Math93.com

TD 2 - Première Spécialité Maths
Suites - Partie 2

Les exercices dont l'intitulé est suivi du symbole (c) sont intégralement corrigés en fin de TD.

Table des matières

Partie I. Les suites Arithmétiques

Exercice 1. Terme général

Pour chacune des suites suivantes, calculer u_{20}.

1. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 3$ et telle que $u_7 = 12$.
2. La suite (u_n) est arithmétique de raison $r = 5$ et telle que $u_{25} = 17$.
3. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 7 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. La suite (u_n) est définie par $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - 4 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. (c) Arithmétique ou pas

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques.
Si oui, donner le premier terme et la raison.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n+5}{n+1}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{-3n+5}{8}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^2+4n+3}{n+3}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$.

Exercice 3. Un placement

Paul place une somme de \$ 1 000 au taux simple annuel de 5 % ; c'est-à-dire que chaque année, la somme placée augmentera de 5 % de la somme initiale.
Pour tout entier naturel n, u_n désigne le capital de Paul n années après son placement.

1. Déterminer u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Démontrer que la suite (u_n) est arithmétique. Donner sa raison et son premier terme u_0.
4. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
5. Au bout de combien d'années le capital de Paul aura-t-il doublé ?

Exercice 4.

À chaque fois, on donne deux termes d'une suite arithmétique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.
Déterminer la raison et le premier terme puis exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. $u_3 = 4$ et $u_8 = 24$.

2. $u_5 = \dfrac{7}{4}$ et $u_9 = \dfrac{1}{4}$.

3. $u_{13} = 16$ et $u_{32} = -7$.

4. $u_{50} = 159$ et $u_{100} = 309$.

Exercice 5. Somme de termes consécutifs

Calculer les sommes suivantes.

1. $S = 1 + 2 + 3 + ... + 73$.
2. $T = 1 + 4 + 7 + ... + 40$.
3. $U = 71 + 72 + 73 + ... + 100$.
4. $V = 2 + 4 + 6 + ... + 50$.

Exercice 6. Python

Une famille décide d'épargner afin de pouvoir s'offrir un voyage en Égypte.
La première année, elle économise \$ 500. Chaque année, elle augmente la somme épargnée de \$100.
Pour $n \geqslant 1$, on note s_n la somme épargnée l'année n.

1. Déterminer s_1, s_2 et s_3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer s_{n+1} en fonction de s_n.

2. En déduire l'expression de s_n en fonction de l'entier naturel $n \geqslant 1$.

3. Déterminer dans combien d'années la famille pourra partir en voyage sachant que le voyage coûte \$ 4 200.

4.

4. a. Écrire une fonction Python qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la liste des n premiers termes de la suite (s_n).

4. b. Écrire une fonction Python qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la somme des n premiers termes de la suite (s_n).

Partie II. Les suites Géométriques

Exercice 7. Terme général

Pour chacune des suites suivantes, calculer v_{20}.

1. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 3$ et telle que $v_3 = 12$.
2. La suite (v_n) est géométrique de raison $q = -2$ et telle que $v_{31} = 32$.
3. La suite (v_n) est définie par $\begin{cases} v_0 = -5 \\ v_{n+1} = 2v_n \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.
4. La suite (v_n) est définie par $\begin{cases} v_1 = 2\,048 \\ v_{n+1} = -\dfrac{1}{2}v_n \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Géométrique ou pas

Déterminer si les suites suivantes sont géométriques.
Si oui, donner le premier terme et la raison.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{4^n}{3^{n+1}}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-7)^n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 5n + 2^n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{3^n}$.

Exercice 9. Avec 2 termes

À chaque fois, on donne deux termes d'une suite géométrique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$.
Déterminer la raison et le premier terme puis exprimer v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. $v_3 = 6$ et $v_8 = 1\,458$.
2. $v_6 = -18$ et $v_{12} = -\dfrac{9}{32}$.
3. $v_{10} = 15$ et $u_{15} = 46\,875$.
4. $v_{21} = 65\,536$ et $v_{23} = 262\,144$.

Exercice 10. Une application

Afin de greffer 10 cm^2 de peau à une personne brûlée, on lui prélève 20 mm^2. La culture permet d'augmenter de 15 % la surface de peau chaque jour.

1. Calculer la surface de peau les deuxième et troisième jours.
2. Pour tout entier naturel n, v_n modélise la surface de peau le jour n.
   Écrire une relation entre v_{n+1} et v_n.
3. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
4. Donner l'expression de v_n en fonction de n.
5. Dans combien de jours pourra se faire la greffe de peau ?

Exercice 11. Somme de termes

Calculer les sommes suivantes.

1. $S = 1 + 4 + 16 + ... + 262\,144$.
2. $T = 3 - 6 + 12 - 24 + ... + 192$.
3. $U = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{729}$.
4. $V = 1 + 0,5 + 0,25 + ... + 0,031$.

Exercice 12. Python au bac : Centres Étrangers 2023 sujet 2

On pose

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{100}$$

Parmi les scripts Python ci-dessous, celui qui permet de calculer la somme S est :

a.

```
def somme_a() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S=1/(k+1)
    return S
```

b.

```
def somme_b() :
    S = 0
    for k in range(100) :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

c.

```
def somme_c() :
    k = 0
    while S < 100 :
        S = S+1/(k+1)
    return S
```

d.

