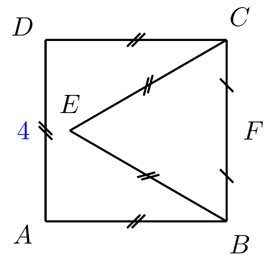
AB	AC	$\widehat{BAC}$ en rad (dans $]-\pi:\pi]$)	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$
	8	$\frac{\pi}{4}$	12
5	8		-20
2	4		$4\sqrt{2}$
2		$-\frac{\pi}{3}$	7,5

Exercice 4.

ABCD est un carré de côté 4.
BCE est un triangle équilatéral et F est le milieu du côté [BC].
Calculer les produits scalaires :

a. $\overrightarrow{EB}.\overrightarrow{EC}$ **c.** $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CE}$

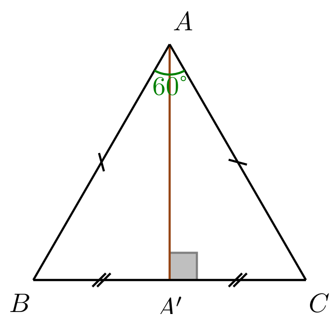
b. $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CF}$ **d.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BF}$



Exercice 5.

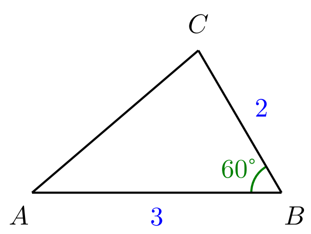
Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de côté 4 et A' est le milieu du côté [BC].

1. Justifier que $AA' = 2\sqrt{3}$.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BC}$.

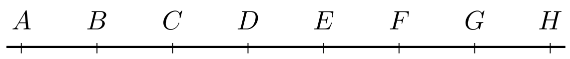


Exercice 6.

ABC est le tirangle ci-contre.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$.



Exercice 7. Avec des points alignés (c)



Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont placés sur une droite graduée de façon à ce que $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = 1$.
Déterminer les produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AG}$

b. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DF}$

c. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$

d. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{HD}$

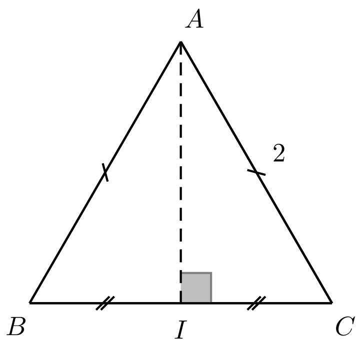
Exercice 8. Dans un triangle équilatéral (ex. 44p245) (c)

Le triangle ABC est un triangle équilatéral dont le côté mesure 2 cm. I est le pied de la hauteur issue de A. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BI}$

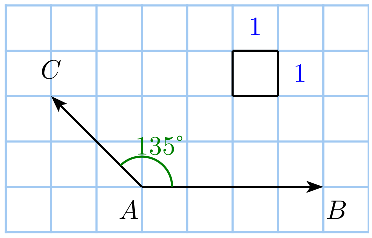
3. $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$



Partie II. Produit Scalaire et projeté Orthogonal

Exercice 9. Application directe

A, B, C sont les trois points ci-contre.
Calculer la valeur exacte du produit scalaire $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$.



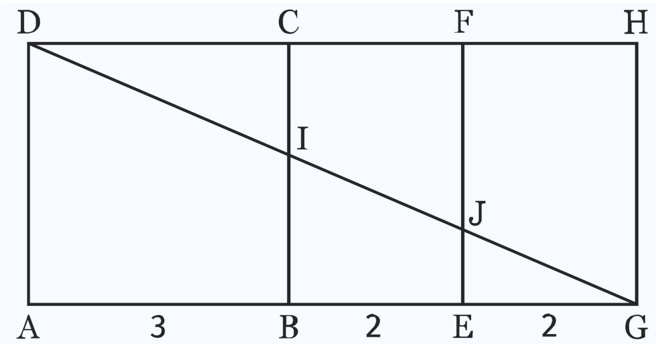
Exercice 10. Avec le projeté orthogonal 1 (c)

H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
Calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $AB = 4$, $AH = 3$ et $H \in [AB)$
2. $AB = 1$, $AH = 5$ et $H \notin [AB)$
3. $AB = 6$, $AH = \dfrac{19}{3}$ et $H \notin [AB)$

Exercice 11. PS et projeté : Dans un rectangle (c)

Dans une unité de longueur donnée, on considère un carré ABCD dont le côté mesure 3, accolé à deux rectangles identiques BEFC et EGHF de largeur 2.



