Math93.com

TD 1 - Première Spécialité Maths
Suites - Partie 1

Les exercices dont l 'intitulé est suivi du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.

Table des matières

Partie I. Définitions et modes de génération d'une suite

Exercice 1.

Modéliser chaque situation par une suite en précisant son premier terme u_0 et une relation de récurrence pour définir le terme général.

1. On débute avec 5. On construit une suite de nombres telle que chaque terme est égal à la somme de 5 et de l'inverse du terme précédent.
2. Un salaire initial est de 1 500 euros. Chaque année, il augmente de 0,1%.
3. La population initiale d'une ville est de 10 000 habitants. Chaque année, 80% des habitants restent et 500 nouvelles personnes arrivent.

Exercice 2.

Soit u_n la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 5u_n - 3$.

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Comment calculer u_{50}.

Exercice 3.

Pour chacune des suites suivantes définies pour tout entier naturel n, calculer les cinq premiers termes.

1. $u_n = 7n + 1$
2. $v_n = n^2 - 3n + 1$
3. $w_n = \dfrac{1}{2n-1}$
4. $t_n = \sqrt{5n+1}$

Exercice 4.

Pour chacune des suites suivantes définies par récurrence pour tout entier naturel n, calculer les quatre termes suivant le premier.

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n^2 + 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n + 2} \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1} \end{cases}$

Exercice 5. Tableur

On souhaite calculer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur.

	A	B	C	D	E	F
1	n	0	1	2	3	4
2	u_n	-2	=3*C1^2+5*C1-2			
3						

1. Si on étend la formule de la case **C2** à la case **D2**, quelle est la valeur de u_2 ?
2. Exprimer le terme général u_n en fonction de n en utilisant la formule donnée par le tableur.

Exercice 6. Algorithme

On considère l'algorithme suivant :

```
# Dans l'éditeur Python
def u(n):
        return 2**i - 1
```

1. Que renvoie l'instruction $u(6)$?
2. On appelle (u_n) la suite associée aux valeurs calculées par l'algorithme.
   Donner l'expression du terme général de cette suite.

Exercice 7.

Pour chacune des suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$, exprimer u_{n-1} et u_{n+1} en fonction de n :

1. $u_n = 6n + 8$
2. $u_n = n^2 - 2n + 8$
3. $u_n = \dfrac{n(n+1)}{n+2}$
4. $u_n = 5^n$
5. $u_n = \dfrac{3^{n+1}}{2^n}$
6. $u_n = \dfrac{9n-5}{4n+6}$
7. $u_n = \left(\dfrac{n^2}{n+1}\right)^{n+1}$

Exercice 8.

Pour chacune des suites définies pour tout entier naturel n, calculer les trois termes suivant le premier.

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n - 4n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{1}{2n+1} \end{cases}$
3. $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_{n-1} - 2 \end{cases}$
4. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$
5. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + n \end{cases}$

Exercice 9. Calculatrice

Utiliser la calculatrice afin de faire afficher de la quatrième à la dixième valeur des deux suites suivantes définies sur $\mathbb{N}$.

1. $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = nu_n + 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = u_n^2 - (n+2) \end{cases}$

Exercice 10. Tableur

On souhaite calculer les termes d'une suite à l'aide d'un tableur.

1.

	A	B
1	n	u_n
2	0	3
3	1	=3* B2 +1
4	2	
5		

2.

	A	B
1	n	u_n
2	0	-1
3	1	= B2 + 2*A3
4	2	
5		

Pour chacune des feuilles de calcul, écrire la relation donnant u_{n+1} en fonction de u_n.

Exercice 11. Algorithme

On considère l'algorithme ci-contre définissant une suite (u_n) :

```
# Dans l'éditeur Python
def u(n):
        u = 1
        for i in range(1,n+1):
                u = (u - 1) / (u - 2)
```

1. Que renvoie l'instruction $(u(2)$?
2. Écrire une relation entre u_{n+1} et u_n.

Exercice 12.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

1. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \end{cases}$

2. $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$

Calculer u_1, v_1, u_2 et v_2.

Exercice 13.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2^n - 3$.

1. Calculer u_0, u_1, u_3 et u_5.

2.

2. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de n.

2. b. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

2. c. En déduire une définition de la suite (u_n) à l 'aide d 'une relation de récurrence.