```
def somme_d() :
    k = 0
    while k < 100 :
        S = S + 1/(k + 1)
    return S
```

Partie III. Les suites Arithmético-géométriques

Exercice 13. (c)

Les suites (u_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 500 \\ u_{n+1} & = 1{,}4 \times u_n - 12 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (w_n) : \begin{cases} w_0 & \\ w_n & = u_n - 30 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes des deux suites.
2. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique.
3. Soit n un nombre entier naturel, exprimer (w_n) en fonction de n.
4. Démontrer que pour tout entier n on a : $u_n = 470 \times (1{,}4)^n + 30$.

Exercice 14. (c)

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 100 \\ a_{n+1} & = 0{,}6 \times a_n + 50 \end{cases} \qquad \Bigg| \qquad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n & = a_n - 125 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes des deux suites.
2. Démontrer que la suite (b_n) est géométrique.
3. Soit n un nombre entier naturel, exprimer (b_n) en fonction de n.
4. Démontrer que pour tout entier n on a : $a_n = -25 \times (0{,}6)^n + 125$.

Exercice 15. (c)

Les suites (c_n) et (d_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(c_n) : \begin{cases} c_0 & = 5 \\ c_{n+1} & = 1{,}1 \times c_n + 4 \end{cases} \qquad \Big| \qquad (d_n) : \begin{cases} d_0 & \\ d_n & = -c_n - 40 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes des deux suites.
2. Démontrer que la suite (d_n) est géométrique.
3. Soit n un nombre entier naturel, exprimer (d_n) en fonction de n.
4. Démontrer que pour tout entier n on a : $c_n = 45 \times (1{,}1)^n - 40$.

Exercice 16. (c)

Les suites (s_n) et (t_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(s_n) : \left\{ \begin{array}{ll} s_0 & = 100 \\ s_{n+1} & = 0{,}9 \times s_n + 50 \end{array} \right. \quad \Bigg| \quad (t_n) : \left\{ \begin{array}{ll} t_0 & \\ t_n & = -s_n + 500 \end{array} \right.$$

1. Calculer les trois premiers termes des deux suites.
2. Démontrer que la suite (t_n) est géométrique.
3. Soit n un nombre entier naturel, exprimer (t_n) en fonction de n.
4. Démontrer que pour tout entier n on a : $s_n = -400 \times (0{,}9)^n + 500$.

Exercice 17. (c) Expression générale d'une suite arithmético-géométrique (c)

1. Les suites (u_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_1 & = 10 \\ u_{n+1} & = 2 \times u_n - 1 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (w_n) : \begin{cases} w_1 & \\ w_n & = u_n - 1 \end{cases}$$

1. a. Montrer que la suite (w_n) est géométrique puis que :

$$\forall n \geqslant 1 \; ; \; u_n = 9 \times (2)^{n-1} + 1$$

1. b. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$u_n = 4,5 \times 2^n + 1$$

Remarque Point Bac

Il est souvent demandé d'exprimer le terme général de la suite sous la forme $u_n = a \times q^n + b$. On utilise pour cela les propriétés de la fonction puissance. Pour n et p entiers (et q non nul) on a

$$q^{n-p} = q^n \times q^{-p} = \frac{q^n}{q^p}$$

2. Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = -5 \\ a_{n+1} & = 0.8 \times a_n + 2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n & = -a_n + 10 \end{cases}$$

Montrer que la suite (b_n) est géométrique puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; a_n = -15 \times (0{,}8)^n + 10$$

3. Les suites (c_n) et (d_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(c_n) : \begin{cases} c_2 & = 10000 \\ c_{n+1} & = 0.5 \times c_n - 300 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (d_n) : \begin{cases} d_2 & \\ d_n & = c_n + 600 \end{cases}$$

Montrer que la suite (d_n) est géométrique puis que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$c_n = 42\,400 \times 0,5^n - 600$$

Partie IV. Bilan

Remarque

Dans les exercices suivants, les questions précédées de la mention ► **Terminale** ◄ peuvent être admises pour traiter la suite de l'exercice.
Vous pouvez cependant les traiter par conjecture avec la calculatrice.

Exercice 18. (c) D'après Bac ES

A l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de 1 500 m^2 entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m^2 et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à -dire à l'automne $2010 + n$. On a donc $u_0 = 1\,500$.

1. Calculer u_1.

2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = u_n - 250$.

3. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

3. b. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n$.

3. c. Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?

4. *La suite de cet exercice demande des notions sur les limites et sur la fonction* ln *mais ces deux questions peuvent être traitées en première par conjecture à l'aide de la calculatrice.*

4. a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

4. b. Déterminer à l'aide de la calculatrice la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que :

$$250 + 1\,250 \times 0,8^n < 500$$

Interpréter le résultat obtenu.

4. c. Compléter l'algorithme pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.

```
def suite():
    n = 0
    u = 1500
    while ...................:
        n = ............
        u = ............
    return n
```

Exercice 19. (c) D'après bac 2024 : Polynésie jour 1

L'objectif de cet exercice est de conjecturer en partie A puis de démontrer en partie B le comportement d'une suite.
Les deux parties peuvent cependant être traitées de manière indépendante.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{4}{5 - u_n}.$$

Partie A

1. Recopier et compléter la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = ...
    for i in range(n) :
        ...
    return u
```

2. L'exécution de `suite(2)` renvoie 1.3333333333333333.
   Effectuer un calcul pour vérifier et expliquer cet affichage.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Exercice 20. (c) Avec des Probabilités - Bac 2023 - Centres étrangers groupe I sujet 1

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

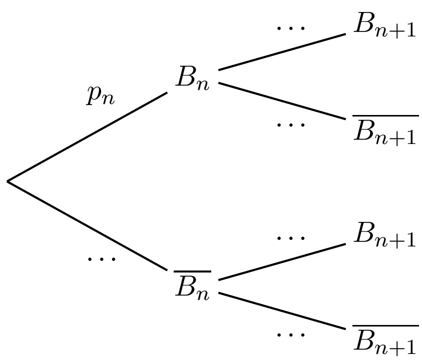
On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

4.

4. a. ► **Terminale** ◄ Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$.
(*On pourra admettre ce résultat en 1re*).

4. b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?

5.

5. a. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

5. b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.

5. c. ► **Terminale** ◄ En déduire la limite de la suite (p_n).
(*Traiter cette question à l'aide de la calculatrice en 1re*).

Exercice 21. (c) D'après Bac 2023 : Python et suites arithmétiques : Nouvelle-Calédonie 29 août 2023 Jour 2.

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2. Conjecturer avec la calculatrice le comportement de la suite (u_n).

3. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
        u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n-1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

4. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

4. a. Donner v_0.

4. b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

4. c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

4. d. ► **Terminale** ◄ Déterminer la limite de la suite (u_n).
(*Traiter cette question à l'aide de la calculatrice en 1re*).

Exercice 22. (c) D'après Bac 2023 : Nouvelle-Calédonie 28 août 2023 Jour 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1.

1. a. Démontrer que $u_1 = 12$.

1. b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.

1. c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).

2.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n + 1.$$

2. b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

3. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
Donner sa raison et son premier terme v_0.

3. b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

3. c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

3. d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.

4. a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.

4. b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

Exercice 23. D'après Bac Asie 2023 - Sujet 2 - Exercice 3

Marie Sklodowska-Curie $(1867 - 1934)$ *est une physicienne (mais aussi chimiste et mathématicienne), polonaise naturalisée française.*
Deux Prix Nobel lui ont été décernés : un en Physique (partagé avec son mari et Henri Becquerel) en 1903 *et un en Chimie en* 1911 *pour la découverte de deux nouveaux éléments, le polonium (nom donné en hommage à ses origines) et le radium.*

On décide d'étudier le rayonnement radioactif du polonium lors de la désintégration des noyaux atomiques au cours du temps.
Au début de l'expérience, on dispose d'un morceau de 2 g de polonium.
On sait que 1 g de polonium contient 3×10^{21} noyaux atomiques.
On admet que, au bout de 24 heures, $0,5\,\%$ des noyaux se sont désintégrés et que, pour compenser cette disparition, on ajoute alors $0,005$ g de polonium.
On modélise la situation à l'aide d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$; on note v_0 le nombre de noyaux contenus dans le polonium au début de l'expérience.
Pour $n \geqslant 1,\ v_n$ désigne le nombre de noyaux contenus dans le polonium au bout de n jours écoulés.

1.

1. a. Vérifier que $v_0 = 6 \times 10^{21}$.

1. b. Expliquer que, pour tout nombre entier naturel n, on a

$$v_{n+1} = 0,995 v_n + 1,5 \times 10^{19}.$$

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$u_n = v_n - 3 \times 10^{21}.$$

2. a. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $0,995$.

2. b. En déduire que, pour tout entier naturel $n,\ v_n = 3 \times 10^{21}\,(0,995^n + 1)$.

3. Déterminer, par le calcul, au bout de combien de jours le nombre de noyaux de polonium sera inférieur à $4,5 \times 10^{21}$. Justifier la réponse.

4. On souhaite disposer de la liste des termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Pour cela, on utilise une fonction appelée noyaux programmée en langage Python et retranscrite partiellement ci-après.

```
1  def noyaux(n) :
2      V = 6*10**21
3      L = [V]
4      for k in range (n) :
5          V = ...
6          L.append(V)
7      return L
```

4. a. À la lecture des questions précédentes, proposer deux solutions différentes pour compléter la ligne 5 de la fonction noyaux afin qu'elle réponde au problème.

4. b. Pour quelle valeur de l'entier n la commande noyaux(n) renverra-t-elle les relevés quotidiens du nombre de noyaux contenus dans l'échantillon de polonium pendant 52 semaines d'étude ?

