Math93.com

TD 1 - Première Spécialité Maths
Second Degré

Les exercices dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.

Table des matières

Partie I. Fonction polynôme du second degré : forme canonique (*vertex form*)

Exercice 1. Forme canonique et étude de la fonction

Pour chacune des fonctions polynômes du second degré suivantes, déterminer la forme canonique, les coordonnées du sommet S, le tableau de variations et l'allure de la courbe.

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto f(x) = (x-2)^2 - 2x^2 + 2$$

1. a. Exprimer $f(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$:

$f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$
$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

1. b. Calculer

$$\left\{\begin{array}{ll} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} \Delta = & \cdots \\ \alpha = & \cdots \\ \beta = & \cdots \end{array}\right.$$

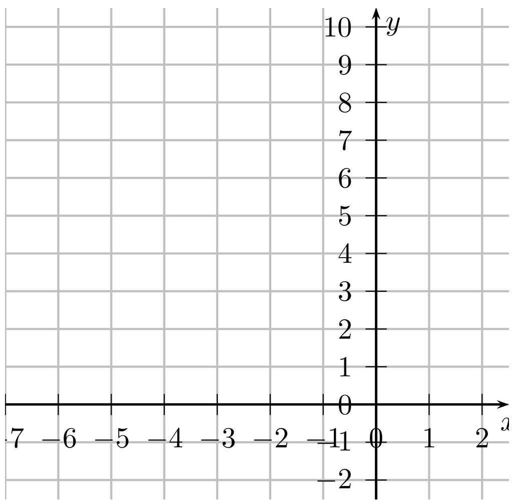
1. c. Donner la forme canonique : $f(x) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

1. d. Donner le coordonnées du sommet S de la parabole : $\boxed{S\left(\cdots\ ;\ \cdots\right)}$.

1. e. Dresser le tableau de variation de la fonction f :

x	$-\infty$ $\qquad\cdots\qquad$ $+\infty$
Variations de f	

1. f. Construire $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f.



1. g. Déterminer par lecture graphique les coordonnées des points d'intersection, si il existent, de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

$$\boxed{A\left(\cdots\ ;\ \cdots\right) \quad ; \quad B\left(\cdots\ ;\ \cdots\right)}$$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g : x \longmapsto g(x) = (-x-2)^2 + (2x+1)^2 - 5$$

2. a. Exprimer $g(x)$ sous la forme $ax^2 + bx + c$:

$g(x) =$ ....
....
....
....
....

2. b. Calculer

$$\begin{cases} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta = & \cdots \\ \alpha = & \cdots \\ \beta = & \cdots \end{cases}$$

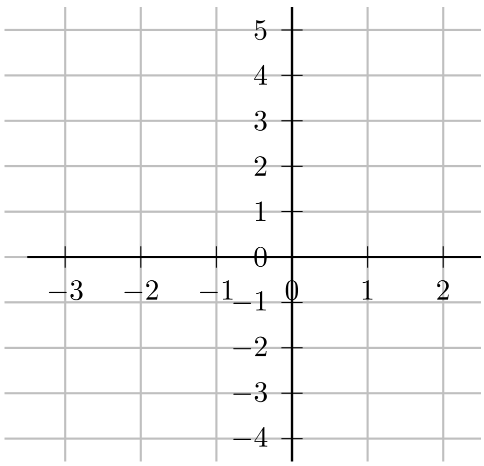
2. c. Donner la forme canonique : $g(x) =$ ....

2. d. Donner le coordonnées du sommet S de la parabole : $\boxed{S\,(\cdots\;;\;\cdots)}$.

2. e. Dresser le tableau de variation de la fonction g :

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
Variations de g	

2. f. Construire $\mathscr{C}_g$, la courbe représentative de la fonction g.



2. g. Déterminer par lecture graphique les coordonnées des points d'intersection, si il existent, de $\mathscr{C}_g$ avec l'axe des abscisses.

$$\boxed{C\,(\cdots\;;\;\cdots)\quad;\quad D\,(\cdots\;;\;\cdots)}$$

Partie II. Équations du second degré

Exercice 2. Équations

Retrouver les résultats des questions **1.g** et **2.g** de l'exercice 1 par le calcul.

Réponses

$A\left(-2+\sqrt{10}\,;\,0\right)$; $B\left(-2-\sqrt{10}\,;\,0\right)$; $C\left(-\frac{8}{5}\,;\,0\right)$; $D\,(0\,;\,0)$

Exercice 3. Équations du second degré : Niveau troisième !

Résoudre les équations suivantes de **deux façons**, en utilisant le discriminant, et en factorisant le polynôme du second degré.
Vérifiez vos résultats en utilisant le **menu « Équation »** de votre calculatrice.

1. $(E_1)\ :\ x^2+2x=0\,;$
2. $(E_2)\ :\ x^2=-5x\,;$
3. $(E_3)\ :\ x^2-5=0\,;$
4. $(E_4)\ :\ x^2-3x+\frac{9}{4}=0\,;$
5. $(E_5)\ :\ x^2-2x+1=0\,;$
6. $(E_6)\ :\ 4x^2+20x+25=0\,;$

Réponses

$\mathscr{S}_1=\{0\,;\,-2\}$; $\mathscr{S}_2=\{0\,;\,-5\}$; $\mathscr{S}_3=\{-\sqrt{5}\,;\,\sqrt{5}\}$; $\mathscr{S}_4=\left\{\frac{3}{2}\right\}$; $\mathscr{S}_5=\{1\}$; $\mathscr{S}_6=\left\{-\frac{5}{2}\right\}$

Exercice 4. Équations du second degré ... and others ! (c)

Résoudre les équations suivantes et vérifier vos résultats en utilisant le **menu « Équation »** de votre calculatrice

1. $(E_1)\ :\ x^2+5=0$
2. $(E_2)\ :\ x^3+x^2=x$
3. $(E_3)\ :\ 2x^2=3x+1$
4. $(E_4)\ :\ x^2+2x+1=1-3x$
5. $(E_5)\ :\ (x+1)(5x^2+2x-1)=0$
6. $(E_6)\ :\ (x^2+2x+1)(x^2-2x+1)=0$
7. $(E_7)\ :\ (x^2+6x+9)(x^2+x+1)=0$
8. $(E_8)\ :\ (x+1)^2-2(x-2)^2=0$
9. $(E_9)\ :\ 2x^2-\frac{5}{3}x=-\frac{1}{3}$
10. $(E_{10})\ :\ \dfrac{x^2-5x+4}{x+1}=0$
11. $(E_{11})\ :\ \dfrac{x^2-2x-3}{(x+1)^2}=0$
12. $(E_{12})\ :\ \dfrac{x^2+x-3}{2x+5}=\dfrac{2(x-4)}{5}$
13. $(E_{13})\ :\ x^3-5x^2=-4x$

Réponses

$\mathscr{S}_1=\varnothing$; $\mathscr{S}_2=\left\{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,;\,0\,;\,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$; $\mathscr{S}_3=\left\{\frac{3+\sqrt{17}}{4}\,;\,\frac{3-\sqrt{17}}{4}\right\}$; $\mathscr{S}_4=\{-5\,;\,0\}$

$\mathscr{S}_5=\left\{-1\,;\,\frac{-1-\sqrt{6}}{5}\,;\,\frac{-1+\sqrt{6}}{5}\right\}$; $\mathscr{S}_6=\{-1\,;\,1\}$; $\mathscr{S}_7=\{-3\}$; $\mathscr{S}_8=\{5+3\sqrt{2}\,;\,5-3\sqrt{2}\}$

; $\mathscr{S}_9=\left\{\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{3}\right\}$; $\mathscr{S}_{10}=\{1\,;\,4\}$; $\mathscr{S}_{11}=\{3\}$; $\mathscr{S}_{12}=\left\{\frac{9-\sqrt{205}}{2}\,;\,\frac{9+\sqrt{205}}{2}\right\}$; $\mathscr{S}_{13}=\{0\,;\,1\,;\,4\}$

Exercice 5. Équations bicarrées

En posant $X = x^2$, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. (E_1) : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;
2. (E_2) : $-2x^4 + 22x^2 - 36 = 0$;
3. (E_3) : $x^4 + x^2 - 2 = 0$;
4. (E_4) : $5x^4 - 2x^2 + 1 = 0$;
5. (E_5) : $3x^4 + 24x^2 + 45 = 0$;
6. (E_6) : $-2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$;

Aide

Ne pas oublier que l'équation $x^2 = b$, avec $b > 0$ a deux solutions réelles, $\sqrt{b}$ et $-\sqrt{b}$

Réponses

$\mathscr{S}_1 = \{-2\,;\,-1\,;\,1\,;\,2\}$; $\mathscr{S}_2 = \left\{-3\,;\,-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,;\,3\right\}$; $\mathscr{S}_3 = \{-1\,;\,1\}$; $\mathscr{S}_4 = \varnothing$; $\mathscr{S}_5 = \varnothing$; $\mathscr{S}_6 = \left\{\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}}\,;\,-\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}}\right\}$

Exercice 6. Dégré 4

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = 4x^4 + 4x^3 - 17x^2 - 9x + 18$.