Exercice 14. Un algorithme

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2\sqrt{2}$ et la fonction suivante permet de calculer le terme d'indice n de la suite pour un entier naturel n donné.

```
# Dans l'éditeur Python

from math import sqrt

def u(n):
        u = 2*sqrt2
        for i in range(1,n+1):
                u = u**2/2 - 4
        return u
```

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_6.

Partie II. Représentation graphique

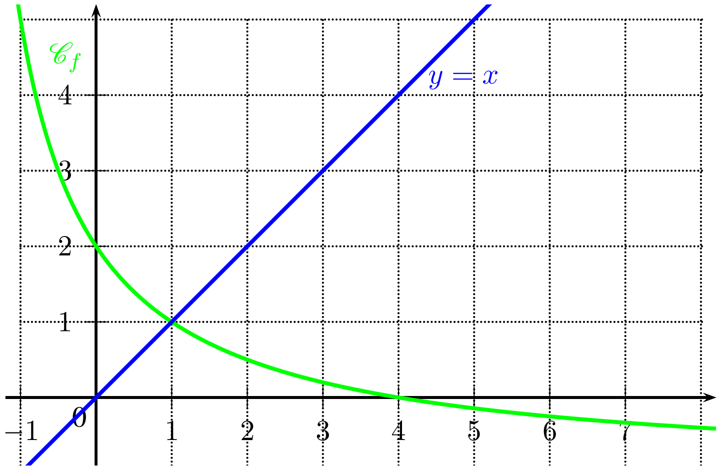
Exercice 15. Représentation graphique

Dans un repère orthonormé, on a représenté la fonction f définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{6}{x+2}-1$ et la droite d 'équation $y=x$.

On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

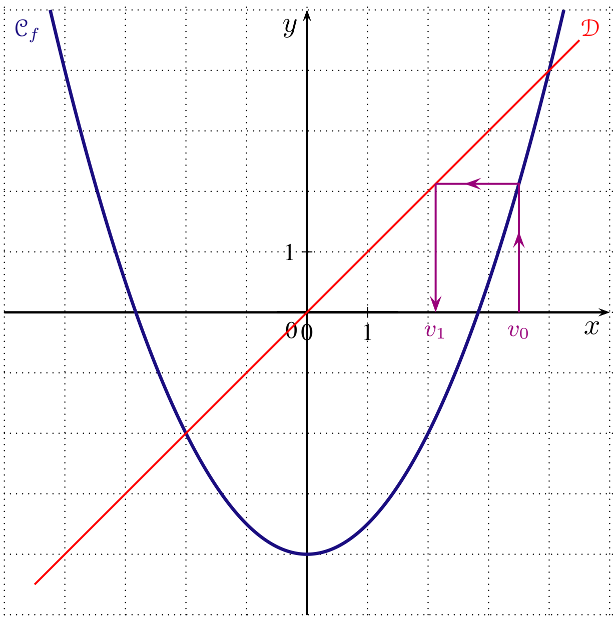
1. Reproduire et représenter les cinq premiers termes de la suite sur l 'axe des abscisses.

2. Émettre une conjecture sur le sens de variation de la suite, puis sur sa limite.



Exercice 16.

Soit (v_n) la suite définie par $v_0=\dfrac{7}{2}$ et pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=\dfrac{(v_n)^2}{2}-4$.
On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la parabole $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-4$ et la droite $\mathcal{D}$ d 'équation $y=x$.



1. On a représenté sur l 'axe des abscisses, les deux premiers termes de la suite (v_n).
En utilisant la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite $\mathcal{D}$ placer sur l 'axe des abscisses les termes v_2 à v_6.

2. La suite (v_n) est-elle monotone (c'est à dire croissante ou décroissante) ?

Partie III. Étude des variations

Méthode

Pour l'étude des variations d'une suite, 2 cas différents se posent selon la définition de la suite, mais la méthode reste la même, on étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.

1. La suite est définie par une relation explicite. On a souvent à factoriser par un nombre à la puissance n où à mettre des fractions au même dénominateur.

   Aide

   $$a^n \times a^p = a^{n+p}$$

2. La suite est définie par une relation de récurrence. Dans ce cas, on doit souvent utiliser une majoration ou minoration de u_n.