En utilisant la formule du projeté orthogonal, calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$
2. $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BF}$
3. $\overrightarrow{EI}\,.\,\overrightarrow{AG}$
4. $\overrightarrow{CF}\,.\,\overrightarrow{GD}$
5. $\overrightarrow{IC}\,.\,\overrightarrow{HG}$
6. $\overrightarrow{EJ}\,.\,\overrightarrow{FA}$

Partie III. Produit Scalaire et coordonnées

Exercice 12. Avec les coordonnées (c)

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$

Exercice 13. Avec les coordonnées

On considère les vecteurs

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1-\sqrt{2}\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\-4\end{pmatrix}$$

Calculer :

1. $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$
2. $(3\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v}$
3. $(4\overrightarrow{u}).(-2\overrightarrow{v})$
4. $\overrightarrow{u}.(\sqrt{2}\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})$

Exercice 14. Déterminer t pour une orthogonalité (c)

Déterminer les éventuelles valeurs du réel t pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{V}$ sont orthogonaux.

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4t\\2\end{pmatrix}$
2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}t\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}t+6\\2t-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$
3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}t\\2t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\sqrt{5}t+1\\\sqrt{12}\end{pmatrix}$

Partie IV. Produit Scalaire et normes

Exercice 15. Avec les normes (c)

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$

2. $AB = 2$, $AC = \dfrac{7}{3}$ et $BC = 1$

3. ABC est isocèle en A, $AB = 5$ et $BC = 2,5$

Exercice 16. Avec les normes

On considère les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ tels que $\|\overrightarrow{u}\| = 6$, $\|\overrightarrow{v}\| = 5$ et $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2$.
Calculer les expressions suivantes.

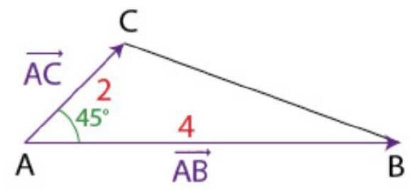
1. $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$ **2.** $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|$ **3.** $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ **4.** $(\overrightarrow{u} + 2\overrightarrow{v}).(3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$

Partie V. Bilan 1

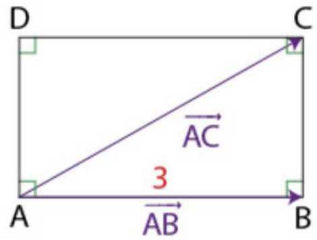
Exercice 17. Calcul d'un produit scalaire (c)

Dans chacun des quatre cas suivants, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

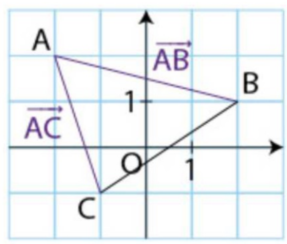
1. ABC est le triangle donné ci-contre.



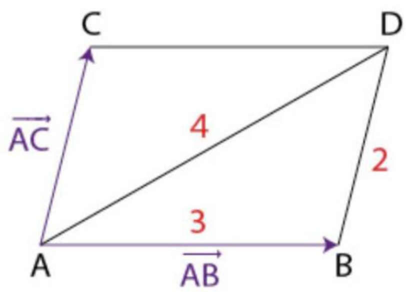
2. $ABCD$ est le rectangle donné ci-contre.



3. Les points A, B et C sont donnés dans le repère orthonormé ci-contre.



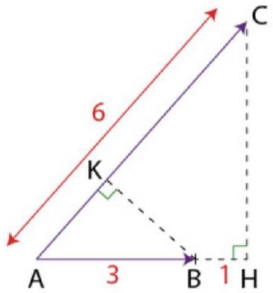
4. $ABDC$ est le parallélogramme donné ci-contre.



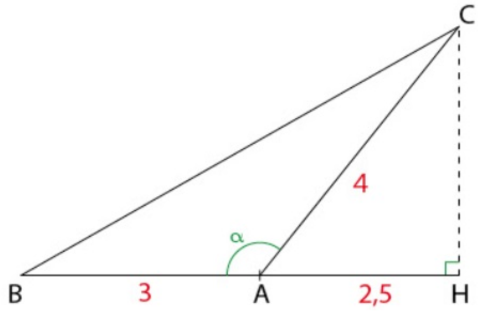
Partie VI. Calculer un angle ou une distance avec le produit scalaire

Exercice 18. Calcul de distance (c)

Avec les données de la figure donnée ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis en déduire la valeur de la distance AK.



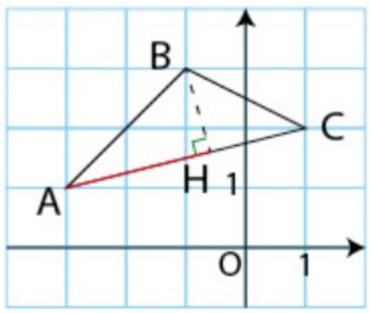
Exercice 19. Calcul d'angle (c)



ABC est le triangle ci-dessus avec $AB = 3$ et $AC = 4$.
H est le pied de la hauteur issue de C et $AH = 2,5$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire la mesure de l'angle α.