1. Vérifier que pour tout réel x on a : $P(x) = \left(x^2 + x - 2\right)\left(4x^2 - 9\right)$.
2. En déduire les racines de la fonction polynôme $P(x)$ et la factorisation complète de $P(x)$ (en produit de binômes du premier degré).
3. Résoudre l'inéquation $P(x) \geqslant 0$.

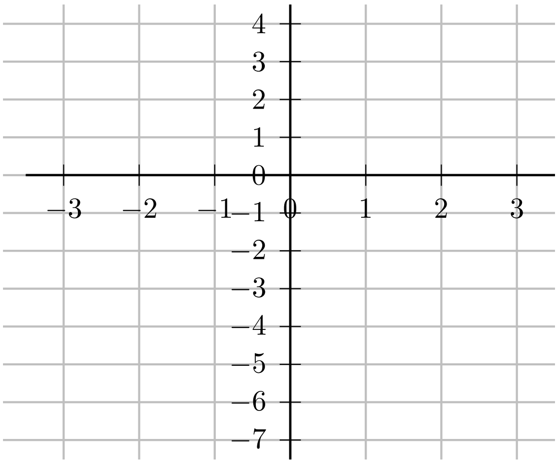
Réponses

2. $P(x) = (x-1)(x+2)\left(x - \dfrac{3}{2}\right)\left(x + \dfrac{3}{2}\right)$ / **3.** $S = \left]-\infty\,;\,-2\right] \cup \left[-\dfrac{3}{2}\,;\,1\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Exercice 7. Coordonnées des points d'intersection de deux courbes

1. Sur le graphique suivant, construire la courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto f(x) = (x-2)(-x-2)$ puis celle de la fonction affine $g : x \longmapsto g(x) = x - 1$. Donner par lecture graphique, les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

$$\boxed{A\,(\cdots\ ;\ \cdots)\quad ;\quad B\,(\cdots\ ;\ \cdots)}$$

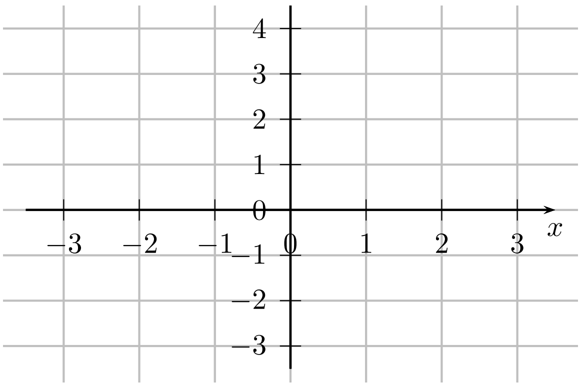


Retrouver ce résultat par le calcul en résolvant l'équation :

$$(x-2)(-x-2) = x - 1$$

2. Sur le graphique suivant, construire la courbe représentative de la fonction $h : x \longmapsto h(x) = -x^2 + x + 2$ et celle de la fonction $k : x \longmapsto k(x) = (x+1)^2$. Donner par lecture graphique, les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

$$\boxed{C\,(\cdots\ ;\ \cdots)\quad ;\quad D\,(\cdots\ ;\ \cdots)}$$



Retrouver ce résultat par le calcul en résolvant l'équation :

$$-x^2 + x + 2 = (x+1)^2$$

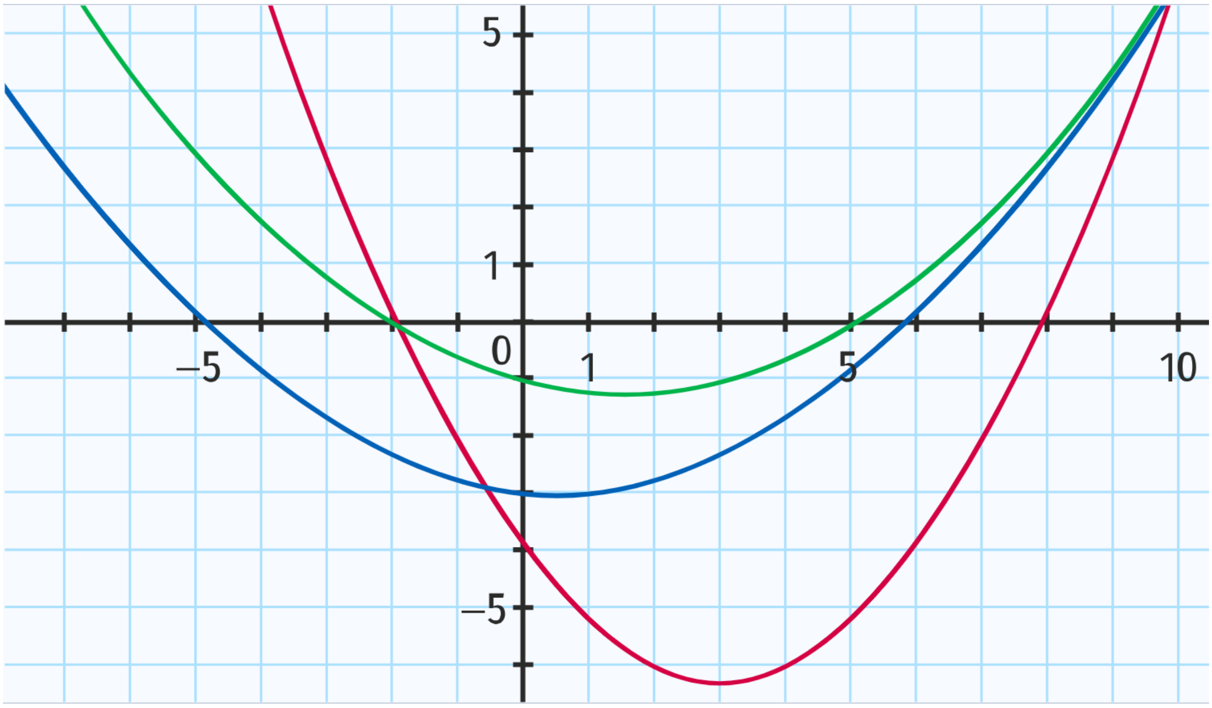
Réponses

$A\left(\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\ ;\ \dfrac{-3-\sqrt{21}}{2}\right)$; $B\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\ ;\ \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2}\right)$; $C\,(-1\ ;\ 0)$; $D\left(\dfrac{1}{2}\ ;\ \dfrac{9}{4}\right)$

Partie III. Factorisation, études de signe, inéquations

Exercice 8. (c) A partir du graphique : ex. 97 p 90 (c)

On donne ci-dessous les courbes représentatives de trois fonctions trinômes du second degré f en vert, g en rouge et h en bleu.



1. En utilisant la forme factorisée de $f(x)$, déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

2. Déterminer, de même, les expressions de $g(x)$ et $h(x)$.

3. Les courbes représentatives des fonctions f, g et h ont-elles un point commun ? Si oui, déterminer ses coordonnées.

Exercice 9. (c) Un premier Bilan

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x)$$

Partie A : application du cours

1. Montrer en développant que : $f(x) = -2\,x^2 + 5\,x - 2$.

2. Donner la forme factorisée de f.

3. Donner la forme canonique de f

4. Donner le tableau de variations de f et précisez son maximum.

5. Donner le tableau de signe de $f(x)$.

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes

1. Montrer que $f\left(\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2} - 6$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

2. a. $(E_1) : f(x) = 0\,;$

2. b. $(E_2) : f(x) = \dfrac{9}{8}\,;$

2. c. $(E_3) : f(x) = (x-2)$.

2. d. $(E_4) : f(x) = -3x^2 + 4$.

3. Déterminer la position relative de la courbe de f et de celle de la fonction g définie par $g(x) = -3x^2 + 4$.
Précisez les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

4. Déterminer la position relative de la courbe de f et de l'axe des abscisses.

5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection courbe de f et de celle de la droite d'équation $y = 5x - 4$.

Exercice 10. Factorisation et étude de signe

1. Soit f_1, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x^2 + x + 1$.
Factoriser f_1 puis résoudre l'inéquation $f_1(x) > 0$.

2. f_2, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_2(x) = -x^2 + 4x + 1$.
Factoriser f_2 puis résoudre l'inéquation $f_2(x) > 0$.

3. f_3, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_3(x) = -x^2 + 6x - 9$.
Factoriser f_3 puis résoudre l'inéquation $f_3(x) > 0$.