Exercice 17. Avec les suites définies par des relations explicites 1

Dans chacun des cas, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par :

1. $u_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ pour tout $n \geqslant 0$.
2. $u_n = \dfrac{3^n}{n}$ pour tout $n \geqslant 1$.
3. $u_n = n^2 - 3n + 12$ pour tout $n \geqslant 0$.
4. $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 18. Avec les suites définies par des relations explicites 2

Étudier le sens de variation des suites suivantes en comparant u_{n+1} et u_n

1. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{n}{n+1}$.
2. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = 5 \times 0,2^n + 3$.

Exercice 19. (c) Avec les suites définies par des relations de récurrence (c)

Méthode

Avec ces les suites définies par récurrence, on a souvent besoin d'une aide, d'un majorant ou d'un minorant.

1. Soit u la suite définie pour tout entier n par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

On admet que pour tout entier n, on a $u_n \geqslant 0$.
Étudier le sens de variation de u.

2. Soit v la suite définie pour tout entier n par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \end{cases}$$

Étudier le sens de variation de u.

3. Soit w la suite définie pour tout entier n par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} w_0 = 100 \\ w_{n+1} = 1,5w_n - 20 \end{cases}$$

3. a. Calculer les 3 premiers termes de la suite et faire une conjecture sur les variations.

3. b. On admet que pour tout entier n, on a $w_n \geqslant 50$.
Étudier le sens de variation de w.

4. Soit u la suite définie pour tout entier n par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = 0,9u_n + 5 \end{cases}$$

4. a. Calculer les 3 premiers termes de la suite et faire une conjecture sur les variations.

4. b. On admet que pour tout entier n, on a $u_n \geqslant 50$.
Étudier le sens de variation de u.

Partie IV. Bilan

Exercice 20. (c) Vrai ou faux

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant vos réponses. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de points.

1. Une suite est soit croissante, soit décroissante.

2. Une suite croissante est minorée.

3. Une suite croissante est toujours majorée.

4. Une suite croissante est parfois majorée.
Autre formulation : il existe des suites croissantes et majorées.

5. Une suite décroissante est toujours majorée.

6. Une suite décroissante est toujours minorée.

7. Une suite décroissante est parfois minorée.
Autre formulation : il existe des suites décroissantes et minorées.

8. Une suite ne peut pas être croissante et bornée.

9. Une suite ne peut pas être décroissante et bornée.

10. Une suite croissante et majorée est bornée.

11. Une suite décroissante et minorée est bornée.

Exercice 21. (c) D'après Bac - Asie - 2016 (c)

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20% en un jour. La société met en place le dispositif industriel suivant. Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus.
L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n). On a donc : $u_0 = 1000$.

1.

1. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

1. b. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2. On peut également utiliser l 'algorithme suivant écrit en langage Python pour répondre au problème de l'entreprise. Recopier et compléter cet algorithme.

```
def seuil():
    n = ....
    u = .....
    while .......:
        u = ........
        n = ........
    return n
```

3. À l 'aide de la calculatrice, vérifier la réponse au problème de l 'entreprise.

Exercice 22. (c) Culture de levures en bioréacteur

Une entreprise cultive des levures dans un bioréacteur. En milieu nutritif stable, la masse de levures augmente de $18\,\%$ par jour. Chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu ; durant cette opération, on perd 150 g de levures. Au départ, on introduit $1{,}2$ kg de levures dans la cuve. On modélise la masse (en grammes) par la suite (u_n) avec $u_0 = 1200$. L'objectif industriel est d'atteindre 20 kg de levures dans la cuve.

1.

1. a. Montrer que, pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} = 1{,}18\,u_n - 150.$$

1. b. On admet qu'à partir d'un certain rang on a $u_n \geq 1000$. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

1. c. Compléter l'algorithme qui renvoie le plus petit jour n tel que $u_n \geq 20000$ (soit 20 kg).

```
def jours_levures():
    n = ....
    u = .....
    while .......:
        u = ........
        n = ........
    return n, u
```

2. Déterminer (par calcul ou au script) le plus petit n tel que $u_n \geq 20000$. Donner aussi une valeur approchée de u_n à ce rang.

Exercice 23. (c) Gestion d'un capital financier (Première)

Un investisseur place un capital initial de 6000 euro sur un compte rémunéré. Chaque mois :

- le capital augmente de $2\,\%$;
- puis l'investisseur retire 100 euro.

On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 6000$, où u_n représente le capital (en euros) au début du n-ième mois.