Exercice 20. Calcul de distance 2 (c)



dans un repère orthonormé on donne les points :

$$A(-3\,;\,1)\,;\;B(-1\,;\,3)\;\text{ et }\;C(1\,;\,2)$$

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
2. En déduire la distance AH.

Partie VII. Perpendicularité et produit scalaire

Exercice 21. Dans un parallélogramme (c)

$ABCD$ est un parallélogramme.

1. Montrer que $AB^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$.
2. En déduire la nature d'un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

Exercice 22. Dans un repère (c)

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(2;4)$ et $B(-2;2)$, ainsi que la droite d d'équation $y = x$.

Déterminer les coordonnées du point C appartenant à d tel que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 23. Dans un carré (DM)

$ABCD$ est un carré de côté 1. E et F sont les points tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$. *Faire une figure.*

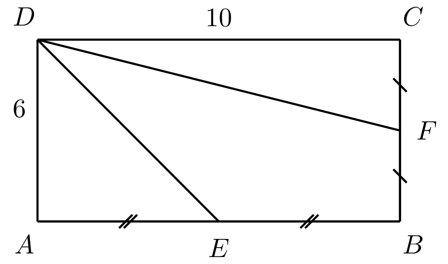
Les droites (DE) et (CF) sont-elles perpendiculaires ?

Partie VIII. Bilan 2 ** : now we can Talk !

Exercice 24. Dans un rectangle * (Chasles est votre ami) (DM)

On considère le rectangle ABCD de longueur 10 et de largeur 6. E est le milieu du côté [AB] et F est le milieu du côté [BC]. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB}$
2. $\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{DF}$
3. $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC}$
4. $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF}$
5. $\overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{DB}$



Exercice 25. Diagonales d'un losange ** (c)

En utilisant la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire, démontrer le résultat connu :

« les diagonales d'un losange sont perpendiculaires » .

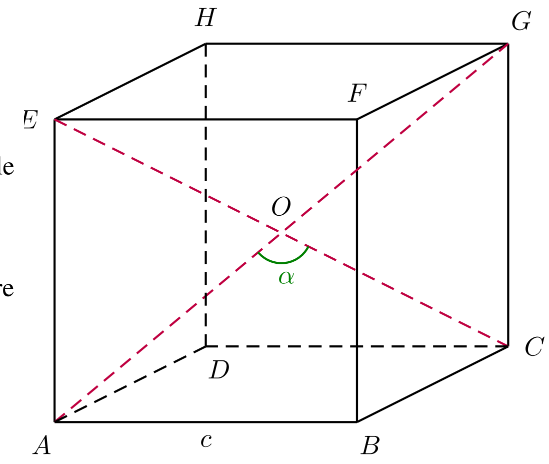
Exercice 26. Une démonstration * (c)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Montrer que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

Exercice 27. Dans l'espace * (c)

On considère le cube de l'espace ABCDEFGH de côté c.
On note O le centre du cube. Le but de l'exercice est de montrer que l'angle α est indépendant de la longueur c des arêtes du cube.

1. Calculer les longueurs AC et AG.
2. À partir de deux expressions différentes du produit scalaire $\overrightarrow{OA} . \overrightarrow{OC}$, déterminer le cosinus de l'angle α.



Exercice 28. Une démonstration

Démontrer une propriété du cours

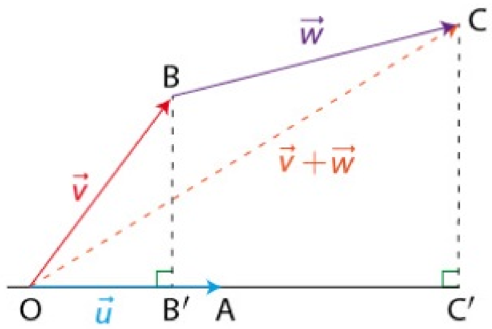
Prérequis : On suppose connue la définition du produit scalaire à l'aide d'un projeté orthogonal.

On se propose de démontrer que pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$$

1. Justifier que l'égalité est vraie si au moins l'un des trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ ou $\vec{w}$ est nul.

2. On suppose que les trois vecteurs sont non nuls et on note $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{BC}$, ainsi que B′ et C′ les projetés orthogonaux respectifs de B et C sur la droite (OA).



a) Justifier que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$.

b) En déduire que $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = OA \times OC'$.

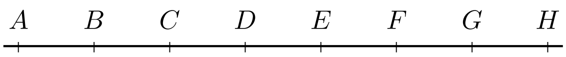
c) Justifier que $\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w} = OA \times OB' + OA \times B'C'$.

d) Conclure.

La démonstration est analogue pour B′, A et C′ alignés dans des ordres différents.