Réponses

1. $f_1(x) = x^2 + x + 1$; $S_1 = \mathbb{R}$
2. $f_2(x) = -\left(x+\sqrt{5}-2\right)\left(x-\sqrt{5}-2\right)$; $S_2 = \left]2-\sqrt{5}\,;\,2+\sqrt{5}\right[$
3. $f_3(x) = -(x-3)^2$; $S_3 = \left]-\infty\,;\,3\right[\cup\left]3\,;\,+\infty\right[= \mathbb{R}\setminus\{3\}$

Exercice 11. Inéquations (c)

Résoudre les inéquations suivantes :

1. (I_1) : $\dfrac{-2x^2+4x-5}{-4x+3} \geqslant 0\,;$ | 2. (I_2) : $\dfrac{-x^2+2x-1}{(-4x+3)^2} \geqslant 0\,;$ | 3. (I_3) : $6x^2 < x+1\,;$

Réponses

$\mathscr{S}_1 = \left]\dfrac{3}{4}\,;\,+\infty\right[\,;\, \mathscr{S}_2 = \{1\}\,;\, \mathscr{S}_3 = \left]-\dfrac{1}{3}\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$

Partie IV. Position relative de deux courbes

Méthode

Pour étudier la position relative de deux courbes représentative de fonctions f et g il faut étudier le signe de $f(x)-g(x)$.

- Si $f(x)-g(x)>0$ sur un intervalle, alors $f(x)>g(x)$ sur cet intervalle, ce qui signifie que la courbe de f est au-dessus de celle de g.
- Si $f(x)-g(x)<0$ sur un intervalle, alors $f(x)<g(x)$ sur cet intervalle, ce qui signifie que la courbe de f est en dessous de celle de g.
- Si $f(x)-g(x)=0$ sur un intervalle, alors $f(x)=g(x)$ sur cet intervalle, ce qui signifie que les courbes se croisent.

Exercice 12. (c) Inéquation et interprétation graphique (c)

Reprendre les résultats de l'**exercice 7** pour résoudre graphiquement puis par le calcul les questions suivantes :

1. Résoudre l'inéquation

$$f(x) \geqslant g(x) \ \text{ avec } \begin{cases} f(x) = (x-2)(-x-2) \\ g(x) = x-1 \end{cases}$$

En déduire les positions relatives des deux courbes représentatives.

2. Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} h(x) = -x^2+x+2 \\ k(x) = (x+1)^2 \end{cases}$$

Réponses

$S_1 = \left[\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\,;\,\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right]$ *et* $h(x) \geqslant k(x) \iff x \in \left[-1\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$

Exercice 13. (c) Position relative de deux courbes (c)

Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y=x^2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$.

Étudier la position relative de ces deux courbes.

Partie V. Compléments et applications

Exercice 14. (c) Avec les sommes et produit de racines

1. Trouver deux nombres dont la somme vaut 5 et le produit -50.
2. Un rectangle a pour périmètre 36 cm et pour aire 32 cm^2. Déterminer les dimensions de ce rectangle.

Exercice 15. (c) Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1. $f(x) = \sqrt{-6 - x + x^2}$.
2. $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - x - 12}}$.
3. $h(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 12x + 10}$.
4. $i(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10} + \sqrt{x}$.

Exercice 16. (c) * SVT - Concentration dans le sang (sujet de bac) : ex 74 p 89

On étudie la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient. On modélise cette concentration par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par

$$g(t) = \frac{4t}{t^2 + 1}$$

$g(t)$ représente la concentration en mg$\cdot$L^{-1} de l'antibiotique lorsque t heures se sont écoulées. Répondre aux questions suivantes de façon algébrique puis vérifier à l'aide d'un graphique à la calculatrice.

1. Dans quel intervalle de temps la concentration sera-t-elle supérieure ou égale à 1,6 mg$\cdot$L^{-1} ?
2. La concentration peut-elle être strictement supérieure à 2 mg$\cdot$L^{-1} ?

Exercice 17. (c) Équation à paramètre (ex. 52 p 89)

Soit m un nombre réel différent de 0. On considère l'équation (E) suivante :

$$mx^2 + x + 1 = 0$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation (E) admet-elle une solution double ?

Exercice 18. (c) * Équation à paramètre niveau 2 (ex. 54 p 89)

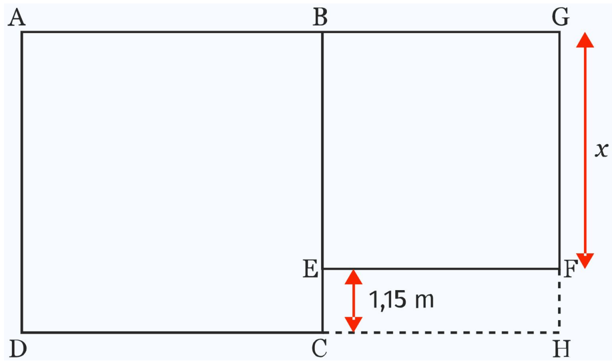
Soit m un nombre réel. On considère l'équation (E) suivante :

$$2x^2 + x + m - 1 = 0$$

1. Déterminer, en fonction de m, le discriminant de l'équation (E).
2. En déduire, en fonction de m, le nombre de solutions de l'équation (E).

Exercice 19. (c) Un problème de géométrie (ex. 55 p 90)

Un architecte travaille sur le plan d'une maison. Le plan de l'étage est schématisé par la figure ci-dessous.
ABCD et BGFE sont deux carrés.
Le rectangle EFHC, d'une largeur de 1,15 m, représente le balcon sur lequel donne la chambre principale.
On appelle x la longueur (en mètre) du côté du plus petit des deux carrés.
L'étage doit avoir une surface de plancher de 80 m^2.
Le balcon n'est pas pris en compte.
Déterminer la valeur de x.



Exercice 20. Un problème de pourcentage (ex. 60 p 90)

Un propriétaire paie pour son appartement une taxe foncière de 750€ en 2016.
En 2017, cette taxe foncière augmente de $t\%$.
L'année suivante, elle augmente de $(t+5)\%$. Le propriétaire paie à présent $834,30$€.
Calculer la valeur de t .

Exercice 21. (c) Cherchons un peu (ex. 86p90)

Soit b un nombre réel et soit f la fonction trinôme définie par

$$f(x) = -x^2 + bx - 5$$

On sait que f admet un extremum en 4.

1. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.
2. Déterminer la valeur de cet extremum.

Exercice 22. Problème de bénéfice

Une entreprise textile fabrique et vend en gros des chemises. Le coût de fabrication, en euros, de q chemise, est donnée par l'expression :

$$C(q) = 0,1q^2 + 4q + 1\,000$$

1. Pour quels nombres de chemises fabriquées le coût est-il inférieur à 2 000 €.
2. Chaque chemise est vendue 29 €.
   Exprimer en fonction de q le bénéfice $B(q)$ réalisé, en justifiant.
3. On admet par la suite que $B(q) = -0,1q^2 + 25q - 1\,000$.
   Pour quels nombres de chemises vendues le bénéfice est-il positif ou nul ?
4. Représenter graphiquement la fonction $B \ : \ q \longmapsto B(q)$.
5. Pour quel nombre de chemises réalise-t-on le bénéfice maximal et quel est alors ce bénéfice ?

Réponses

1. *Pour une production strictement inférieure à 82 chemise* **/ *3.*** *Pour une production comprise entre 50 et 200 chemises* **/ *5.*** *Le bénéfice est maximale en fabriquant 125 chemises, il est alors de 562,50 euros*

Exercice 23. Coût et chiffre d'affaire : DM

Une unité de production est sous-traitante pour une grande marque de jouets. Elle fabrique des poupées et vend toute sa production. Le coût total de fabrication de q milliers de poupées, exprimé en milliers d'euros (k€), est données par :

$$C(q) = 0,05q^2 + q + 80 \text{ pour } q \in [0\ ;\ 100]$$

1. Étude de C.

1. a. Étudier le sens de variation du coût total.

1. b. Résoudre l'équation $C(q) = 480$. En donner une interprétation concrète.

2. Le chiffre d'affaire R obtenu par la vente des q milliers de poupées produites est tel que :

$$R(50) = 300 \text{ et } R(60) = 360$$

C'est-à-dire que 60 milliers de poupées apportent 360 k€ de recette. sachant que le chiffre d'affaires est une fonction affine de la quantité, déterminer cette fonction affine R.

3. On considère la fonction B définie sur $[0\ ;\ 100]$ par :

$$B(q) = -0,05q^2 + 5q - 80$$

3. a. Établir que la fonction B est la fonction de bénéfice de cette usine pour la production (et vente) de q milliers de poupées, exprimée en k€.

3. b. Déterminer le sens de variations de B. en déduire le nombre de poupées à produire pour que le bénéfice soit maximal. Donner la valeur de ce bénéfice maximal.

3. c. Déterminer la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice (c'est-à-dire telle que $B(q)$ soit supérieur à zéro).

Partie VI. Compléments : Now we can talk !

Exercice 24. Équation à paramètre *

Soit m un nombre réel. On considère la famille de fonctions définies pour x réel par :

$$f_m(x) = x^2 - (m+3)x + m + 6$$

1. Étude du cas particulier : $m = 0$.
Dresser, en justifiant précisément, le tableau des variations de la fonction f_0.