1. Montrer que, pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} = 1{,}02\,u_n - 100.$$

2. Calculer u_1 et u_2.

3. (Variation) On **admet** que, pour tout entier n, on a $\boxed{u_n \geq 5000}$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. Point fixe et interprétation.

4. a. Résoudre $u = 1{,}02u - 100$ et donner le point fixe L.

4. b. Interpréter ce nombre L pour la dynamique de (u_n).

5. Programme Python. Écrire une fonction `u(n)` qui calcule u_n par itérations successives.

6. Liste des termes. Écrire une fonction `termes_u(n)` qui renvoie $[u_0, \ldots, u_n]$.

7. Seuil. Écrire une fonction `seuil(M)` qui renvoie le plus petit rang n tel que $u_n \geq M$.

8. Tableau de valeurs (calculatrice ou script). Compléter :

n	10	20	30	40	50
u_n (en euro)					

9. Atteindre un objectif. Déterminer le plus petit n tel que $u_n \geq 20000$. Donner aussi une valeur approchée de u_n à ce rang (calculatrice ou script).

Partie V. Python

Une liste : L

Une liste est une suite d'éléments numérotés dont le premier indice est 0. En Python, une liste s'écrit entre crochets [... , ..., ..., ...] avec les éléments séparés par des virgules.

- Le premier élément de la liste est L[0], le 2e est L[1], ...
- Une liste peut être écrite de manière explicite : L = ["Lundi", "Mardi","Mercredi"]
- Sa longueur est donnée par $len(L)$.
- Si les éléments de la liste sont comparables, le max. est donné par *max(L)*, le min. par *min(L)*
- L=[] permet de définir une liste vide.
- Si L est une liste, l'instruction *L.append(x)* va ajouter l'élémentt [x] à la liste L.

```
# Par exemple
>>> maliste=[31,'salut',78,'bonjour',2022,'NSI']
>>> maliste[0]
31
>>> maliste[1]
'salut'
>>> maliste[5]
'NSI'
>>> len(maliste)
6
>>> maliste.append('toto')
>>> maliste
[31,'salut',78,'bonjour',2022,'NSI','toto']
```

Exercice 24. Des TD sur les suites

Faire le TD1 sur les suites de la page : https://www.math93.com/lycee/premiere-es/algorithmes-en-1es.html

Exercice 25. (c) Voici les 3 exercices qu'il faut savoir faire

Compétences à maitriser

- Savoir écrire une fonction qui renvoie le terme d'indice n d'une suite définie par une relation de récurrence en utilisant une boucle while et une boucle range().
- Manipuler des listes
- Savoir écrire une fonction qui renvoie les termes d'indice 0 à n d'une suite dans une liste en utilisant une boucle while et une boucle range().
- Savoir écrire un algorithme de seuil.

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 + n \end{cases}$$

1. Écrire une fonction python $u(n)$ de paramètre n un entier et qui revoie le terme u_n de cette suite (*avec une boucle while et une boucle range()*).

2. Écrire une fonction python $termes\_u(n)$ de paramètre n un entier et qui revoie les termes u_0 à u_n de cette suite dans une liste (*avec une boucle while et une boucle range()*).

3. On admet que la suite u est croissante.
Écrire une fonction $seuil(M)$ de paramètre M et qui renvoie le rang du premier terme de la suite tel que $u_n \geqslant M$.

Réponses
https://vu.fr/Njfh

Partie VI. Corrections

Correction de l'exercice 19

1. Soit u la suite définie pour tout entier n par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

On admet que pour tout entier n, on a $u_n \geqslant 0$.
Étudier le sens de variation de u.

Corrigé

On considère la différence :

$$u_{n+1} - u_n = 2u_n - u_n = u_n.$$

Or, d'après la donnée, on a $u_n \geqslant 0$ pour tout n. Ainsi

$$u_{n+1} - u_n \;=\; u_n \;\geqslant\; 0.$$

De plus, comme $u_0 = 1 > 0$, on a $u_n > 0$ pour tout n, donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

2. Soit v la suite définie pour tout entier n par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = v_n - 5 \end{cases}$$

Étudier le sens de variation de v.

Corrigé

Pour tout n,

$$v_{n+1} - v_n = (v_n - 5) - v_n = -5 < 0.$$

Donc

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est strictement décroissante.}}$$

3. Soit w la suite définie pour tout entier n par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} w_0 = 100 \\ w_{n+1} = 1,5w_n - 20 \end{cases}$$

3. a. Calculer les 3 premiers termes de la suite et faire une conjecture sur les variations.