Partie IX. Correction

Correction de l'exercice 7 : Avec des points alignés



Les points A, B, C, D, E, F, G et H sont placés sur une droite graduée de façon à ce que $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = 1$.
Déterminer les produits scalaires suivants :

a. $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG} = 3 \times 6 = 18$

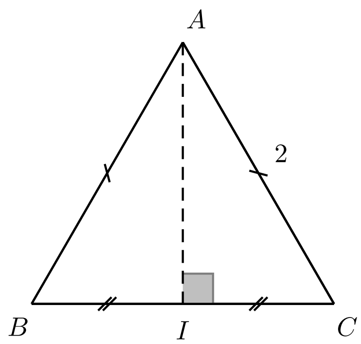
b. $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DF} = -1 \times 2 = -2$

c. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DE} = 1 \times 1 = 1$

d. $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{HD} = 1 \times (-4) = -4$

Correction de l'exercice 8 : Dans un triangle équilatéral

Le triangle ABC est un triangle équilatéral dont le côté mesure 2 cm. I est le pied de la hauteur issue de A. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.



1. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ **2.** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$ **3.** $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$

1. I est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BI} = 2 \times 1 = 2$

2. I est le projeté orthogonal de A sur (BC) donc $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BI} = BI^2 = 1^2 = 1$

3. I est le projeté orthogonal de C sur (AI) donc $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AI} = AI^2$.
Le triangle AIC est rectangle en I. D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AI^2 + IC^2$ donc $AI^2 = AC^2 - IC^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$.
Donc $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC} = 3$

Correction de l'exercice 10 : Avec le projeté orthogonal 1

H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

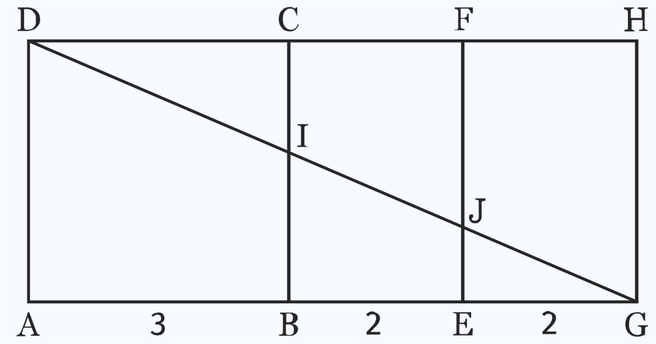
1. $AB = 4$, $AH = 3$ et $H \in [AB]$ — $H \in [AB]$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 4 \times 3 = 12$

2. $AB = 1$, $AH = 5$ et $H \notin [AB]$ — $H \notin [AB]$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -1 \times 5 = -5$

3. $AB = 6$, $AH = \dfrac{19}{3}$ et $H \notin [AB]$ — $H \notin [AB]$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -6 \times \dfrac{19}{3} = -38$

Correction de l'exercice 11 : PS et projeté : Dans un rectangle (c)

Dans une unité de longueur donnée, on considère un carré ABCD dont le côté mesure 3, accolé à deux rectangles identiques BEFC et EGHF de largeur 2.



En utilisant la formule du projeté orthogonal, calculer les produits scalaires suivants.

1. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

On projette le vecteur $\overrightarrow{AC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{AB}$:
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 3 = 9$.

2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF}$

On projette le vecteur $\overrightarrow{BF}$ sur le vecteur $\overrightarrow{BE}$:
$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} = -3 \times 2 = -6$.

3. $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AG}$

On projette le vecteur $\overrightarrow{EI}$ sur le vecteur $\overrightarrow{EB}$:
$\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AG} = -2 \times 7 = -14$.

4. $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{GD}$

On projette le vecteur $\overrightarrow{GD}$ sur le vecteur $\overrightarrow{HD}$: $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{HD} = -2 \times 7 = -14$.

5. $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{HG}$

Les droites (BC) et (GH) sont parallèles donc on projette le vecteur $\overrightarrow{IC}$ sur le vecteur $\overrightarrow{HG}$.
Pour calculer la longueur IC, on utilise le théorème de Thalès dans le triangle GHD : $\dfrac{IC}{GH} = \dfrac{DC}{DH}$, donc $IC = \dfrac{DC \times GH}{DH} = \dfrac{3 \times 3}{7} = \dfrac{9}{7}$.
Alors $\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{HG} = -\dfrac{9}{7} \times 3 = -\dfrac{27}{7}$.

6. $\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA}$

Pour calculer la longueur EJ, on utilise le théorème de Thalès dans le triangle AGD : $\dfrac{EJ}{AD} = \dfrac{GE}{GA}$, donc $EJ = \dfrac{GE \times AD}{GA} = \dfrac{2 \times 3}{7} = \dfrac{6}{7}$.
On projette le vecteur $\overrightarrow{FA}$ sur le vecteur $\overrightarrow{FE}$:
$\overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{EJ} \cdot \overrightarrow{FE} = -\dfrac{6}{7} \times 3 = -\dfrac{18}{7}$.