Exercice 24. D'après Bac 2024 : Métropole Jour 2 (Partie A)

Alain possède une piscine qui contient $50\ \mathrm{m}^3$ d'eau. On rappelle que $1\ \mathrm{m}^3 = 1\,000\ \mathrm{L}$.
Pour désinfecter l'eau, il doit ajouter du chlore.
Le taux de chlore dans l'eau, exprimé en $\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$, est défini comme la masse de chlore par unité de volume d'eau.
Les piscinistes préconisent un taux de chlore compris entre 1 et $3\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$.
Sous l'action du milieu ambiant, notamment des ultraviolets, le chlore se décompose et disparaît peu à peu.
Alain réalise certains jours, à heure fixe, des mesures avec un appareil qui permet une précision à $0,01\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$. Le mercredi 19 juin, il mesure un taux de chlore de $0,70\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$.

Partie A : étude d'un modèle discret.

Pour maintenir le taux de chlore dans sa piscine, Alain décide, à partir du jeudi 20 juin, d'ajouter chaque jour une quantité de $15\ \mathrm{g}$ de chlore. On admet que ce chlore se mélange uniformément dans l'eau de la piscine.

1. Justifier que cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0,3\,\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$.

2. Pour tout entier naturel n, on note v_n le taux de chlore, en $\mathrm{mg} \cdot \mathrm{L}^{-1}$, obtenu avec ce nouveau protocole n jours après le mercredi 19 juin. Ainsi $v_0 = 0,7$.
On admet que pour tout entier naturel n,

$$v_{n+1} = 0,92v_n + 0,3.$$

2. a. ► **Terminale** ◄ Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad v_n \leqslant v_{n+1} \leqslant 4$.

2. b. ► **Terminale** ◄ Montrer que la suite (v_n) est convergente et calculer sa limite.

3. À long terme, le taux de chlore sera-t-il conforme à la préconisation des piscinistes ? Justifier la réponse.

4. Reproduire et compléter l'algorithme ci-après écrit en langage Python pour que la fonction `alerte_chlore` renvoie, lorsqu'il existe, le plus petit entier n tel que $v_n > s$.

```
def alerte_chlore(s) :
    n = 0
    u = 0.7
    while ... :
        n = ...
        u = ...
    return n
```

5. Quelle valeur obtient-on en saisissant l'instruction `alerte_chlore(3)` ? Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 25. (c) Bac ES 2014 Antilles, Guyane - Obligatoire — 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Un opérateur de téléphonie mobile constate que, chaque année, il perd 8 % de ses précédent abonnés et que, par ailleurs, il gagne 3 millions de nouveaux abonnés.
En 2013 le nombre d'abonnés est de 20 millions.
On s'intéresse au nombre d'abonnés, en millions, pour l'année $2013+n$. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\begin{cases} u_0 & = & 20 \\ u_{n+1} & = & 0,92u_n + 3. \end{cases}$$

Le terme u_n donne une estimation du nombre d'abonnés pour l'année $2013 + n$.

Partie A

1.

1. a. En utilisant cette modélisation, l'opérateur décide d'arrondir les résultats à 10^{-3}.
A quoi correspond ce choix d'arrondi ?

1. b. Déterminer le nombre d'abonnés en 2014 et en 2015.
On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 37,5$ pour tout entier naturel n.

2. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92. Préciser son premier terme.

3. Exprimer v_n en fonction de n.
En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = -17,5 \times 0,92^n + 37,5$.

4. Déterminer le nombre d'abonnés en millions en 2020. Arrondir les résultats à 10^{-3}.

Partie B

Compte tenu des investissements, l'opérateur considère qu'il réalisera des bénéfices lorsque le nombre d'abonnés dépassera 25 millions.

1. Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2013 pour que l'opérateur fasse des bénéfices.

```
def suite():
    n = 0
    u = 20
    while ...................:
        n = ............
        u = ............
    return ...........
```

2. *(Question supplémentaire) Montrer que la suite (u_n) est croissante.*

3. En quelle année l'opérateur fera-t-il des bénéfices pour la première fois ?

Exercice 26. (c) Bac ES 2014 Centres Etrangers - Obligatoire 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Dans une ville, un nouveau lycée vient d'ouvrir ses portes et accueille pour sa première rentrée 500 élèves. D'une année sur l'autre, le proviseur du lycée prévoit une perte de 30 % de l'effectif et l'arrivée de 300 nouveaux élèves.
On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année $2013 + n$, avec n entier naturel. On a donc $u_0 = 500$.

1. **1. a.** Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2014.

1. b. Calculer Je nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2015.

2. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 300$.

3. On souhaite, pour un entier n donné, afficher tous les termes de la suite (u_n) du rang 0 au rang n.
Lequel des trois algorithmes suivants permet d'obtenir le résultat souhaité ? Justifier.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
n, i entiers naturels,	n, i entiers naturels,	n, i entiers naturels,
u nombre réel	u nombre réel	u nombre réel
Début algorithme	**Début algorithme**	**Début algorithme**
Lire n	Lire n	Lire n
u prend la valeur 500	u prend la valeur 500	u prend la valeur 500
Pour i allant de 1 à n	Pour i allant de 1 à n	Pour i allant de 1 à n
Afficher u	Afficher u	u prend la valeur $0,7 \times u + 300$
u prend la valeur $0,7 \times u + 300$	u prend la valeur $0,7 \times u + 300$	Fin Pour
Fin Pour	Fin Pour	Afficher u
	Afficher u	
Fin algorithme	**Fin algorithme**	**Fin algorithme**

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1\,000$.

4. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,7$.

4. b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,000 - 500 \times 0,7^n$.

5.

5. a. ► **Terminale** ◄ Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n \geqslant 990$.
(*Traiter cette question à l'aide de la calculatrice en 1re*).

5. b. Interpréter le résultat trouvé précédemment.

Exercice 27. (c) D'après Bac ES/L 2016 de Pondichéry - 21 Avril 2016 (5 points)

Remarque : Cet exercice est l'exercice 4 du sujet des candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

En janvier 2016, une personne se décide à acheter un scooter coûtant 5 700 euros sans apport personnel. Le vendeur lui propose un crédit à la consommation d'un montant de 5 700 euros, au taux mensuel de 1,5 %. Par ailleurs, la mensualité fixée à 300 euros est versée par l'emprunteur à l'organisme de crédit le 25 de chaque mois. Ainsi, le capital restant dû augmente de 1,5 % puis baisse de 300 euros. Le premier versement a lieu le 25 février 2016. On note u_n le capital restant dû en euros juste après la n-ième mensualité (n entier naturel non nul). On convient que $u_0 = 5\,700$. Les résultats seront donnés sous forme approchée à $0,01$ près si nécessaire.

1. **1. a.** Démontrer que u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.

1. b. Calculer u_2.

2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = 1,015u_n - 300$.

On considère l'algorithme suivant :

Pseudo Code

```
Fonction suite( )
   n ← 0
   u ← 5700
   Tant que u > 4500   Faire
       u ← 1,015 × u − 300
       n ← n + 1
   Fin Tant que
   Renvoyer n
```

2. a. Recopier et compléter le tableau en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

Valeur de u	5 700			
Valeur de n	0			
$u > 4\,500$ (vrai/faux)	vrai		vrai	faux

2. b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ?

Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20\,000$.

3. a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.

3. b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n$$

4. À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :

4. a. Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.

4. b. ► **Terminale** ◄ Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt. (*Traiter cette question à l'aide de la calculatrice en 1re*)

4. c. Quel sera le montant de la dernière mensualité ?

4. d. Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?