Corrigé

$$w_1 = 1{,}5 \times 100 - 20 = 150 - 20 = 130, \qquad w_2 = 1{,}5 \times 130 - 20 = 195 - 20 = 175,$$

$$w_3 = 1{,}5 \times 175 - 20 = 262{,}5 - 20 = 242{,}5.$$

Ainsi $w_0 = 100,\ w_1 = 130,\ w_2 = 175,\ w_3 = 242{,}5$. On observe une croissance terme à terme.

$$\boxed{\text{Conjecture : } (w_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

3. b. On admet que pour tout entier n, on a $w_n \geqslant 50$.
Étudier le sens de variation de w.

Corrigé

Pour tout n,

$$w_{n+1} - w_n = (1{,}5\,w_n - 20) - w_n = 0{,}5\,w_n - 20.$$

Or d'après la donnée, on a $w_n \geqslant 50$. Ainsi

$$0{,}5\,w_n \ \geqslant\ 0{,}5 \times 50 = 25 \quad \Longrightarrow \quad 0{,}5\,w_n - 20 \ \geqslant\ 25 - 20 = 5 > 0.$$

Donc $w_{n+1} - w_n > 0$ pour tout n et

$$\boxed{\text{La suite } (w_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

4. Soit u la suite définie pour tout entier n par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = 0,9u_n + 5 \end{cases}$$

4. a. Calculer les 3 premiers termes de la suite et faire une conjecture sur les variations.

Corrigé

$$u_1 = 0{,}9 \times 10 + 5 = 9 + 5 = 14, \qquad u_2 = 0{,}9 \times 14 + 5 = 12{,}6 + 5 = 17{,}6,$$
$$u_3 = 0{,}9 \times 17{,}6 + 5 = 15{,}84 + 5 = 20{,}84.$$

Les termes croissent visiblement.

$$\boxed{\text{Conjecture : } (u_n) \text{ est croissante.}}$$

4. b. On admet que pour tout entier n, on a $u_n \leqslant 50$.
Étudier le sens de variation de u.

Corrigé

On calcule la différence :

$$u_{n+1} - u_n = (0{,}9u_n + 5) - u_n = -0{,}1u_n + 5 = 0{,}1\,(50 - u_n).$$

Or, d'après la donnée, on a $u_n \leqslant 50$. On en déduit la chaîne d'implications :

$$u_n \leqslant 50 \implies 50 - u_n \geqslant 0 \implies 0{,}1\,(50 - u_n) \geqslant 0 \implies u_{n+1} - u_n \geqslant 0.$$

Ainsi, pour tout n,

$$u_{n+1} \geqslant u_n.$$

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est (strictement) croissante et majorée par 50.}}$$

Correction de l'exercice 20

Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant vos réponses. Une réponse non justifiée ne rapporte pas de points.

1. Une suite est soit croissante, soit décroissante.

Corrigé

$\boxed{\text{Faux.}}$ Contre-exemple : $u_n = (-1)^n$ oscille

$$1,\ -1,\ 1,\ -1, \ldots$$

Elle n'est ni croissante ni décroissante (pas monotone).

2. Une suite croissante est minorée.

Corrigé

$\boxed{\text{Vrai.}}$ Si (u_n) est croissante, alors $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n. En particulier, pour tout n, on a $u_n \geq u_0$. Donc u_0 est une borne inférieure : (u_n) est minorée.

3. Une suite croissante est toujours majorée.

Corrigé

$\boxed{\text{Faux.}}$ Contre-exemple : $u_n = n$ est croissante et non majorée (tend vers $+\infty$).

4. Une suite croissante est parfois majorée.
Autre formulation : il existe des suites croissantes et majorées.

Corrigé

$\boxed{\text{Vrai.}}$ Exemple : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ (pour $n \geq 1$) est croissante et $u_n \leq 1$. Elle est donc majorée (par 1).

5. Une suite décroissante est toujours majorée.

Corrigé

$\boxed{\text{Vrai.}}$ Si (v_n) est décroissante, alors $v_{n+1} \leq v_n$ pour tout n. Donc, pour tout n, $v_n \leq v_0$. Ainsi v_0 est une borne supérieure : (v_n) est majorée.