Correction de l'exercice 12 : Avec les coordonnées

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ — $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 0 \times 5 + (-2) \times (-1) = 2$
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$ — $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 3 \times 4 + 1 \times (-3) = 12 - 3 = 9$
3. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ — $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 7 \times 5 + (-4) \times 6 = 35 - 24 = 11$

Correction de l'exercice 14 : Déterminer t

Déterminer les éventuelles valeurs du réel t pour lesquelles les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{V}$ sont orthogonaux.

1. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-2\\t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}4t\\2\end{pmatrix}$

2. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}t\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}t+6\\2t-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$

3. $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}t\\2t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}\sqrt{5}t+1\\\sqrt{12}\end{pmatrix}$

Le repère est orthonormé.

1.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0\\&\iff -2\times 4t+t\times 2=0\\&\iff -8t+2t=0\\&\iff -6t=0\\&\iff t=0\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0\\&\iff t\times(t+6)-2\times(2t-\frac{1}{2})=0\\&\iff t^2+6t-4t+1=0\\&\iff t^2+2t+1=0\\&\iff (t+1)^2=0\\&\iff t=-1\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=0\\&\iff \sqrt{3}\times(\sqrt{5}t+1)+2t\sqrt{12}=0\\&\iff \sqrt{15}t^2+\sqrt{3}t+2t\sqrt{12}=0\\&\iff t(\sqrt{15}t+\sqrt{3}+2\sqrt{12})=0\\&\iff t=0 \text{ ou } t=\frac{-\sqrt{3}-2\sqrt{12}}{\sqrt{15}}\\&\iff t=0 \text{ ou } t=\frac{-\sqrt{3}-2\times 2\sqrt{3}}{\sqrt{15}}\\&\iff t=0 \text{ ou } t=\frac{-5\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{5}}\\&\iff t=0 \text{ ou } t=\frac{-5}{\sqrt{5}}\\&\iff t=0 \text{ ou } t=-\sqrt{5}\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 15 : Avec les normes

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ dans chacun des cas suivants :

1. $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 6$

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(3^2 + 4^2 - 6^2) \\ &= \frac{1}{2}(9 + 16 - 36) \\ &= \frac{1}{2}(-11)\end{aligned}$$

2. $AB = 2$, $AC = \dfrac{7}{3}$ et $BC = 1$

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(2^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 1^2) \\ &= \frac{1}{2}(4 + \frac{49}{9} - 1) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{36 + 49 - 9}{9}\right) \\ &= \frac{38}{9}\end{aligned}$$

3. ABC est isocèle en A, $AB = 5$ et $BC = 2,5$

ABC est isocèle en A donc $AB = AC$

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$ donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(5^2 + 5^2 - 2,5^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(25 + 25 - \frac{25}{4}\right) \\ &= \frac{175}{8}\end{aligned}$$

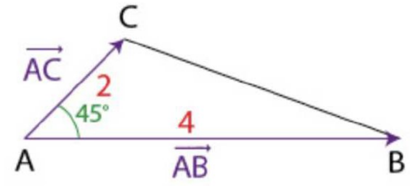
Correction Bilan1

Correction de l'exercice 17 : Calcul d'un produit scalaire

Dans chacun des quatre cas suivants, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

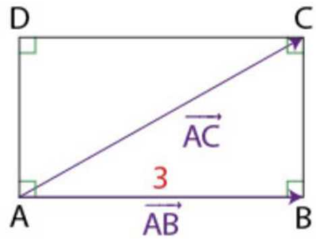
1. ABC est le triangle donné ci-contre.

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 4 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$



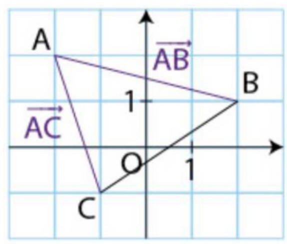
2. $ABCD$ est le rectangle donné ci-contre.

B est le projeté orthogonal de C sur (AB) et $B \in [AB]$ donc :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AB = 3 \times 3 = 9$



3. Les points A, B et C sont donnés dans le repère orthonormé ci-contre.

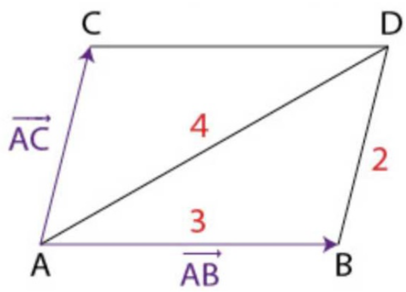
Le repère est orthonormé.
$\overrightarrow{AB}\ (4\ ;\ -1)$ et $\overrightarrow{AC}\ (1\ ;\ -3)$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = xx' + yy' = 4 \times 1 + (-1) \times (-3) = 7$



4. $ABDC$ est le parallélogramme donné ci-contre.