Exercice 28. (c) D'après Bac ES/L 2016 du Liban - 31 Mai 2016 (5 points)

Remarque : Cet exercice est l'exercice 3 du sujet des candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées.
Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir.
En 2015, l'entreprise PiscinePlus dénombrait 75 contrats souscrits.
On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise PiscinePlus l'année $2015 + n$. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1.

1. a. Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2016.

1. b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$.

2. L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel.

On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

Pseudo Code

```
Fonction suite( )
   n ← 0
   u ← 75
   Tant que u ⩽ 100   Faire
        n ← n + 1
        u ← 1,12 × u − 6
   Fin Tant que
   Renvoyer ···
```

2. a. Recopier et compléter la dernière ligne.

2. b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats à l'unité.

Valeur de n	0		
Valeur de U	75		

2. c. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.

3. On rappelle que, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$ et $u_0 = 75$.

On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

3. b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis montrer que, pour tout entier naturel n, on a

$$u_n = 25 \times 1,12^n + 50$$

3. c. ► **Terminale** ◄ Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 100$.
(*Traiter cette question à l'aide de la calculatrice en 1re*).

3. d. Quel résultat de la question 2 retrouve-t-on ?

Partie V. Correction des exercices

Correction de l'exercice 2 : Arithmétique ou pas

Déterminer si les suites suivantes sont arithmétiques.
Si oui, donner le premier terme et la raison.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n+5}{n+1}$.

$u_0 = 5 \qquad u_1 = \dfrac{1+5}{1+1} = \dfrac{6}{2} = 3 \qquad u_2 = \dfrac{7}{3}$

$u_1 - u0 = 3 - 5 = -2$

$u_2 - u_1 = \dfrac{7}{3} - 3 = -\dfrac{2}{3} \neq u_1 - u0.$

Donc (u_n) n'est pas arithmétique.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{-3n+5}{8}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{-3(n+1)+5}{8} - \frac{-3n+5}{8} \\ &= \frac{-3n-3+5+3n-5}{8} \\ &= \frac{-3}{8} \end{aligned}$$

Donc (u_n) est arithmétique de raison $-\dfrac{3}{8}$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{5}{8}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^2+4n+3}{n+3}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(n+1)^2+4(n+1)+3}{n+1+3} - \frac{n^2+4n+3}{n+3} \\ &= \frac{n^2+2n+1+4n+4+3}{n+4} - \frac{n^2+4n+3}{n+3} \\ &= \frac{n^2+6n+8}{n+4} - \frac{n^2+4n+3}{n+3} \\ &= \frac{(n^2+6n+8)(n+3)-(n^2+4n+3)(n+4)}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{n^3+6n^2+8n+3n^2+18n+24-n^3-4n^2-3n-4n^2-16n-12}{(n+3)(n+4)} \\ &= \frac{n^2+7n+12}{n^2+7n+12} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc (u_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 1$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n^2+1}{n+2}$.

$u_0 = \dfrac{1}{2} \qquad u_1 = \dfrac{1^2+1}{1+2} = \dfrac{2}{3} \qquad u_2 = \dfrac{5}{7}$

$u_1 - u0 = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{4}{6} - \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{6}$

$u_2 - u_1 = \dfrac{5}{7} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{15}{21} - \dfrac{14}{21} = \dfrac{1}{21} \neq u_1 - u0.$

Donc (u_n) n'est pas arithmétique.

Correction de l'exercice 13

Les suites (u_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 500 \\ u_{n+1} & = 1{,}4 \times u_n - 12 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (w_n) : \begin{cases} w_0 & \\ w_n & = u_n - 30 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes des deux suites.

$$u_0 = 500 \; ; \; u_1 = 688 \; ; \; u_2 = 951{,}2 \quad \text{et} \quad w_0 = 470 \; ; \; w_1 = 658 \; ; \; w_2 = 921{,}2$$

2. Démontrer que la suite w est géométrique.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
w_{n+1} &= u_{n+1} - 30 \\
w_{n+1} &= (1{,}4\, u_n - 12) - 30 \\
w_{n+1} &= 1{,}4 \times u_n - 42 \\
w_{n+1} &= 1{,}4 \times \left(u_n + \frac{-42}{1{,}4}\right) \\
w_{n+1} &= 1{,}4 \times (u_n - 30) \\
w_{n+1} &= 1{,}4 \times w_n
\end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}4$, et de premier terme $w_0 = 470$ puisque :

$$\begin{aligned}
w_0 &= u_0 - 30 \\
w_0 &= 500 - 30 \\
w_0 &= 470
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(w_n) : \begin{cases} w_0 & = 470 \\ w_{n+1} & = 1{,}4 \times w_n \end{cases} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. Soit n un nombre entier naturel, exprimer w_n en fonction de n.

La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 1{,}4$, et de premier terme $w_0 = 470$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; w_n = w_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; w_n = 470 \times (1{,}4)^n}$$

4. Démontrer que pour tout entier n on a : $\quad u_n = 470 \times (1{,}4)^n + 30$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$w_n = u_n - 30$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = w_n + 30$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = 470 \times (1{,}4)^n + 30}$$

Correction de l'exercice 14

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 & = 100 \\ a_{n+1} & = 0{,}6 \times a_n + 50 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n & = a_n - 125 \end{cases}$$

1. **Calculer les trois premiers termes des deux suites.**

$$a_0 = 100 \ ; \ a_1 = 110 \ ; \ a_2 = 116 \quad \text{et} \quad b_0 = -25 \ ; \ b_1 = -15 \ ; \ b_2 = -9$$

2. **Démontrer que la suite *b* est géométrique**.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_{n+1} - 125 \\ b_{n+1} &= (0{,}6\, a_n + 50) - 125 \\ b_{n+1} &= 0{,}6 \times a_n - 75 \\ b_{n+1} &= 0{,}6 \times \left(a_n + \frac{-75}{0{,}6}\right) \\ b_{n+1} &= 0{,}6 \times (a_n - 125) \\ b_{n+1} &= 0{,}6 \times b_n \end{aligned}$$

La suite (b_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}6$, et de premier terme $b_0 = -25$ puisque :

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 - 125 \\ b_0 &= 100 - 125 \\ b_0 &= -25 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(b_n) : \begin{cases} b_0 & = -25 \\ b_{n+1} & = 0{,}6 \times b_n \end{cases} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. **Soit n un nombre entier naturel, exprimer b_n en fonction de n.**

La suite (b_n) est géométrique de raison $q = 0{,}6$, et de premier terme $b_0 = -25$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ b_n = b_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ b_n = -25 \times (0{,}6)^n}$$

4. **Démontrer que pour tout entier n on a : $\quad a_n = -25 \times (0{,}6)^n + 125$.**

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$b_n = a_n - 125$$

On peut en déduire l'expression :

$$a_n = b_n + 125$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ a_n = -25 \times (0{,}6)^n + 125}$$

Correction de l'exercice 15

Les suites (c_n) et (d_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(c_n) : \begin{cases} c_0 & = 5 \\ c_{n+1} & = 1{,}1 \times c_n + \ 4 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (d_n) : \begin{cases} d_0 & \\ d_n & = -c_n - 40 \end{cases}$$

1. **Calculer les trois premiers termes des deux suites.**

$$c_0 = 5 \ ; \ c_1 = 9{,}5 \ ; \ c_2 = 14{,}45 \quad \text{et} \quad d_0 = -45 \ ; \ d_1 = -49{,}5 \ ; \ d_2 = -54{,}45$$