6. Une suite décroissante est toujours minorée.

Corrigé

$\boxed{\text{Faux.}}$ Contre-exemple : $v_n = -n$ est décroissante et n'est pas minorée (tend vers $-\infty$).

7. Une suite décroissante est parfois minorée.
Autre formulation : il existe des suites décroissantes et minorées.

Corrigé

$\boxed{\text{Vrai.}}$ Exemple : $v_n = \dfrac{1}{n}$ (pour $n \geq 1$) est décroissante et $v_n \geq 0$. Elle est donc minorée (par 0).

8. Une suite ne peut pas être croissante et bornée.

Corrigé

$\boxed{\text{Faux.}}$ Contre-exemple : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ est croissante et bornée (par 1).

9. Une suite ne peut pas être décroissante et bornée.

Corrigé

$\boxed{\text{Faux.}}$ Contre-exemple : $v_n = \dfrac{1}{n}$ est décroissante et bornée ($0 \leq v_n \leq 1$).

10. Une suite croissante et majorée est bornée.

Corrigé

$\boxed{\text{Vrai.}}$ Si (u_n) est croissante et $u_n \leq M$, alors $u_n \geq u_0$ et $u_n \leq M$ pour tout n. Elle est donc bornée (à la fois minorée et majorée).

11. Une suite décroissante et minorée est bornée.

Corrigé

$\boxed{\text{Vrai.}}$ Si (v_n) est décroissante et $v_n \geq m$, alors $v_n \leq v_0$ et $v_n \geq m$ pour tout n. Elle est donc bornée.

Correction de l'exercice 21

Une société produit des bactéries pour l'industrie. En laboratoire, il a été mesuré que dans un milieu nutritif approprié, la masse de ces bactéries, mesurée en grammes, augmente de 20% en un jour. La société met en place le dispositif industriel suivant. Dans une cuve de milieu nutritif, on introduit initialement 1 kg de bactéries. Ensuite, chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu nutritif contenu dans la cuve. Durant cette opération, 100 g de bactéries sont perdus. L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries.
On modélise l'évolution de la population de bactéries dans la cuve par la suite (u_n). On a donc : $u_0 = 1000$.

1.

1. a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

Corrigé

On appelle u_n la masse, en gramme, des bactéries présentes dans la cuve, et n représente le nombre de jours depuis le début du processus. On a donc $u_0 = 1\,000$ puisque initialement, on introduit 1 kg soit 1 000 grammes de bactéries.

D'un jour à l'autre, le nombre de bactéries augmente de 10 %, c'est donc qu'il est multiplié par $1 + \dfrac{20}{100} = 1,2$. Chaque jour, en remplaçant le milieu nutritif, on perd 100 grammes de bactéries.
Donc, pour tout n,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 1,2\,u_n - 100 \\ u_0 = 1\,000 \end{cases}$$

1. b. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1000$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Corrigé

Pour tout entier n on a :

$$u_{n+1} - u_n = 1,2\,u_n - 100 - u_n = 0,2\,u_n - 100$$

Or, pour tout entier n,

$$u_n \geqslant 1\,000 \Longrightarrow 0,2\,u_n \geqslant 200$$

et donc $0,2\,u_n - 100 \geqslant 100$
On a donc démontré que, pour tout n, $u_{n+1} - u_n > 0$.
On peut donc dire que la suite (u_n) est croissante.

2. On peut également utiliser l 'algorithme suivant écrit en langage Python pour répondre au problème de l'entreprise. Recopier et compléter cet algorithme.

Corrigé

```
def seuil():
        u = 1000
        n = 0
        while u <= 30000:
                u = 1.2*u - 100
                n = n+1
        return n
```

3. À l'aide de la calculatrice, vérifier la réponse au problème de l'entreprise.

Corrigé

On obtient :

n	u_n
21	23502,55995
22	28103,07195
23	33623,68633

L'entreprise se fixe pour objectif de produire 30 kg de bactéries. Puisque la suite est croissante, on sait donc qu'elle atteindra son objectif le 23e jour.

Correction de l'exercice 22

Une entreprise cultive des levures dans un bioréacteur. En milieu nutritif stable, la masse de levures augmente de $18\,\%$ par jour. Chaque jour, à heure fixe, on remplace le milieu ; durant cette opération, on perd 150 g de levures. Au départ, on introduit $1{,}2$ kg de levures dans la cuve. On modélise la masse (en grammes) par la suite (u_n) avec $u_0 = 1200$. L'objectif industriel est d'atteindre 20 kg de levures dans la cuve.