1ère méthode :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$.
Or $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AD}^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(3^2 + 4^2 - \|\overrightarrow{DB}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(25 - 2^2\right) = \frac{21}{2}$.
Et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = -AD \times DC = -3 \times 3 = 9$
Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{21}{2} - 9 = \frac{21}{2} - \frac{18}{2} = \frac{3}{2}$

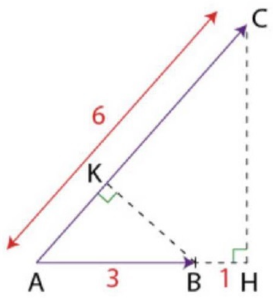
2e méthode :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AD}\|^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AC}^2\right) = \frac{1}{2}\left(4^2 - 3^2 - 2^2\right) = \frac{1}{2}(16 - 9 - 4) = \frac{3}{2}$



Correction Distances et Angles

Correction de l'exercice 18 : Calcul de distance

Avec les données de la figure donnée ci-contre, calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ puis en déduire la valeur de la distance AK.



H est le projeté orthogonal de C sur (AB) et $H \in [AB)$ donc :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = 3 \times 4 = 12$
K est le projeté orthogonal de B sur (AC) et $K \in [AC)$ donc :
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AK \times AC = AK \times 6 = 12$
Donc $AK = 2$

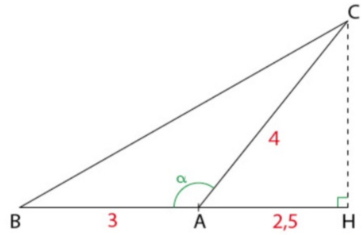
Correction de l'exercice 19 : Calcul d'angle (c)

ABC est le triangle ci-contre avec $AB = 3$ et $AC = 4$.
H est le pied de la hauteur issue de C et $AH = 2{,}5$.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

b) En déduire la mesure α, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.

Arrondir à l'unité.



Solution

a) H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB).
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires et de sens contraires,
donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -3 \times 2{,}5 = -7{,}5$.

b) De plus, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\alpha)$,
c'est-à-dire $-7{,}5 = 3 \times 4 \times \cos(\alpha)$.
Ainsi, $\cos(\alpha) = \dfrac{-7{,}5}{12} = -\dfrac{5}{8}$ et avec la calculatrice, $\alpha \approx 129°$.

On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes :
- au **a)**, avec un projeté orthogonal,
- au **b)**, avec un cosinus.

Correction de l'exercice 20 :Calcul de distance 2 (c)

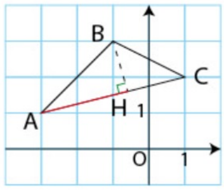
Dans un repère orthonormé, on donne les points :

$A(-3\,;1)$, $B(-1\,;3)$ et $C(1\,;2)$.

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$.

b) En déduire la distance AH, où H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AC).

Arrondir au dixième.



a) $\overrightarrow{AB}(2\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(4\,;1)$ donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times 4 + 2\times 1 = 10$.

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AH\times AC$.

Ainsi $AH\times AC = 10$, c'est-à-dire $AH = \dfrac{10}{AC} = \dfrac{10}{\sqrt{4^2+1^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{17}}$.

Donc $AH \approx 2{,}4$.

On calcule le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ de deux façons différentes :
– au **a)**, avec l'expression analytique,
– au **b)**, avec un projeté orthogonal.

Correction perpendicularité et produit scalaire

Correction de l'exercice 21 : Dans un parallélogramme

$ABCD$ est un parallélogramme.

1. **Montrer que** $AB^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$.

   $AB^2 - AD^2 = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right).\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right)$
   Or $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$.
   De plus ABCD est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.
   Donc $AB^2 - AD^2 = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$

2. **En déduire la nature d'un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.**

   ABCD est un parallélogramme dont les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$.
   Donc $AB^2 - AD^2 = 0$ soit $AB^2 = AD^2$ soit $AB = AD$ puisque ce sont des longueurs.
   Or ABCD est un parallélogramme, donc $AB = DC$ et $AD = BC$.
   Donc $AB = AD = DC = BC$.
   Donc ABCD est un losange.

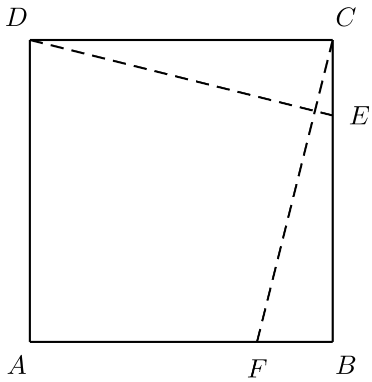
Correction de l'exercice 22 : Dans un repère

Dans un repère orthonormé du plan, on donne les points $A(2;4)$ et $B(-2;2)$, ainsi que la droite *d* d'équation $y = x$.