2. Étude du cas général.

2. a. Montrer que le discriminant de l'équation $f_m(x) = 0$ est $\Delta_m = m^2 + 2m - 15$.

2. b. Donner, sans justifier, le tableau de signe de Δ_m selon les valeurs de m.

2. c. Pour quelles valeurs de m l'équation $f_m(x) = 0$ admet-elle deux solutions distinctes ? Justifier la réponse.

2. d. La parabole d'équation $y = x^2$ et la courbe représentative de la fonction f_m possèdent elles toujours un point d'intersection, quelle que soit la valeur de m ?.

Exercice 25. Réfléchissons : Olympiades de Maths *

Pour quelles valeurs de b les équations $2005x^2 + bx + 5002 = 0$ et $5002x^2 + bx + 2005 = 0$ ont-elles une solution commune réelle ?

Exercice 26. Réfléchissons : Olympiades de Maths **

Soit α et β des réels non nuls.
Pour quelles valeurs de b les équations $\alpha x^2 + bx + \beta = 0$ et $\beta x^2 + bx + \alpha = 0$ ont-elles une solution commune réelle ?

Partie VII. Python, c'est ma passion : débuter avec les listes

Exercice 27. (c) Nombre de racines

Écrire deux fonctions en python :

1. la première $delta(a, b, c)$ qui prend en argument 3 flottants a, b et c, avec a non nul et qui renvoie le discriminant de l'expression polynomiale $ax^2 + bx + c$ avec a non nul.

   On traitera à part le cas où a est nul en utilisant un assert par exemple comme ci-dessous :

```python
# Dans l'éditeur PYTHON
def delta(a,b,c):
    '''
    In  :  a,b,c float coefficients de  ax^2+bx+c
    Out : discriminant de ax^2+bx+c avec a non nul
    '''
    assert a !=0 # permet de s'assurer que a est non nul
    return ...

# autre notation à la place du docstring

def delta2(a : float, b : float, c: float ) -> float:
    assert a !=0 # permet de s'assurer que a est non nul
    return ...
```

```python
# Dans la console PYTHON
> delta(1,2,1)
1
```

2. la deuxième $nbsolutions(a, b, c)$ qui prend en argument 3 flottants a, b et c et qui renvoie le nombre de racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$. On traitera à part le cas où a est nul en utilisant un assert par exemple comme ci-dessous :

```python
# Dans l'éditeur PYTHON
def nbsolutions(a,b,c):
    '''
    In  :  a,b,c float
    Out : nombre de racines de ax^2+bx+c=0 avec a non nul
    '''
    assert a !=0 # permet de s'assurer que a est non nul
    D = delta(a,b,c) # on utilise la fonction précédente
    ...
```

3. Pour effectuer vos tests, voici une astuce utile : dans la console, affecter des valeurs à vos variables, puis appeler votre fonction via un *print* comme ci dessous :

```
# Dans l'éditeur PYTHON
a,b,c = 1,2,1
print(delta(a,b,c))

a,b,c = 1,5,6
print(nbsolutions(a,b,c))
```

On peut même rendre la présentation plus belle ainsi :

```
# Dans l'éditeur PYTHON
a,b,c = 1,2,1
print("nbsolution(",a,b,c,") =", nbsolutions(a,b,c))
```

4. Tester vos fonctions avec les équations du second degré suivantes pour lesquels vous calculerez le discriminant à la main (ou avec la calculatrice) avant.

Un problème doit apparaitre pour la dernière, expliquez !

4. a. (E_1) équation : $2x^2 - 20x + 48 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{nombre de solutions réelles : } \cdots\cdots\cdots$$

4. b. (E_2) équation : $-2x^2 + 12x - 18 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{nombre de solutions réelles : } \cdots\cdots\cdots$$

4. c. (E_3) équation : $x^2 + x + 1 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{nombre de solutions réelles : } \cdots\cdots\cdots$$

4. d. (E_4) équation : $x^2 + 0,8x + 0,16 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{ll} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{array}\right. \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{nombre de solutions réelles : } \cdots\cdots\cdots$$

Exercice 28. (c) Racines d'une équation du second degré

28.1 Définition d'une liste

Une liste : L

Une liste est une suite d'éléments numérotés dont le premier indice est 0. En Python, une liste s'écrit entre crochets [... , ..., ..., ...] avec les éléments séparés par des virgules.

- Le premier élément de la liste est L[0], le 2e est L[1], ...
- Une liste peut être écrite de manière explicite : L = ["Lundi", "Mardi","Mercredi"]
- Sa longueur est donnée par $len(L)$.
- Si les éléments de la liste sont comparables, le max. est donné par *max(L)*, le min. par *min(L)*
- L=[] permet de définir une liste vide.
- Si L est une liste, l'instruction *L.append(x)* va ajouter l'élémentt [x] à la liste L.

```
# Par exemple
>>> maliste=[31,'salut',78,'bonjour',2022,'NSI']
>>> maliste[0]
31
>>> maliste[1]
'salut'
>>> maliste[5]
'NSI'
>>> len(maliste)
6
>>> maliste.append('toto')
>>> maliste
[31,'salut',78,'bonjour',2022,'NSI','toto']
```

28.2 Application

1. Écrire une fonction Python $racines\_equation(a, b, c)$ qui prend en argument 3 flottants a, b et c et qui renvoie les racines de l'équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ sous forme d'une liste, éventuellement vide si il n'y a pas de racines réelles.

On traitera à part le cas où a est nul en utilisant un assert.

```
# Dans l'éditeur PYTHON

from math import sqrt # pour avoir la racine carrée

def racines_equation(a,b,c):
    '''
    In  :  a,b,c float
    Out : liste des racines de ax^2+bx+c=0 avec a non nul
    '''
    assert a !=0 # permet de s'assurer que a est non nul
    D = delta(a,b,c)
    ...
```

2. Tester votre fonction avec les exemples de l'exercice précédents en ayant préalablement calculé les racines.

2. a. (E_1) équation : $2x^2 - 20x + 48 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{cases} \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{Solutions réelles : } \left[\cdots\cdots\cdots \;;\; \cdots\cdots\cdots\right]$$

2. b. (E_2) équation : $-2x^2 + 12x - 18 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{cases} \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{Solutions réelles : } \left[\cdots\cdots\cdots\right]$$

2. c. (E_3) équation : $x^2 + x + 1 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{cases} \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{Solutions réelles : } \left[\right]$$

2. d. (E_4) équation : $x^2 + 0,8x + 0,16 = 0$
C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = & \cdots \\ b = & \cdots \\ c = & \cdots \end{cases} \Longrightarrow \Delta = \cdots\cdots\cdots \Longrightarrow \text{Solutions réelles : } \left[\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\right]$$

Partie VIII. Corrections

Correction de l'exercice 4

1. $(E_1)\ :\ x^2+5=0$

Correction

- Méthode 1.

$$x^2+5=0 \iff x^2=-5$$

Or un réel au carré est toujours positif ou nul, donc cette équation n'admet pas de solution réelle.

- Méthode 2.

L'équation $x^2\ 0x+\ \ 5=0$ est du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=0 \\ c=5 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=-20<0$$

Le discriminant Δ étant strictement négatif, l'équation n'admet pas de racine réelle.

2. $(E_2)\ :\ -2x^2+10x+28=0$

Correction

L'équation $-2x^2+\ \ 10x+\ \ 28=0$ est du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=-2 \\ b=10 \\ c=28 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=324>0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{-10-\sqrt{324}}{-4}=7 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-10+\sqrt{324}}{-4}=-2$$

3. $(E_3)\ :\ 2x^2=3x+1$

Correction

$$2x^2=3x+1 \iff 2x^2-3x-1=0$$

L'équation $2x^2\ -3x\ -1=0$ est du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=2 \\ b=-3 \\ c=-1 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=17>0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{3-\sqrt{17}}{4} \approx -0.3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{17}}{4} \approx 1.8$$

4. $(E_4) \quad : \quad x^2 + 2x + 1 = 1 - 3x$

Correction

$$x^2 + 2x + 1 = 1 - 3x \iff x^2 + 2x + 1 - 1 + 3x = 0 \iff x^2 + 5x = 0$$

- Méthode 1.
$$x^2 + 5x = 0 \iff x(x+5) = 0 \iff \underline{x = 0 \text{ ou } x = -5}$$

- Méthode 2.
L'équation $x^2 + \ \ 5x\ 0 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 5 \\ c = 0 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 25 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{25}}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{25}}{2} = -0$$

5. $(E_5) \quad : \quad (x+1)(5x^2 + 2x - 1) = 0$

Correction

On a une EPN (Équation Produit Nul)

$$\begin{aligned} (x+1)(5x^2+2x-1) = 0 &\iff \left(x+1=0\right) \text{ ou } \left(5x^2+2x-1=0\right) \\ &\iff \left(\underline{x=-1}\right) \text{ ou } \left(5x^2+2x-1=0\right) \end{aligned}$$