1. **1. a.** Montrer que, pour tout entier n, on a :

$$u_{n+1} = 1{,}18\,u_n - 150.$$

Corrigé

Chaque jour : croissance de $18\,\%$ (multiplication par $1{,}18$), puis perte de 150 g. Donc, si la masse au jour n est u_n, alors au jour suivant :

$$\boxed{u_{n+1} = 1{,}18\,u_n - 150.}$$

1. b. On admet qu'à partir d'un certain rang on a $u_n \geq 1000$. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

Corrigé

$$u_{n+1} - u_n = (1{,}18u_n - 150) - u_n = 0{,}18u_n - 150.$$

Sous l'hypothèse $u_n \geqslant 1000$:

$$u_n \geqslant 1000 \implies 0{,}18u_n \geqslant 180 \implies 0{,}18u_n - 150 \geqslant 30 > 0.$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$ et par conséquent

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

Remarque : le point fixe est $L = \dfrac{150}{0{,}18} \approx 833{,}33$. Comme $u_0 = 1200 > L$, la suite est en fait croissante dès le rang 0.

1. c. Compléter la fonction Python renvoyant le couple (n, u) quand le seuil 20 kg est atteint.

```
def jours_levures():
    n = ....
    u = .....
    while .......:
        u = ........
        n = ........
    return n, u
```

Corrigé

```
def jours_levures():
  n = 0
  u = 1200.0
  while u < 20000.0:
    u = 1.18*u - 150.0
    n += 1
  return n, u
```

2. Déterminer (par calcul ou au script) le plus petit n tel que $u_n \geq 20000$. Donner aussi une valeur approchée de u_n à ce rang.

Corrigé

On utilise uniquement la calculatrice pour itérer la récurrence

$$u_{n+1} = 1{,}18\,u_n - 150 \quad \text{avec} \quad u_0 = 1200,$$

et on remplit un tableau de valeurs jusqu'à dépasser 20000 g.

n	20	21	22	23	24
u_n (en g)	10877,45	12685,39	14818,76	17336,13	20306,64

On observe que $u_{23} \approx 17336{,}13 < 20000$ et $u_{24} \approx 20306{,}64 \geq 20000$.
Or, d'après la question 1.b, la suite (u_n) est **strictement croissante**. Ainsi, dès que le seuil est franchi, il le reste ensuite ; le plus petit rang satisfaisant $u_n \geq 20000$ est donc le premier où l'inégalité est vraie.

$$\boxed{n_{\min} = 24} \quad \text{et} \quad \boxed{u_{24} \approx 20306{,}64 \text{ g} \approx 20{,}31 \text{ kg.}}$$

Correction de l'exercice 24

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = 2u_n - 5 + n \end{cases}$$

1. Écrire une fonction python `u(n)` de paramètre n un entier et qui revoie le terme u_n de cette suite (*avec une boucle while et une boucle range()*).

Corrigé

Avec une boucle `while` :

```
def u(n):
  k = 0
  val = 10
  while k < n:
    val = 2*val - 5 + k
    k += 1
  return val
```

Avec une boucle `for range()` :

```
def u(n):
  val = 10
  for k in range(n):
    val = 2*val - 5 + k
  return val
```

2. Écrire une fonction python `termes_u(n)` de paramètre n un entier et qui revoie les termes u_0 à u_n de cette suite dans une liste (*avec une boucle while et une boucle range()*).

Corrigé

Avec une boucle `while` :

```
def termes_u(n):
  L = [10]
  k = 0
  while k < n:
    val = 2*L[-1] - 5 + k
    L.append(val)
    k += 1
  return L
```

Avec une boucle `for range()` :

```
def termes_u(n):
  L = [10]
  for k in range(n):
    val = 2*L[-1] - 5 + k
    L.append(val)
  return L
```

3. On admet que la suite u est croissante.
Écrire une fonction `seuil(M)` de paramètre M et qui renvoie le rang du premier terme de la suite tel que $u_n \geqslant M$.

Corrigé
On construit la suite tant que $u_n < M$:

```
def seuil(M):
  n = 0
  val = 10
  while val < M:
    val = 2*val - 5 + n
    n += 1
  return n
```

Ainsi, la fonction renvoie le premier rang n tel que $u_n \geqslant M$. La croissance de la suite garantit que ce rang est bien défini et unique.