Déterminer les coordonnées du point C appartenant à *d* tel que les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.
$(AB) \perp (AC)$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.
$\overrightarrow{C}\begin{pmatrix} x_C \\ x_C \end{pmatrix}$ car C appartient à la droite d'équation $y = x$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2-2 \\ 2-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - 2 \\ x_C - 4 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -4(x_C - 2) - 2(x_C - 4) = 0$.
$-4x_C + 8 - 2x_C + 8 = 0$.
$-6x_C = -16$.
$x_C = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$.
Donc $C\left(\frac{8}{3}\,;\,\frac{8}{3}\right)$

Correction de l'exercice 23 : Dans un carré (DM)

$ABCD$ est un carré de côté 1. E et F sont les points tels que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$.
Faire une figure.



Les droites (DE) et (CF) sont-elles perpendiculaires ?

- 1ère méthode :
  ABCD est un carré donc le repère $(A\ ;\ B\ ;\ D)$ est orthonormé.

$$A(0\ ;\ 0)\ ;\ B(1\ ;\ 0)\ ;\ C(1\ ;\ 1)\ ;\ D(0\ ;\ 1)\ ;\ E\left(1\ ;\ \frac{3}{4}\right)\ ;\ F\left(\frac{3}{4}\ ;\ 0\right)$$

  Donc

$$\overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}-1\\0-1\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{CF}\begin{pmatrix}-\frac{1}{4}\\-1\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1-0\\\frac{3}{4}-1\end{pmatrix}\ ;\ \overrightarrow{DE}\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{4}\end{pmatrix}$$

  Soit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CF}\,.\,\overrightarrow{DE} &= -\frac{1}{4}\times 1+(-1)\times\left(-\frac{1}{4}\right)\\ &= -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\\ &\boxed{\overrightarrow{CF}\,.\,\overrightarrow{DE}=0}\end{aligned}$$

  Donc $(CF)\perp(DE)$, les droites (DE) et (CF) sont perpendiculaires.

- 2ème méthode :
  On utilise la relation de Chasles et les propriétés du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}\,.\,\overrightarrow{CF} &= \left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}\right).\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BF}\right)\\ &= \underbrace{\overrightarrow{DC}\,.\,\overrightarrow{CB}}_{=0}+\overrightarrow{DC}\,.\,\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}\,.\,\overrightarrow{CB}+\underbrace{\overrightarrow{CE}\,.\,\overrightarrow{BF}}_{=0}\end{aligned}$$

  Or $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CB}=0$ car $(DC)\perp(CB)$ et $\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{BF}=0$ car $(CE)\perp(BF)$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{CF} &= \overrightarrow{DC}\,.\,\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}\,.\,\overrightarrow{CB}\\ &= \overrightarrow{DC}\,.\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{CB}\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}\,.\,\overrightarrow{BA}+\frac{1}{4}CB^2\end{aligned}$$

Or $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{BA}$ donc

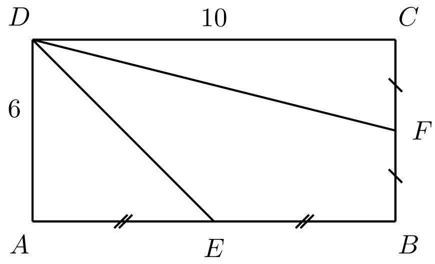
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DE}\,.\,\overrightarrow{CF} &= -\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}CB^2 \\
&= -AB \times \frac{1}{4}AB + \frac{1}{4}CB^2 \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
\boxed{\overrightarrow{DE}\,.\,\overrightarrow{CF} = 0}
\end{aligned}$$

Donc $(DE) \perp (CF)$

Correction Bilan 2

Correction de l'exercice 24 : Dans un rectangle (Chasles est votre ami) (DM)

On considère le rectangle ABCD de longueur 10 et de largeur 6. E est le milieu du côté [AB] et F est le milieu du côté [BC]. Déterminer les valeurs exactes des produits scalaires suivants.



1. $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}$

2. $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DF}$

3. $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$

4. $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF}$

5. $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DB}$

1.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DA}.\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)\\ &= \overrightarrow{DA}^2+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AB}\\ &= 6^2+0 \text{ car } \overrightarrow{DA} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont orthogonaux.}\\ &= 36\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DF} &= \overrightarrow{DC}.\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}\right)\\ &= \overrightarrow{DC}^2+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CF}\\ &= 10^2+0 \text{ car } \overrightarrow{DC} \text{ et } \overrightarrow{DF} \text{ sont orthogonaux.}\\ &= 100\end{aligned}$$

3.