On a déjà une solution qui est $x = -1$, il reste à résoudre la deuxième équation $5x^2 + 2x - 1 = 0$.
L'équation $5x^2 + \ \ 2x\ -1 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 5 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 24 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{24}}{10} \approx -0.7 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2+\sqrt{24}}{10} \approx 0.3$$

Et puisque $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ on obtient :

$$\mathscr{S}_5 = \left\{-1\,;\, \frac{-1-\sqrt{6}}{5}\,;\, \frac{-1+\sqrt{6}}{5}\right\}$$

6. (E_6) : $(x^2+2x+1)(x^2-2x+1)=0$
7. (E_7) : $(x^2+6x+9)(x^2+x+1)=0$
8. (E_8) : $(x+1)^2-2(x-2)^2=0$
9. (E_9) : $2x^2-\dfrac{5}{3}x=-\dfrac{1}{3}$
10. (E_{10}) : $\dfrac{x^2-5x+4}{x+1}=0$

Correction

On a ici une valeur interdite :

$$\frac{x^2-5x+4}{x+1}=0 \iff \begin{cases} x+1\neq 0 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\neq -1 \\ x^2-5x+4=0 \end{cases}$$

L'équation $x^2 -5x + 4=0$ est du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-5 \\ c=4 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=9>0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2}=1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2}=4$$

Les deux solutions sont différentes de -1 donc elles sont valides.

11. (E_{11}) : $\dfrac{x^2-2x-3}{(x+1)^2}=0$

Correction

On a ici une valeur interdite :

$$\frac{x^2-2x-3}{(x+1)^2}=0 \iff \begin{cases} x+1\neq 0 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\neq -1 \\ x^2-2x-3=0 \end{cases}$$

L'équation $x^2 -2x -3=0$ est du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=16>0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{2-\sqrt{16}}{2}=-1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{2+\sqrt{16}}{2}=3$$

12. $(E_{12})\ :\ \dfrac{x^2+x-3}{2x+5}=\dfrac{2(x-4)}{5}$

13. $(E_{13})\ :\ x^3-5x^2=-4x$

Correction

On va factoriser pour obtenir une EPN :

$$\begin{aligned} x^3-5x^2=-4x &\iff x^3-5x^2+4x=0 \\ &\iff x(x^2-5x+4)=0 \\ &\iff \big(x=0\big) \text{ ou } \big(x^2-5x+4=0\big) \end{aligned}$$

On a déjà une solution qui est $x=0$, il reste à résoudre la deuxième équation $x^2-5x+4=0$.
L'équation $x^2\ -5x+\ \ 4=0$ est du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-5 \\ c=4 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \Delta=9>0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2}=1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2}=4$$

On obtient :

$$S_{13}=\{0\ ;\ 1\ ;\ 4\}$$

L'équation $x^2\ -5x+\ \ 4=0$ est du second degré de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a=1 \\ b=-5 \\ c=4 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \Delta=9>0$$

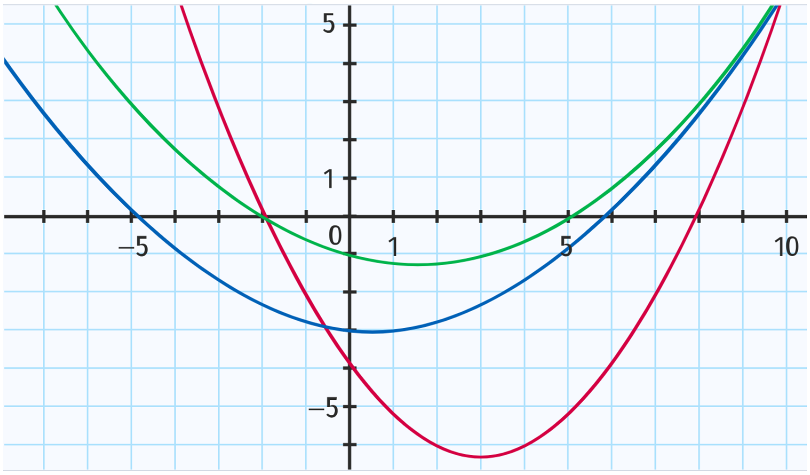
Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2}=1 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2}=4$$

Les deux solutions sont différentes de -1 donc elles sont valides.

Correction de l'exercice 8

On donne ci-dessous les courbes représentatives de trois fonctions trinômes du second degré f en vert, g en rouge et h en bleu.



1. En utilisant la forme factorisée de $f(x)$, déterminer l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

L'équation $f(x) = 0$ admet 2 solutions : −2 et 5. On peut donc écrire $f(x) = a_1(x+2)(x-5)$. On sait de plus que $f(0) = -1$, d'où $a_1(0+2)(0-5) = -1$ et donc $a_1 = 0,1$. On a donc $f(x) = 0,1x^2 - 0,3x - 1$.

2. Déterminer, de même, les expressions de $g(x)$ et $h(x)$.

On a de même $g(x) = a_2(x+2)(x-8)$ et $g(0) = -4$ d'où $a_2 = 0,25$ et $g(x) = 0,25x^2 - 1,5x - 4$. Et $h(x) = a_3(x+5)(x-6)$ et $h(0) = -3$ d'où $a_3 = 0,1$ et donc au final $h(x) = 0,1x^2 - 0,1x - 3$.

3. Les courbes représentatives des fonctions f, g et h ont-elles un point commun ? Si oui, déterminer ses coordonnées.

On résout pour commencer l'équation $f(x) = h(x)$, qui est la plus simple à résoudre.

$f(x) = h(x) \Leftrightarrow 0,1x^2 - 0,3x - 1 = 0,1x^2 - 0,1x - 3$

$f(x) = h(x) \Leftrightarrow -0,2x = -2$

$f(x) = h(x) \Leftrightarrow x = 10$

On calcule ensuite $f(10)$ pour connaître l'ordonnée du point d'intersection entre les courbes représentatives des fonctions f et h : $f(10) = 0,1 \times 10^2 - 0,3 \times 10 - 1 = 6$.

Il reste à déterminer si le point de coordonnées $(10\ ;\ 6)$ appartient à la courbe représentative de la fonction g : $g(10) = 0,25 \times 10^2 - 1,5 \times 10 - 4 = 6$.

Les trois courbes ont donc un point commun, le point de coordonnées $(10\ ;\ 6)$.

Correction de l'exercice 9

Soit une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x)$.

Partie A : application du cours

1. Montrer en développant que : $f(x) = -2\,x^2 + 5\,x - 2$.

Correction

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x) \\ &= 1 - 4x + 4x^2 - \left(3 - 3x - 6x + 6x^2\right) \\ &= 1 - 4x + 4x^2 - 3 + 3x + 6x - 6x^2 \\ f(x) &= \underline{-2\,x^2 + 5\,x - 2} \end{aligned}$$

2. Donner la forme factorisée de f.

Correction

- Méthode 1.

$$\begin{aligned} f(x) &= (-1+2x)^2 - (3-6x)(1-x) \\ &= (1-2x)^2 - 3(1-2x)(1-x) \\ &= (1-2x)\Big[(1-2x) - 3(1-x)\Big] \\ &= (1-2x)\Big[1 - 2x - 3 + 3x\Big] \\ f(x) &= \underline{(x-2)(-2x+1)} \end{aligned}$$

- Méthode 2.
L'expression $\left(-2x^2 + \ 5x \ -2\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$ avec

$$\left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = 5 \\ c = -2 \end{array}\right. \Bigg| \implies \left\{\begin{array}{ll} \Delta & = (5)^2 - 4 \times (-2) \times (-2) = 9 > 0 \\ \alpha & = \dfrac{-5}{2 \times (-2)} = \dfrac{5}{4} \\ \beta & = \dfrac{-9}{4 \times (-2)} = \dfrac{9}{8} \end{array}\right.$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-2x^2 + \ 5x \ -2\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{-4} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{-4} = 0.5$$

La forme factorisée de f est donc :

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \ \text{ soit } \ \boxed{f(x) = -2(x-2)(x-0,5)}$$

On retrouve bien la forme précédente en multipliant le 2e facteur par (-2).

3. Donner la forme canonique de f

Correction

D'après le cours, la forme canonique de f est :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$$

avec

$$\begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \\ c = -2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 \\ \alpha = \dfrac{5}{4} \text{ et } \beta = \dfrac{9}{8} \end{cases}$$

Soit

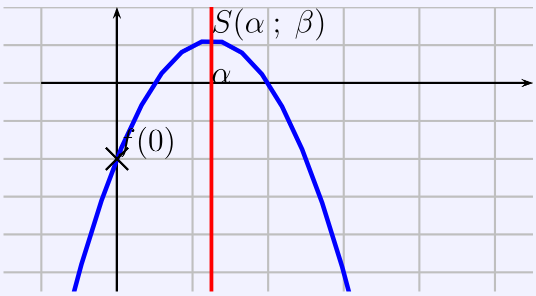
$$\boxed{f(x) = -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8}}$$

4. Donner le tableau de variations de f et précisez son maximum.

Correction

D'après le cours, puisque $a = -2 < 0$ on a :

x	$-\infty$		$\alpha = \frac{5}{4}$		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\beta = \frac{9}{8}$	$\searrow$	$-\infty$



Le maximum de f est donc $\beta = \dfrac{9}{8}$.