Exercice 26. Correction de l'exercice

Un investisseur place un capital initial de 6000 euro sur un compte rémunéré. Chaque mois :

- le capital augmente de $2\,\%$;
- puis l'investisseur retire 100 euro.

On note (u_n) la suite définie par $u_0 = 6000$, où u_n représente le capital (en euros) au début du n-ième mois.

1. **Montrer que, pour tout entier n, on a :**

$$u_{n+1} = 1{,}02\,u_n - 100.$$

Corrigé
Chaque mois : +2% signifie multiplication par 1,02, puis retrait de 100 euro. Donc, si au mois n on a u_n, alors au mois $n+1$:

$$\boxed{u_{n+1} = 1{,}02\,u_n - 100.}$$

2. **Calculer u_1 et u_2.**

Corrigé

$$u_1 = 1{,}02 \times 6000 - 100 = 6120 - 100 = 6020, \qquad u_2 = 1{,}02 \times 6020 - 100 = 6140{,}4 - 100 = 6040{,}4.$$

3. (Variation) On **admet** que, pour tout entier n, on a $\boxed{u_n \geq 5000}$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Corrigé

On étudie

$$u_{n+1} - u_n = (1{,}02\, u_n - 100) - u_n = 0{,}02\, u_n - 100 = 0{,}02\,(u_n - 5000).$$

Or, par donnée, $u_n \geq 5000$, donc

$$0{,}02\,(u_n - 5000) \;\geq\; 0 \quad \Longrightarrow \quad u_{n+1} - u_n \geq 0.$$

De plus, comme $u_0 = 6000 > 5000$, on a en pratique $u_n > 5000$ pour tout n, d'où $u_{n+1} - u_n > 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

4. Point fixe et interprétation.

4. a. Résoudre $u = 1{,}02u - 100$ et donner le point fixe L.

4. b. Interpréter ce nombre L pour la dynamique de (u_n).

Corrigé

$$u = 1{,}02u - 100 \iff -0{,}02u = -100 \iff u = \frac{100}{0{,}02} = 5000.$$

$$\boxed{L = 5000.}$$

Interprétation : si le capital était exactement 5000 euro avant l'opération mensuelle, il resterait 5000 euro le mois suivant (équilibre). Comme ici $u_0 = 6000 > L$ et que (u_n) est croissante, la suite s'éloigne de L et augmente indéfiniment.

5. Programme Python. Écrire une fonction `u(n)` qui calcule u_n par itérations successives.

Corrigé

```
def u(n):
  val = 6000.0
  for k in range(n):
    val = 1.02*val - 100.0
  return val
```

6. Liste des termes. Écrire une fonction `termes_u(n)` qui renvoie $[u_0, \ldots, u_n]$.

Corrigé

```
def termes_u(n):
  L = [6000.0]
  for k in range(n):
    L.append(1.02*L[-1] - 100.0)
  return L
```

7. **Seuil.** Écrire une fonction `seuil(M)` qui renvoie le plus petit rang n tel que $u_n \geq M$.

Corrigé

```
def seuil(M):
  n = 0
  val = 6000.0
  while val < M:
    val = 1.02*val - 100.0
    n += 1
  return n
```

La croissance prouvée à la question 3 garantit l'existence et l'unicité du plus petit rang.

8. **Tableau de valeurs (calculatrice ou script).** Compléter :

n	10	20	30	40	50
u_n (en euro)					

Corrigé

Valeurs indicatives (arrondies) obtenues par itérations :

$$u_{10} \approx 6218, \quad u_{20} \approx 6460, \quad u_{30} \approx 6717, \quad u_{40} \approx 6991, \quad u_{50} \approx 7283.$$

(Remarque : les valeurs croissent lentement mais sûrement.)

9. **Atteindre un objectif.** Déterminer le plus petit n tel que $u_n \geq 20000$. Donner aussi une valeur approchée de u_n à ce rang (calculatrice ou script).

Corrigé

Par itérations (ou avec la fonction `seuil`), on trouve :

$$\boxed{n_{\min} = \text{(par exemple)}\ \ 205 \text{ (ordre de grandeur)}}$$

et une valeur approchée au rang obtenu (ex. $u_{205} \approx 20043$ euro).
(Le grand nombre de mois vient du faible taux net effectif après retrait.)