2. **Démontrer que la suite d est géométrique**.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= -c_{n+1} - 40 \\ d_{n+1} &= -\left(1{,}1\, c_n + \ 4\right) - 40 \\ d_{n+1} &= -1{,}1 \times c_n - 44 \\ d_{n+1} &= 1{,}1 \times \left(-c_n + \frac{-44}{1{,}1}\right) \\ d_{n+1} &= 1{,}1 \times (-c_n - 40) \\ d_{n+1} &= 1{,}1 \times d_n \end{aligned}$$

La suite (d_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}1$, et de premier terme $d_0 = -45$ puisque :

$$\begin{aligned} d_0 &= -c_0 - 40 \\ d_0 &= -5 - 40 \\ d_0 &= -45 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(d_n) : \begin{cases} d_0 & = -45 \\ d_{n+1} & = 1{,}1 \times d_n \end{cases} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. **Soit n un nombre entier naturel, exprimer d_n en fonction de n.**

La suite (d_n) est géométrique de raison $q = 1{,}1$, et de premier terme $d_0 = -45$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ d_n = d_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ d_n = -45 \times (1{,}1)^n}$$

4. **Démontrer que pour tout entier n on a : $\quad c_n = 45 \times (1{,}1)^n - 40$.**

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$d_n = -c_n - 40$$

On peut en déduire l'expression :

$$c_n = -d_n - 40$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ c_n = 45 \times (1{,}1)^n - 40}$$

Correction de l'exercice 16

Les suites (s_n) et (t_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(s_n) : \begin{cases} s_0 &= 100 \\ s_{n+1} &= 0{,}9 \times s_n + \ 50 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (t_n) : \begin{cases} t_0 & \\ t_n &= -s_n + \ 500 \end{cases}$$

1. Calculer les trois premiers termes des deux suites.

$$s_0 = 100 \ ; \ s_1 = 140 \ ; \ s_2 = 176 \quad \text{et} \quad t_0 = 400 \ ; \ t_1 = 360 \ ; \ t_2 = 324$$

2. Démontrer que la suite t est géométrique.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
t_{n+1} &= -s_{n+1} + \ 500 \\
t_{n+1} &= -\left(0{,}9\, s_n + \ 50\right) + \ 500 \\
t_{n+1} &= -0{,}9 \times s_n + \ 450 \\
t_{n+1} &= 0{,}9 \times \left(-s_n + \frac{450}{0{,}9}\right) \\
t_{n+1} &= 0{,}9 \times (-s_n + \ 500) \\
t_{n+1} &= 0{,}9 \times t_n
\end{aligned}$$

La suite (t_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}9$, et de premier terme $t_0 = 400$ puisque :

$$\begin{aligned}
t_0 &= -s_0 + \ 500 \\
t_0 &= -100 + \ 500 \\
t_0 &= 400
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(t_n) : \begin{cases} t_0 &= 400 \\ t_{n+1} &= 0{,}9 \times t_n \end{cases} \ ; \ \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. Soit n un nombre entier naturel, exprimer t_n en fonction de n.

La suite (t_n) est géométrique de raison $q = 0{,}9$, et de premier terme $t_0 = 400$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ t_n = t_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ t_n = 400 \times (0{,}9)^n}$$

4. Démontrer que pour tout entier n on a : $s_n = -400 \times (0{,}9)^n + \ 500$.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$t_n = -s_n + \ 500$$

On peut en déduire l'expression :

$$s_n = -t_n + \ 500$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ s_n = -400 \times (0{,}9)^n + \ 500}$$

Correction de l'exercice 17

1.

Les suites (u_n) et (w_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_1 & = 10 \\ u_{n+1} & = 2 \times u_n - 1 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (w_n) : \begin{cases} w_1 & \\ w_n & = u_n - 1 \end{cases}$$

1. a. Montrons que la suite (w_n) est géométrique.

Pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 1 \\ w_{n+1} &= (2\, u_n - 1) - 1 \\ w_{n+1} &= 2 \times u_n - 2 \\ w_{n+1} &= 2 \times \left(u_n + \frac{-2}{2} \right) \\ w_{n+1} &= 2 \times (u_n - 1) \\ w_{n+1} &= 2 \times w_n \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 2$, et de premier terme $w_1 = 9$ puisque :

$$\begin{aligned} w_1 &= u_1 - 1 \\ w_1 &= 10 - 1 \\ w_1 &= 9 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(w_n) : \begin{cases} w_1 & = 9 \\ w_{n+1} & = 2 \times w_n \end{cases} \; ; \; \forall n \geqslant 1}$$

1. b. Exprimons w_n en fonction de n.

La suite (w_n) est géométrique de raison $q = 2$, et de premier terme $w_1 = 9$ donc son terme général est

$$\forall n \geqslant 1 \; ; \; w_n = w_1 \times (q)^{n-1}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \; ; \; w_n = 9 \times (2)^{n-1}}$$

1. c. Exprimons u_n en fonction de n.

De l'égalité définie pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$w_n = u_n - 1$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = w_n + 1$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1 \; ; \; u_n = 9 \times (2)^{n-1} + 1}$$

1. d. On en déduit alors que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a :

$$\begin{aligned} u_n &= 9 \times 2^n \times 2^{-1} + 1 \\ &= \underbrace{9 \times 2^{-1}}_{4,5} \times 2^n + 1 \\ u_n &= \underline{4,5 \times 2^n + 1} \end{aligned}$$

2.

Les suites (a_n) et (b_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(a_n) : \begin{cases} a_0 &= -5 \\ a_{n+1} &= 0{,}8 \times a_n + 2 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (b_n) : \begin{cases} b_0 & \\ b_n &= -a_n + 10 \end{cases}$$

2. a. Montrons que la suite (b_n) est géométrique.

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= -a_{n+1} + 10 \\
b_{n+1} &= -(0{,}8\, a_n + 2) + 10 \\
b_{n+1} &= -0{,}8 \times a_n + 8 \\
b_{n+1} &= 0{,}8 \times \left(-a_n + \frac{8}{0{,}8}\right) \\
b_{n+1} &= 0{,}8 \times (-a_n + 10) \\
b_{n+1} &= 0{,}8 \times b_n
\end{aligned}$$

La suite (b_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $b_0 = 15$ puisque :

$$\begin{aligned}
b_0 &= -a_0 + 10 \\
b_0 &= 5 + 10 \\
b_0 &= 15
\end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(b_n) : \begin{cases} b_0 &= 15 \\ b_{n+1} &= 0{,}8 \times b_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

2. b. Exprimons b_n en fonction de n.

La suite (b_n) est géométrique de raison $q = 0{,}8$, et de premier terme $b_0 = 15$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; b_n = b_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; b_n = 15 \times (0{,}8)^n}$$

2. c. Exprimons a_n en fonction de n.

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$b_n = -a_n + 10$$

On peut en déduire l'expression :

$$a_n = -b_n + 10$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; a_n = -15 \times (0{,}8)^n + 10}$$

3.

Les suites (c_n) et (d_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(c_n) : \begin{cases} c_2 & = 10000 \\ c_{n+1} & = 0.5 \times c_n - 300 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (d_n) : \begin{cases} d_2 & \\ d_n & = c_n + 600 \end{cases}$$

3. a. Montrons que la suite (d_n) est géométrique.

Pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= c_{n+1} + 600 \\ d_{n+1} &= (0{,}5\, c_n - 300) + 600 \\ d_{n+1} &= 0{,}5 \times c_n + 300 \\ d_{n+1} &= 0{,}5 \times \left(c_n + \frac{300}{0{,}5}\right) \\ d_{n+1} &= 0{,}5 \times (c_n + 600) \\ d_{n+1} &= 0{,}5 \times d_n \end{aligned}$$

La suite (d_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $d_2 = 10\,600$ puisque :

$$\begin{aligned} d_2 &= c_2 + 600 \\ d_2 &= 10\,000 + 600 \\ d_2 &= 10\,600 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(d_n) : \begin{cases} d_2 & = 10\,600 \\ d_{n+1} & = 0{,}5 \times d_n \end{cases} \; ; \; \forall n \geqslant 2}$$

3. b. Exprimons d_n en fonction de n.

La suite (d_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$, et de premier terme $d_2 = 10\,600$ donc son terme général est

$$\forall n \geqslant 2 \; ; \; d_n = d_2 \times (q)^{n-2}$$

Soit

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \; ; \; d_n = 10\,600 \times (0{,}5)^{n-2}}$$

3. c. Exprimons c_n en fonction de n.

De l'égalité définie pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$d_n = c_n + 600$$

On peut en déduire l'expression :

$$c_n = d_n - 600$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \; ; \; c_n = 10\,600 \times (0{,}5)^{n-2} - 600}$$

3. d. On en déduit alors que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a :

$$\begin{aligned} c_n &= 10\,600 \times 0,5^n \times 0,5^{-2} - 600 \\ &= \underbrace{10\,600 \times 0,5^{-2}}_{42\,400} \times 0,5^n - 600 \\ c_n &= \underline{42\,400 \times 0,5^n - 600} \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 18 : Bac ES 2014 Métropole - Obligatoire — 5 points

Candidats de ES n'ayant pas choisi la spécialité et candidats de L

A l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de 1 500 m^2 entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m^2 et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel n, on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à -dire à l'automne $2010 + n$. On a donc $u_0 = 1\,500$.

1. **Calculer u_1.**

   « *20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m^2 et la remplace par du gazon,* » donc en 2011 il reste 80 % de la surface engazonnée de l'année précédente auquel on ajoute 50m^2. De ce fait :

$$\boxed{u_1 = 0,8\ u_0 + 50 = 0,8 \times 1\,500 + 50 = 1\,250}$$

2. **Justifier que, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 0,8u_n + 50$.**

   « *Mais tous les ans, 20 % de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m^2 et la remplace par du gazon,* » donc en $(2010+n+1)$ il reste 80 % de la surface engazonnée de l'année $(2010 + n)$ auquel on ajoute 50m^2. De ce fait :

$$\boxed{u_{n+1} = 0,8\ u_n + 50}$$

3. **On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = u_n - 250$.**

   3. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.

   Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 250 \\
&= 0,8u_n + 50 - 250 \\
&= 0,8u_n - 200 \\
&= 0,8\left(u_n - \frac{200}{0,8}\right) \\
&= 0,8\,(u_n - 250) \\
v_{n+1} &= 0,8\ v_n
\end{aligned}$$

   La suite (v_n) est donc une suite **géométrique de raison $q = 0,8$**
   et de premier terme $v_0 = u_0 - 250 = 1\,500 - 250 = 1\,250$.

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 1\,250 \\ v_{n+1} & = 0,8v_n \end{cases} \ ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

   3. b. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n$.

   Puisque la suite (v_n) est géométrique, son terme général est, pour n entier : $v_n = v_0 \times q^n$ soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = 1\,250 \times 0,8^n}$$

   De l'égalité $v_n = u_n - 250$ définie pour tout entier n, on peut en déduire l'expression de $u_n = v_n + 250$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n}$$

   3. c. Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?

   On calcule

$$u_4 = 250 + 1250 \times 0,8^4 = 762$$

   Donc **762 m^2 du terrain est encore engazonné au bout de 4 ans.**

La suite de cet exercice demande des notions sur les limites et sur la fonction $\ln$ *mais ces deux questions peuvent être traitées en première ES par conjecture à l'aide de la calculatrice.*

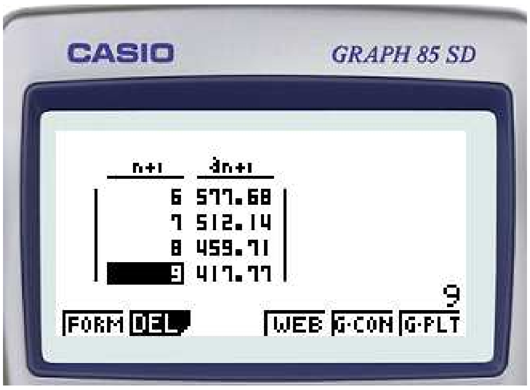
4.

4. a. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 250 + 1\,250 \times 0,8^{n+1} - \left(250 + 1\,250 \times 0,8^n\right) \\
&= 250 + 1\,250 \times 0,8^{n+1} - 250 - 1\,250 \times 0,8^n \\
&= 1\,250 \times 0,8^{n+1} - 1\,250 \times 0,8^n \\
&= \underline{1\,250 \times 0,8^n} \times 0,8^1 - \underline{1\,250 \times 0,8^n} \times 1 \\
&= 1\,250 \times 0,8^n \times (0,8 - 1) \\
u_{n+1} - u_n &= \underbrace{1\,250 \times 0,8^n}_{>0} \times \underbrace{(-0,2)}_{<0} \\
u_{n+1} - u_n &< 0 \\
u_{n+1} &< u_n
\end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

4. b. Déterminer par le calcul la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que : $250+1\,250\times 0,8^n < 500$. Interpréter le résultat obtenu. Avec la calculatrice on obtient :



La plus petite valeur de l'entier naturel n telle que : $250 + 1\,250 \times 0,8^n < 500$ est donc $\boxed{n = 8}$.
A partir de la 8ème année la surface de gazon sera inférieure à 500 m^2.

4. c. Compléter l'algorithme fourni en annexe 1 pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.

Pseudo Code

```
Fonction suite( )
    n ← 0
    u ← 1500
    Tant que u ⩾ 500   Faire
        u ← 0,8 × u + 50
        n ← n + 1
    Fin Tant que
    Renvoyer n
```

Correction de l'exercice 19

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{4}{5 - u_n}$.

Partie A

1. On complète la fonction Python suivante `suite(n)` qui prend comme paramètre le rang n et renvoie la valeur du terme u_n.

```
def suite(n):
    u = 3
    for i in range(n) :
        u = 4/(5 - u)
    return u
```

2. À la première boucle on trouve $u_1 = \dfrac{4}{5-3} = \dfrac{4}{2} = 2$.

À la seconde on trouve $u_2 = \dfrac{4}{5-2} = \dfrac{4}{3} \approx 1,333$.

3. À l'aide des affichages ci-dessous, émettre une conjecture sur le sens de variation et une conjecture sur la convergence de la suite (u_n).

```
» suite(2)
1.3333333333333333
» suite(5)
1.0058479532163742
» suite(10)
1.0000057220349845
» suite(20)
1.000000000005457
```

Les affichages successifs sont des approximations de $u_2,\ u_5,\ u_{10},\ u_{20}$ et leur examen laisse à conjecturer que la la limite de la suite est égale à 1.

Correction de l'exercice 20

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

On estime que :

- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est $0,9$;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est $0,4$.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.
Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n.
Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1. Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0,85$.
On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.

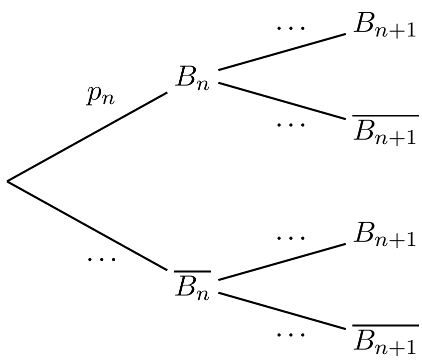
Corrigé (2 points)

On a $p_0 = 1$, donc au départ la trottinette est en bon état avec certitude.