5. Donner le tableau de signe de $f(x)$.

Correction

Puisque $a = -2 < 0$ on a :

x	$-\infty$		0.5		2		$+\infty$
signe de $f(x) = -2(x-2)(x-0.5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Partie B : Choisir l'expression la plus adaptée pour répondre aux questions suivantes

1. Montrer que $f\left(\sqrt{2}\right) = 5\sqrt{2} - 6$.

Correction

En utilisant la forme développée :

$$f\left(\sqrt{2}\right) = -2\left(\sqrt{2}\right)^2 + 5\left(\sqrt{2}\right) - 2 = -4 + 5\left(\sqrt{2}\right) - 2 = \underline{5\sqrt{2} - 6}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

2. a. $(E_1) : f(x) = 0$;

Correction

D'après la question A.2., on sait que les racines de f sont 2 et $0,5$.

2. b. $(E_2) : f(x) = \dfrac{9}{8}$;

Correction

On utilise par exemple la forme canonique de f.

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{9}{8} &\Longleftrightarrow -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} = \frac{9}{8} \\ &\Longleftrightarrow -2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \left(x - \frac{5}{4}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = \frac{9}{8} \Longleftrightarrow x = \frac{5}{4}}$$

La solution de (E_2) est $\dfrac{5}{4}$.

2. c. $(E_3) : f(x) = (x - 2)$.

Correction

- Méthode 1.
  On utilise la forme factorisée de f :

$$\begin{aligned} f(x) = (x-2) &\Longleftrightarrow (1 - 2\,x)\ (x - 2) = (x - 2) \\ &\Longleftrightarrow (1 - 2\,x)\ (x - 2) - (x - 2) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x - 2)\Big((1 - 2x) - 1\Big) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x - 2)(-2x) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \Big(x - 2 = 0\Big) \text{ ou } \Big(-2x = 0\Big) \end{aligned}$$

$$\boxed{f(x) = (x-2) \Longleftrightarrow \Big(x = 2\Big) \text{ ou } \Big(x = 0\Big)}$$

Les solutions de (E_3) sont 0 et 2 .

- Méthode 2.
  On utilise la forme développée de f :

$$\begin{aligned} f(x) = (x-2) &\iff -2x^2+5x-2 = x-2 \\ &\iff -2x^2+5x-2-x+2 = 0 \\ &\iff -2x^2+4x = 0 \\ &\iff x(-2x+4) = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } -2x+4 = 0 \\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = 2 \end{aligned}$$

Les solutions de (E_3) sont 0 et 2 .

2. d. $(E_4) : f(x) = -3x^2+4$.

Correction

On utilise la forme développée de f :

$$\begin{aligned} f(x) = -3x^2+4 &\iff -2x^2+5x-2 = -3x^2+4 \\ &\iff x^2+5x-6 = 0 \end{aligned}$$

L'équation $x^2 + \ 5x \ -6 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2+bx+c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 5 \\ c = -6 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \Delta = 49 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{49}}{2} = -6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{49}}{2} = 1$$

3. Déterminer la position relative de la courbe de f et de celle de la fonction g définie par $g(x) = -3x^2+4$. Précisez les coordonnées des points d'intersection des deux courbes.

Correction

Pour étudier la position relative de deux courbes, il faut étudier le signe de $f(x)-g(x)$.
D'après la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= f(x)-(-3x^2+4) \\ &= x^2+5x-6 \\ &= (x+6)(x-1) \end{aligned}$$

Puisque $a = 1 > 0$, d'après le cours on a :

x	$-\infty$		-6		1		$+\infty$
signe de $f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
position relative		$\mathscr{C}_f$ au dessus de $\mathscr{C}_g$	0	$\mathscr{C}_f$ au dessous	0	$\mathscr{C}_f$ au dessus	

Les deux courbes sont sécantes aux points d'abscisses -6 et 1 donc de coordonnées :

$$A(-6\,;\,g(-6)) \text{ et } B(1\,;\,g(1))$$

soit

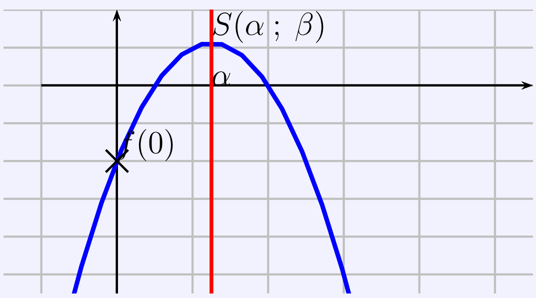
$$\boxed{A(-6\,;\,-104) \text{ et } B(1\,;\,1)}$$

4. Déterminer la position relative de la courbe de f et de l'axe des abscisses.

Correction

Pour étudier la position relative de la courbe de f et de l'axe des abscisses, il faut étudier le signe de $f(x)$.
D'après la question A.5. on a :

x	$-\infty$		0.5		2		$+\infty$
signe de $f(x) = -2(x-2)(x-0.5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
position relative par rapp. à (Ox)		$\mathscr{C}_f$ au dessous de (Ox)	0	$\mathscr{C}_f$ au dessus	0	$\mathscr{C}_f$ au dessous	



5. Déterminer les coordonnées des points d'intersection courbe de f et de celle de la droite d'équation $y = 5x-4$.

Correction

Pour déterminer les abscisses des points d'intersection courbe de f et de celle de la droite d'équation $y = 5x-4$ il faut résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} f(x) = (5x-4) &\iff -2x^2+5x-2 = (5x-4) \\ &\iff -2x^2+2 = 0 \\ &\iff x^2 = 1 \\ &\iff \underline{x = 1 \text{ ou } x = -1} \end{aligned}$$

Il reste à déterminer les ordonnées des points qui sont :

$$C(-1\ ;\ f(-1)\ \text{ et }\ D(1\ ;\ f(1))$$

soit

$$\boxed{C(-1\ ;\ -9)\ \text{ et }\ D(1\ ;\ 1)}$$

Correction de l'exercice 11 : Inéquations

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(I_1) \quad : \quad \dfrac{-2x^2+4x-5}{-4x+3} \geqslant 0$

Correction

- Valeurs interdites.
L'expression est définie si :

$$-4x+3 \neq 0 \iff x \neq \frac{3}{4}$$

- Tableau de signe.

L'expression $\left(-2x^2 + \ 4x \ -5\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$ avec

$$\left\{\begin{array}{l} a=-2 \\ b=4 \\ c=-5 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=-24<0$$

Le discriminant Δ étant strictement négatif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-2x^2 + \ 4x \ -5\right)$ n'admet pas de racine réelle. Elle est donc toujours du signe de $a=-2<0$.
On obtient alors facilement le signe du facteur $(-4x+3)$ et on résume l'étude dans ce tableau :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
signe de $(-4x+3)$		$+$	0	$-$	
signe de $(-2x^2+4x-5)$		$-$	||	$-$	
signe de $\dfrac{-2x^2+4x-5}{-4x+3}$		$-$	||	$+$	

- Conclusion :

$$\mathscr{S}_1 = \left]\frac{3}{4}\ ;\ +\infty\right[$$

2. $(I_2) \quad : \quad \dfrac{-x^2+2x-1}{(-4x+3)^2} \geqslant 0.$

Correction

- Valeurs interdites.
L'expression est définie si :

$$(-4x+3)^2 \neq 0 \iff x \neq \frac{3}{4}$$

- Tableau de signe.

L'expression $\left(-1x^2 + \ 2x \ -1\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$ avec

$$\left\{\begin{array}{l} a=-1 \\ b=2 \\ c=-1 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta=0$$

Le discriminant Δ étant nul, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-1x^2 + \ 2x \ -1\right)$

admet une unique racine réelle :

$$x_1 = 1 = 1$$

Elle est donc toujours du signe de $a = -1 < 0$ et nulle en 1.
Le facteur $(-4x+3)^2$ est positif ou nul et on résume l'étude dans ce tableau :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		1		$+\infty$
signe de $(-4x+3)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de $(-x^2+2x-1)$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$-$	
signe de $\dfrac{-x^2+2x-1}{(-4x+3)^2}$		$-$	$\|\|$	$-$	0	$-$	

- Conclusion :

$$\mathscr{S}_2 = \{1\}$$

3. (I_3) : $6x^2 < x+1$.