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC} = 0 \text{ car } \overrightarrow{DA} \text{ et } \overrightarrow{DC} \text{ sont orthogonaux.}$$

4.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF} &= \left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}\right).\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}\right)\\ &= \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{CF}\\ &= 0+DA\times CF+AE\times DC+0\\ &= 6\times 3+5\times 10\\ &= 68\end{aligned}$$

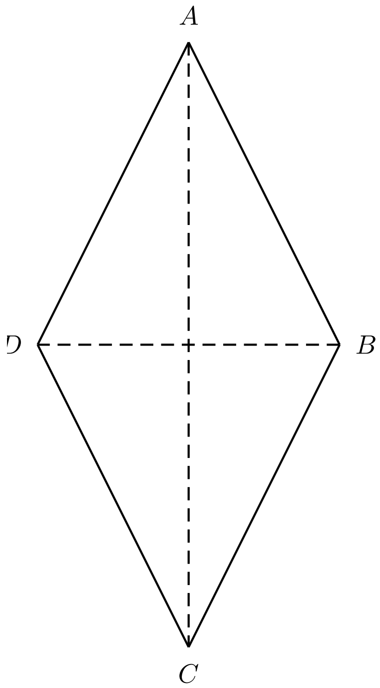
5.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{DB} &= \left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}\right).\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)\\ &= \overrightarrow{DC}^2+\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CB}\\ &= 10^2+0+0+3\times 6\\ &= 118\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 25 : Diagonales d'un losange (c)

En utilisant la relation de Chasles et la distributivité du produit scalaire, démontrer le résultat connu :

« les diagonales d'un losange sont perpendiculaires » .



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} &= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)\\
&= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CD}\\
&= \overrightarrow{BC}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}^2
\end{aligned}$$

Or ABCD est un losange donc un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{0}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{0}+\overrightarrow{AB}.\left(-\overrightarrow{AB}\right)+\overrightarrow{BC}^2\\
&= -\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}^2 \text{ car ABCD est un losange donc } AB = CD\\
&= 0
\end{aligned}$$

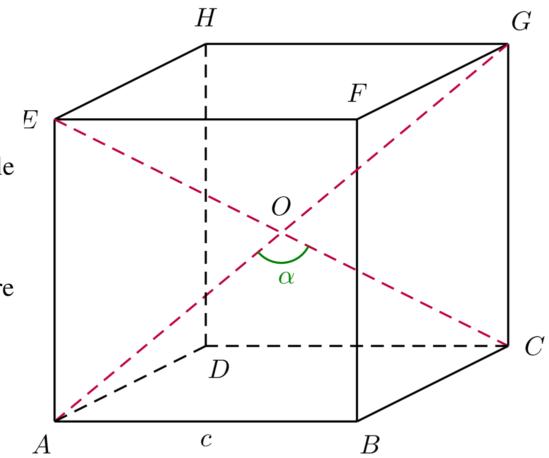
On a prouvé que si ABCD est un losange, alors $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{0}$, donc les diagonales sont perpendiculaires.

Correction de l'exercice 26 : Une démonstration * (c)

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non nuls du plan.
Montrer que $\|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\|$ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ sont orthogonaux.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \text{ et } \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \text{ sont orthogonaux} &\iff (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2 = 0 \\
&\iff \|\overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 \\
&\iff \|\overrightarrow{u}\| = \|\overrightarrow{v}\| \text{ car } \|\overrightarrow{u}\| > 0 \text{ et } \|\overrightarrow{v}\| > 0
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 27 : Dans l'espace * (c)



On considère le cube de l'espace ABCDEFGH de côté c.
On note O le centre du cube. Le but de l'exercice est de montrer que l'angle α est indépendant de la longueur c des arêtes du cube.

1. Calculer les longueurs AC et AG.
2. À partir de deux expressions différentes du produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}$, déterminer le cosinus de l'angle α.

1. Le triangle ABC est rectangle en B.
   D'après le théorème de Pythagore, $AC^2 = AB^2 + BC^2 = c^2 + c^2 = 2c^2$.
   $AC = \sqrt{2c^2} = c\sqrt{2}$ car $c > 0$.
   De même, dans le triangle ACG rectangle en C : $AG^2 = 2c^2 + c^2 = 3c^2$ donc $AG = c\sqrt{3}$.
2. $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = OA \times OC \times \cos\alpha$
   Or $OA = OC = \dfrac{AG}{2} = c\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \left(c\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \times \cos(\alpha) = \dfrac{3c^2}{4}\cos(\alpha)$.
   De plus $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \dfrac{1}{2}\left(OA^2 + OC^2 - \|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}\|^2\right)$.
   Or $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CA}$. Donc :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} &= \frac{1}{2}\left(\frac{3c^2}{4} + \frac{3c^2}{4} - 2c^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-2c^2}{4}\right) \\
&= \frac{-c^2}{4}
\end{aligned}$$

   Donc $\dfrac{3c^2}{4}\cos(\alpha) = \dfrac{-c^2}{4}$. Donc $\cos(\alpha) = \dfrac{-1}{3}$