- **Calcul de p_1 :** si la trottinette est en bon état un lundi, elle est encore en bon état le lundi suivant avec la probabilité 0,9. Ainsi :
$$p_1 = 0{,}9.$$
- **Calcul de p_2 :** par la formule des probabilités totales, en remarquant que les événements B_1 et $\overline{B_1}$ forment une partition de l'univers :
$$p_2 = P(B_2) = P_{B_1}(B_2)\,P(B_1) + P_{\overline{B_1}}(B_2)\,P(\overline{B_1}).$$
Or $P_{B_1}(B_2) = 0{,}9$, $P_{\overline{B_1}}(B_2) = 0{,}4$, $P(B_1) = p_1 = 0{,}9$ et $P(\overline{B_1}) = 1 - p_1 = 0{,}1$. Donc :
$$\begin{aligned} p_2 &= 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}4 \times 0{,}1 \\ &= 0{,}81 + 0{,}04 \\ &= 0{,}85. \end{aligned}$$

Ainsi :
$$\boxed{p_1 = 0{,}9 \quad \text{et} \quad p_2 = 0{,}85.}$$

2. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



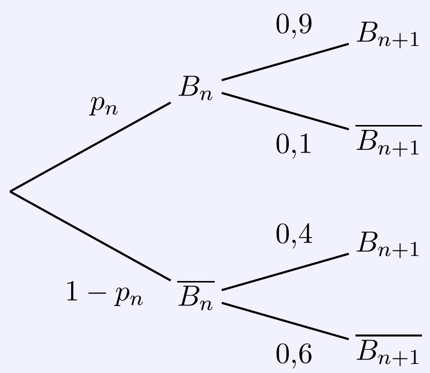
Corrigé (2 points)

On complète directement avec les données :

- Si la trottinette est en bon état un lundi : $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0{,}9$ et $P_{B_n}\left(\overline{B_{n+1}}\right) = 0{,}1$.
- Si la trottinette est en mauvais état un lundi : $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 0{,}4$ et $P_{\overline{B_n}}\left(\overline{B_{n+1}}\right) = 0{,}6$.

De plus $P(\overline{B_n}) = 1 - p_n$.

L'arbre complété est donc :



3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.

Corrigé (2 points)

Par la formule des probabilités totales, en utilisant que B_n et $\overline{B_n}$ forment une partition de l'univers :

$$p_{n+1} = P(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1})\,P(B_n) + P_{\overline{B_n}}(B_{n+1})\,P(\overline{B_n}).$$

Or $P_{B_n}(B_{n+1}) = 0{,}9$, $P_{\overline{B_n}}(B_{n+1}) = 0{,}4$, $P(B_n) = p_n$ et $P(\overline{B_n}) = 1 - p_n$. Donc :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= 0{,}9p_n + 0{,}4(1 - p_n) \\ &= 0{,}9p_n + 0{,}4 - 0{,}4p_n \\ &= 0{,}5p_n + 0{,}4. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4.}$$

4.

4. a. ► **Terminale** ◄ Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n \geqslant 0,8$.
(*On pourra admettre ce résultat en 1re*).

4. b. À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?

Corrigé (3 points)

4. a. On montre par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: $p_n \geq 0{,}8$.

- **Initialisation :** $p_0 = 1$, donc $p_0 \geq 0{,}8$. la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0.
- **Hérédité :** on suppose la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie à un rang n, c'est-à-dire $p_n \geq 0{,}8$. Alors, d'après la relation :

$$p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4 \geq 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}4 = 0{,}4 + 0{,}4 = 0{,}8.$$

Donc $p_{n+1} \geq 0{,}8$: la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{p_n \geq 0{,}8.}$$

4. b. Comme $p_n \geq 0{,}8$ pour tout n, l'entreprise peut communiquer par exemple :

$$\boxed{\text{« Chaque lundi, au moins 80\% des trottinettes sont en bon état. »}}$$

5.

5. a. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,8$.
Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

5. b. En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n.

5. c. ► **Terminale** ◄ En déduire la limite de la suite (p_n).
(*Traiter cette question à l'aide de la calculatrice en 1re*).

Corrigé (4 points)

5. a. On pose $u_n = p_n - 0{,}8$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= p_{n+1} - 0{,}8 \\ &= \big(0{,}5p_n + 0{,}4\big) - 0{,}8 \\ &= 0{,}5p_n - 0{,}4 \\ &= 0{,}5\big(p_n - 0{,}8\big) \\ &= 0{,}5u_n. \end{aligned}$$

Donc (u_n) est géométrique de raison :

$$\boxed{q = 0{,}5.}$$

Son premier terme vaut :

$$u_0 = p_0 - 0{,}8 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_0 = 0{,}2.}$$

5. b. Comme (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 0{,}2$ et de raison $0{,}5$, on a :

$$u_n = 0{,}2 \times (0{,}5)^n.$$

Or $p_n = u_n + 0{,}8$, donc :

$$p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times (0{,}5)^n.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_n = 0{,}2 \times (0{,}5)^n \quad \text{et} \quad p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times (0{,}5)^n.}$$

5. c. Comme $0 < 0{,}5 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} (0{,}5)^n = 0$. Donc :

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0 = 0{,}8.$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} p_n = 0{,}8.}$$

Correction de l'exercice 21 : Bac 2023 - Nvelle Calédonie J2

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}.$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

Corrigé (2 points)

On applique la relation de récurrence.

- Pour $n = 0$:
$$u_1 = \frac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \frac{-0 - 4}{0 + 3} = -\frac{4}{3}.$$
- Pour $n = 1$:
$$u_2 = \frac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \frac{-\left(-\frac{4}{3}\right) - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = \frac{\frac{4}{3} - \frac{12}{3}}{\frac{-4}{3} + \frac{9}{3}} = \frac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{8}{5}.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_1 = -\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad u_2 = -\frac{8}{5}.}$$

2. Conjecturer avec la calculatrice le comportement de la suite (u_n).

Corrigé (1 point)

À la calculatrice, on obtient par exemple :

$$u_0 = 0, \quad u_1 \simeq -1{,}333, \quad u_2 = -1{,}6, \quad u_3 \simeq -1{,}714, \quad u_4 \simeq -1{,}778 \ \ldots$$

Les termes semblent décroître et se rapprocher de -2.

On conjecture donc que la suite (u_n) est décroissante et que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = -2.}$$

3. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
        u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

Corrigé (2 points)

On part de $u_0 = 0$, puis on applique n fois la relation :

$$u \leftarrow \frac{-u - 4}{u + 3}.$$

On complète donc :

```
def terme (n) :
    u = 0
    for i in range(n):
        u = (-u - 4)/(u + 3)
    return(u)
```

4. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}.$$

4. a. Donner v_0.