Correction

$$6x^2 < x+1 \iff 6x^2 - x - 1 < 0$$

L'expression $\left(6x^2 - 1x - 1\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2+bx+c\right)$ avec

$$\left\{\begin{array}{l} a = 6 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array}\right. \Bigg| \implies \Delta = 25 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(6x^2 - 1x - 1\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{12} \approx -0.33 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{12} = 0.5$$

L'expression est du signe de $a = 6 > 0$ à l'extérieur des racines soit :

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $6x^2 - x - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$$\mathscr{S}_3 = \left]-\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\right[$$

Correction de l'exercice 12 : positions relative

1. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$ avec $\begin{cases} f(x) = (x-2)(-x-2) \\ g(x) = x-1 \end{cases}$.

En déduire les positions relatives des deux courbes représentatives.

Corrigé

Pour tout réel x on a :

$$f(x) \geqslant g(x) \iff f(x) - (x-1) \geqslant 0 \iff -x^2 - x + 5 \geqslant 0$$

On va étudier le signe de cette expression.

L'expression $\left(-1x^2 -1x + \ 5\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \\ c = 5 \end{array} \right| \Longrightarrow \Delta = 21 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-1x^2 -1x + \ 5\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{21}}{-2} \approx 1.79 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{21}}{-2} \approx -2.79$$

On en déduit le signe de cette expression du second degré. On a $a = -1 < 0$ donc l'expression est négative à l'extérieur des racines.

Donc :

$$\boxed{f(x) \geqslant g(x) \iff x \in \left[\frac{-1-\sqrt{21}}{2} ; \frac{-1+\sqrt{21}}{2}\right]}$$

Ce qui nous donne aussi la position relative des deux courbes.

x	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$		$+\infty$
signe de $f(x)-(x-1)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
position relative		$\mathscr{C}_f$ au dessous de (d)	0	$\mathscr{C}_f$ au dessus de (d)	0	$\mathscr{C}_f$ au dessous	

2. Étudier la position relative des courbes représentatives des fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} h(x) = -x^2 + x + 2 \\ k(x) = (x+1)^2 \end{cases}$.

Corrigé

Pour tout réel x on a :

$$h(x) - k(x) = -2x^2 - x + 1$$

On va étudier le signe de cette expression.

L'expression $\left(-2x^2 \ -1x + \ 1\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = -2 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 9 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(-2x^2 \ -1x + \ 1\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{9}}{-4} = 0.5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{9}}{-4} = -1$$

On en déduit le signe de cette expression du second degré. On a $a = -2 < 0$ donc l'expression est négative à l'extérieur des racines.

Ce qui nous donne aussi la position relative des deux courbes.

x	$-\infty$		-1		0.5		$+\infty$
signe de $h(x) - k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
position relative		$\mathscr{C}_h$ au dessous de $\mathscr{C}_k$	0	$\mathscr{C}_h$ au dessus de (d)	0	$\mathscr{C}_h$ au dessous	

Correction de l'exercice 13 : positions relative

Soit $\mathcal{P}$ la courbe d'équation $y = x^2$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.
Étudier la position relative de ces deux courbes.

Correction

Étudions la différence : $x^2 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$. C'est de la forme $ax^2 + bx + c$ avec $\begin{cases} a = 1 \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 > 0.$

Le polynôme $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ a donc deux racines distinctes.

$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}}{2} = -\dfrac{1}{2}$

et

$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}}{2} = 1$

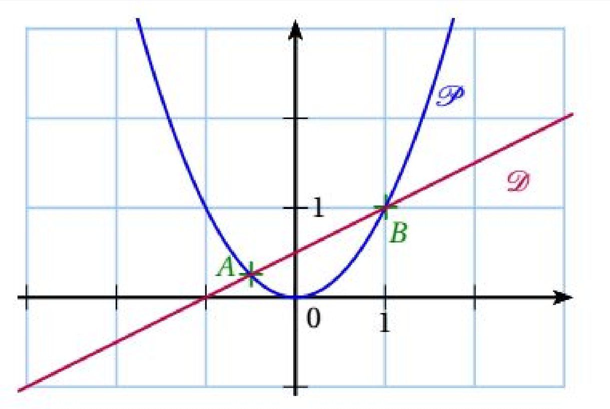
Le polynôme $x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ est du signe de $a = 1$, donc positif en dehors de l'intervalle des racines :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
signe de $(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\mathcal{P}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}\ ;\ 1\right[$.

$\mathcal{P}$ est en-dessous de $\mathcal{D}$ sur l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right[\cup]1\ ;\ +\infty[$.

Il y a deux points d'intersection de coordonnées $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ et $(1\ ;\ 1)$.



Correction de l'exercice 14 : somme et produit de racines

1. Trouver deux nombres dont la somme vaut 5 et le produit -50.

Correction

Deux réels ont pour somme S et pour produit P si et seulement si ils sont solutions de l'équation

$$x^2 - Sx + P = 0, \quad \text{où} \begin{cases} S = x_1 + x_2 \\ P = x_1 \times x_2 \end{cases}$$

Donc trouver deux nombres dont la somme vaut 5 et le produit -50. revient à résoudre l'équation

$$x^2 - 5x - 50 = 0$$

L'équation $x^2 \; -5x \; -50 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -5 \\ c = -50 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 225 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{225}}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5 + \sqrt{225}}{2} = 10$$

2. Un rectangle a pour périmètre 36 cm et pour aire 32 cm^2. Déterminer les dimensions de ce rectangle.

Correction

Si on note L la longueur du rectangle et ℓ sa largeur, on a :

$$\begin{cases} 2(L+\ell) = 36 \\ L\ell = 32 \end{cases} \iff \begin{cases} L + \ell = 18 \\ L\ell = 32 \end{cases}$$

Le problème revient donc à trouver deux réels positifs dont la somme vaut 18 et le produit 32.
Deux réels positifs ont pour somme 18 et pour produit 32 si, et seulement si, ils sont solutions de l'équation

$$x^2 - 18x + 32 = 0, \quad \text{avec} x \in \mathbb{R}_+$$

L'équation $x^2 \; -18x + \; 32 = 0$ est du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -18 \\ c = 32 \end{array}\right| \Longrightarrow \Delta = 196 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, l'équation admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{18 - \sqrt{196}}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{18 + \sqrt{196}}{2} = 16$$

Le rectangle a donc pour longueur 16 cm et pour largeur 2 cm.

Correction de l'exercice 15 : Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1. $f(x) = \sqrt{-6 - x + x^2}$.

Corrigé

f est définie si et seulement si $(-6 - x + x^2 \geqslant 0)$.

Il faut résoudre cette inéquation.

L'expression $\left(x^2 \, -1x \, -6\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -6 \end{array}\right. \left| \implies \Delta = 25 > 0 \right.$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(x^2 \, -1x \, -6\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2} = 3$$

Puisque $a = 1 > 0$, d'après le cours, l'expression est positive à l'extérieur des racines et négatives entre -2 et 3 donc :

$$\boxed{D_f =]-\infty\,;\,-2] \cup [3\,;\,+\infty[}$$

2. $g(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 - x - 12}}$.

Corrigé

g est définie si et seulement si $(x^2 - x - 12 > 0)$, attention ici le dénominateur ne doit pas être nul donc l'inégalité est stricte.

Il faut résoudre cette inéquation.

L'expression $\left(x^2 \, -1x \, -12\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -12 \end{array}\right. \left| \implies \Delta = 49 > 0 \right.$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(x^2 \, -1x \, -12\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{49}}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{49}}{2} = 4$$

Puisque $a = 1 > 0$, d'après le cours, l'expression est positive à l'extérieur des racines et négatives entre -3 et 4 donc :

$$\boxed{D_g =]-\infty\,;\,-3[\cup]4\,;\,+\infty[}$$

3. $h(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{2x^2 - 12x + 10}$.

Corrigé

h est définie si et seulement si $(2x^2 - 12x + 10 \neq 0)$.

Il faut résoudre cette équation.

L'expression $\left(2x^2 - 12x + 10\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = -12 \\ c = 10 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \Delta = 64 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(2x^2 - 12x + 10\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{64}}{4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{12 + \sqrt{64}}{4} = 5$$

Donc :

$$\boxed{D_h = \mathbb{R} \setminus \{1\ ;\ 5\}}$$

4. $i(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 10} + \sqrt{x}$.

Corrigé

i est définie si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 \geqslant 0 \\ \text{et} \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

Il faut résoudre la première inéquation.

L'expression $\left(x^2 - 3x - 10\right)$ est un expression du second degré de la forme $\left(ax^2 + bx + c\right)$. Avec :

$$\left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \\ c = -10 \end{array}\right. \Bigg| \Longrightarrow \Delta = 49 > 0$$

Le discriminant Δ étant positif, la fonction polynôme du second degré $x \longmapsto \left(x^2 - 3x - 10\right)$ admet deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} = 5$$

Puisque $a = 1 > 0$, d'après le cours, l'expression est positive à l'extérieur des racines et négatives entre -2 et 5 donc puisqu'il faut en plus que x soit positif d'après la 2e contraintes :

$$\boxed{D_i = [5\,;\,+\infty[}$$

Correction de l'exercice 16 : SVT - Concentration dans le sang (sujet de bac)

On étudie la concentration dans le sang en fonction du temps d'un antibiotique injecté en une seule prise à un patient. On modélise cette concentration par la fonction g définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 10]$ par

$$g(t) = \frac{4t}{t^2+1}$$

$g(t)$ représente la concentration en mg·L^{-1} de l'antibiotique lorsque t heures se sont écoulées. Répondre aux questions suivantes de façon algébrique puis vérifier à l'aide d'un graphique à la calculatrice.

1. Dans quel intervalle de temps la concentration sera-t-elle supérieure ou égale à 1,6 mg·L^{-1} ?

Pour répondre à la question on résout $g(t) \geq 1,6$. On commence par réécrire cette inéquation de manière à la mettre sous la forme d'une expression comparée à 0 : $g(t) \geq 1,6 \iff \dfrac{4t}{t^2+1} \geq 1,6 \iff \dfrac{-1,6t^2+4t-1,6}{t^2+1} \geq 0$.
On pose maintenant $h(t) = -1,6t^2+4t-1,6$ pour $t \in \mathbb{R}$.
t^2+1 étant strictement positif pour tout t réel, $\dfrac{-1,6t^2+4t-1,6}{t^2+1}$ est du signe de $h(t)$. Déterminons donc le signe de $h(t)$. On calcule Δ : $\Delta = 5,76$. Le discriminant étant positif, ce trinôme admet deux racines réelles : $x_1 = 2$ et $x_2 = 0,5$. Donc, ce trinôme est du signe de $a = -1,6 < 0$ sauf entre ses racines, on obtient le tableau de signes ci-dessous.

t	0		0,5		2		10
$h(t)$		−	0	+	0	−	

Donc $g(t) \geq 1,6$ pour $t \in [0,5;2]$. Donc la concentration dépasse $1,6$ mg/L entre une demi-heure et 2 heures après l'injection du produit.

2. La concentration peut-elle être strictement supérieure à 2 mg·L^{-1} ?

Pour répondre à la question on résout on résout $g(t) > 2$. On commence par réécrire cette inéquation de manière à la mettre sous la forme d'une expression comparée à 0 : $g(t) > 2 \iff \dfrac{4t}{t^2+1} > 2 \iff \dfrac{-2t^2+4t-2}{t^2+1} > 0$.
On pose maintenant $l(t) = -2t^2+4t-2$ pour $t \in \mathbb{R}$. t^2+1 étant strictement positif pour tout t réel, $\dfrac{-2t^2+4t-2}{t^2+1}$ est du signe de $l(t)$. Déterminons donc le signe de $l(t)$: On a $l(t) = -2(t^2-2t+1)$ donc $l(t) = -2(t-1)^2$ pour tout t réel d'après l'identité remarquable $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$. Donc $l(t)$ est toujours négatif ou nul, donc ne peut pas être strictement positif : la concentration n'est donc jamais strictement supérieure à 2.

Correction de l'exercice 17 : équation à paramètre

Soit m un nombre réel différent de 0. On considère l'équation (E) suivante :

$$mx^2 + x + 1 = 0$$

Pour quelle(s) valeur(s) de m l'équation (E) admet-elle une solution double ?

Correction

Une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ admet une solution double si, et seulement si, le discriminant Δ est égal à zéro. Dans le cas de l'équation $mx^2 + x + 1 = 0$, le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4m$. On a donc

$$\delta = 0 \iff 1 - 4m = 0 \iff m = \frac{1}{4}$$

Et donc l'équation (E) admet une solution double pour $m = \frac{1}{4}$

Correction de l'exercice 18 : équation à paramètre

Soit m un nombre réel. On considère l'équation (E) suivante :

$$2x^2 + x + m - 1 = 0$$

1. Déterminer, en fonction de m, le discriminant de l'équation (E).

Correction

L'équation $2x^2 + x + m - 1 = 0$ est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = m - 1 \end{cases} \implies \Delta_m = 1 - 4 \times 2 \times (m-1) = \underline{9 - 8m}$$

2. En déduire, en fonction de m, le nombre de solutions de l'équation (E).

Correction

Le nombre de solutions de l'équation (E) dépend du signe de son discriminant. Pour répondre à cette question, on étudie donc le signe de Δ_m . On a :

$$\begin{cases} \Delta_m = 0 \iff 9 - 8m = 0 \iff m = \dfrac{9}{8} \\ \Delta_m > 0 \iff 9 - 8m > 0 \iff m < \dfrac{9}{8} \end{cases}$$

Soit :

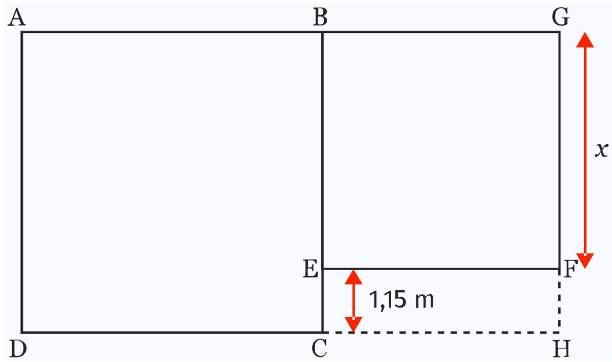
m	$-\infty$		$\frac{9}{8}$		$+\infty$
signe de $9 - 8m$		$+$	0	$-$	

De ce fait :

- Si $m < \dfrac{9}{8}$ alors $\Delta_m > 0$ et donc (E) admet deux solutions réelles distinctes.
- Si $m = \dfrac{9}{8}$ alors $\Delta_m = 0$ et donc (E) admet une solution.
- Si $m > \dfrac{9}{8}$ alors $\Delta_m < 0$ et donc (E) n'admet pas de solution réelle.

Correction de l'exercice 19

Un architecte travaille sur le plan d'une maison. Le plan de l'étage est schématisé par la figure ci-dessous.
ABCD et BGFE sont deux carrés.
Le rectangle EFHC, d'une largeur de 1,15 m, représente le balcon sur lequel donne la chambre principale.
On appelle x la longueur (en mètre) du côté du plus petit des deux carrés.
L'étage doit avoir une surface de plancher de 80 m^2.
Le balcon n'est pas pris en compte.
Déterminer la valeur de x.



Correction

- Tout d'abord on détermine l'aire de ABCD et de BGFE :

$$\mathcal{A}_{ABCD} = (x+1,15)^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_{ABCD} = x^2$$

- Donc $\mathcal{A}$, l'aire totale du premier étage, est égale à

$$\mathcal{A} = (x+1,15)^2 + x^2 = 2x^2 + 2,30x + 1,3225$$

- On cherche à déterminer x afin que cette aire soit égale à 80 m^2. On cherche donc à résoudre pour $x > 0$, donc dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, l'équation

$$2x^2 + 2,30x + 1,3225 = 80 \iff 2x^2 + 2,3x - 78,6775 = 0$$

- C'est une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ avec :

$$\begin{cases} a = & 2 \\ b = & 2,3 \\ c = & -78,6775 \end{cases} \Rightarrow \Delta = 634,71 > 0$$

  L'équation admet donc deux solutions réelles qui sont :

$$x_1 = \frac{-2,3 - \sqrt{634,71}}{4} \approx -6,87 \notin\,]0\,;\,+\infty[\quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-2,3 + \sqrt{634,71}}{4} \approx 5,72 \in\,]0\,;\,+\infty[$$

- La valeur x recherchée est une longueur donc est positive,
  donc la seule solution retenue est $\underline{x \approx 5,72 \text{ m}}$.

Correction de l'exercice 21 : fonction à paramètre

Soit b un nombre réel et soit f la fonction trinôme définie par

$$f(x) = -x^2 + bx - 5$$

On sait que f admet un extremum en 4.

1. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

Correction

- f est une fonction polynôme du second degré de la forme $x \longmapsto ax^2+bx+c$ avec un coefficient dominant $a = -1 < 0$ donc elle est croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ puis décroissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$.
- On sait que f admet un extremum en $\alpha = 4$.
- Donc f est croissante sur croissante sur $]-\infty\,;\,4]$ puis décroissante sur $[4\,;\,+\infty[$.
- Donc en 4, f admet un maximum.

2. Déterminer la valeur de cet extremum.

Correction

- On sait d'après le cours que :
$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-b}{-2} = \frac{b}{2}$$
Or puisque $\alpha = 4$ on a :
$$\frac{b}{2} = 4 \iff b = 8$$
- Donc la fonction f est définie par
$$f(x) = -x^2 + 8x - 5$$
- La valeur de ce maximum est alors :
$$f(4) = 11$$

Correction des exercices 27 et 28

La correction est disponible en cliquant sur ce lien :

https://replit.com/@fduffaud/1re-seconddegre-nombresolutions#main.py