Corrigé (1 point)

$$v_0 = \frac{1}{u_0 + 2} = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{v_0 = \frac{1}{2}.}$$

4. b. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

Corrigé (3 points)

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} + 2} - \frac{1}{u_n + 2} \\
&= \frac{1}{\frac{-u_n - 4}{u_n + 3} + 2} - \frac{1}{u_n + 2} \\
&= \frac{1}{\frac{-u_n - 4 + 2u_n + 6}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n + 2} \\
&= \frac{1}{\frac{u_n + 2}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n + 2} \\
&= \frac{u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{1}{u_n + 2} \\
&= \frac{u_n + 2}{u_n + 2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{v_{n+1} - v_n = 1}$$

Donc la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

4. c. En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2.$$

Corrigé (2 points)

Comme (v_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$, on a :

$$v_n = v_0 + n = \frac{1}{2} + n = n + \frac{1}{2}.$$

Or $v_n = \dfrac{1}{u_n + 2}$, donc :

$$\frac{1}{u_n + 2} = n + \frac{1}{2} \iff u_n + 2 = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \iff u_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - 2.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$:

$$\boxed{u_n = \frac{1}{n + 0{,}5} - 2.}$$

4. d. ► **Terminale** ◄ Déterminer la limite de la suite (u_n).
(*Traiter cette question à l'aide de la calculatrice en 1re*).

Corrigé (1 point)

D'après la question précédente :

$$u_n = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} - 2.$$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n + \frac{1}{2}} = 0$, donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = -2.}$$

Correction de l'exercice 22 : Bac 2023 - Nvelle Calédonie

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

1.

1. a. Démontrer que $u_1 = 12$.

Corrigé (1 point)

On applique la relation de récurrence avec $n = 0$:

$$u_1 = 5u_0 - 4 \times 0 - 3 = 5 \times 3 - 3 = 15 - 3 = 12.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_1 = 12}$$

1. b. Déterminer u_2 en détaillant le calcul.

Corrigé (1 point)

On applique la relation de récurrence avec $n = 1$:

$$u_2 = 5u_1 - 4 \times 1 - 3 = 5 \times 12 - 4 - 3 = 60 - 7 = 53.$$

Donc :

$$\boxed{u_2 = 53}$$

1. c. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation ainsi que la limite de la suite (u_n).

Corrigé (1 point)

À la calculatrice, on obtient par exemple :

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 12, \quad u_2 = 53, \quad u_3 = 254, \quad u_4 = 1267 \ \ldots$$

Ces valeurs augmentent très rapidement.

On conjecture donc que la suite (u_n) est <u>strictement croissante</u> et que :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}$$

2.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \geqslant n + 1.$$

Corrigé (3 points)

On démontre par récurrence la propriété : $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geq n + 1$.

- **Initialisation :** pour $n = 0$,

$$u_0 = 3 \geq 1 = 0 + 1.$$

Donc la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0.

- **Hérédité :** on suppose la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie à un rang n fixé, c'est-à-dire

$$u_n \geq n+1.$$

Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n - 4n - 3 \\ &\geq 5\big(n+1\big) - 4n - 3 \qquad \text{(car } u_n \geq n+1\text{)} \\ &= 5n + 5 - 4n - 3 \\ &= n+2 \\ &= (n+1)+1. \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} \geq (n+1)+1$, ce qui montre que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire.

Conclusion : par le principe de récurrence, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{u_n \geq n+1.}$$

2. b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Corrigé (1 point)

On a montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n \geq n+1.$$

Or, on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty} (n+1) = +\infty.$$

Par comparaison, on en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.}$$

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n - n - 1.$$

3. a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme v_0.

Corrigé (2 points)

Calculons v_{n+1} :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) - 1 \\ &= \big(5u_n - 4n - 3\big) - n - 2 \\ &= 5u_n - 5n - 5 \\ &= 5\big(u_n - n - 1\big) \\ &= 5v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison :

$$\boxed{q = 5.}$$

De plus :

$$v_0 = u_0 - 0 - 1 = 3 - 1 = 2,$$

donc :

$$\boxed{v_0 = 2.}$$

3. b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

Corrigé (1 point)

Comme (v_n) est géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 5, on a :

$$v_n = v_0 \times 5^n = 2 \times 5^n.$$

Donc :

$$\boxed{v_n = 2 \times 5^n.}$$

3. c. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

Corrigé (1 point)

Par définition :

$$v_n = u_n - n - 1 \quad \iff \quad u_n = v_n + n + 1.$$

Or $v_n = 2 \times 5^n$, donc :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

Ainsi :

$$\boxed{u_n = 2 \times 5^n + n + 1.}$$

3. d. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Corrigé (2 points)

On dispose de l'expression :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

Calculons la différence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(2 \times 5^{n+1} + (n+1) + 1\right) - \left(2 \times 5^n + n + 1\right) \\ &= 2\left(5^{n+1} - 5^n\right) + 1 \\ &= 2 \cdot 5^n (5-1) + 1 \\ &= 8 \cdot 5^n + 1. \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $5^n \geq 1$, donc $8 \cdot 5^n + 1 > 0$.

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} > u_n$$

et donc :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante.}}$$

4. On considère la fonction ci-contre, écrite de manière incomplète en langage Python et destinée à renvoyer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geqslant 10^7$.

4. a. Recopier le programme et compléter les deux instructions manquantes.

4. b. Quelle est la valeur renvoyée par cette fonction ?

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = n + 1
    return n
```

Corrigé (2 points)

4. a. On veut itérer tant que $u_n < 10^7$ puis s'arreter au premier n tel que $u_n \geq 10^7$.

La relation de récurrence est :

$$u_{n+1} = 5u_n - 4n - 3.$$

Donc, dans la boucle, après avoir la valeur courante u et l'indice n, on met à jour u par :

$$u \leftarrow 5u - 4n - 3.$$

On complète donc :

```
def suite() :
    u = 3
    n = 0
    while u < 10**7 :
        u = 5*u - 4*n - 3
        n = n + 1
    return n
```

4. b. On peut aussi utiliser l'expression explicite démontrée :

$$u_n = 2 \times 5^n + n + 1.$$

On cherche le plus petit n tel que $2 \times 5^n + n + 1 \geq 10^7$.

On teste :

$$u_9 = 2 \times 5^9 + 9 + 1 = 3\,906\,250 + 10 = 3\,906\,260 < 10^7,$$

$$u_{10} = 2 \times 5^{10} + 10 + 1 = 19\,531\,250 + 11 = 19\,531\,261 \geq 10^7.$$

Ainsi, le plus petit entier naturel convenable est :

$$\boxed{n = 10.}$$

La fonction renvoie donc $\boxed{10}$.

Correction de l'exercice 25 : Bac ES 2014 Antilles-Guyane - Obligatoire 5 points

Candidats ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats L

Un opérateur de téléphonie mobile constate que, chaque année, il perd 8 % de ses précédent abonnés et que, par ailleurs, il gagne 3 millions de nouveaux abonnés.
En 2013 le nombre d'abonnés est de 20 millions.
On s'intéresse au nombre d'abonnés, en millions, pour l'année $2013+n$. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n, par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 20 \\ u_{n+1} & = & 0,92u_n+3. \end{array}\right.$$

Le terme u_n donne une estimation du nombre d'abonnés pour l'année $2013+n$.

Partie A

1.

1. a. En utilisant cette modélisation, l'opérateur décide d'arrondir les résultats à 10^{-3}. A quoi correspond ce choix d'arrondi ?
Les termes de la suite modélisant la situation sont exprimés en millions de ce fait, arrondir les résultats à 10^{-3} million près **correspond au nombre d'abonnés de l'opérateur arrondi au millier**.

1. b. Déterminer le nombre d'abonnés en 2014 et en 2015.

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 20 \\ u_1 & = & 0,92\ u_0+3=21,4 \\ u_2 & = & 0,92\ u_1+3=22,688 \end{array}\right.$$

Donc **le nombre d'abonnés en 2014 est de 21,4 millions et en 2015 de 22,688 millions**.

On définit la suite (v_n) par $v_n=u_n-37,5$ pour tout entier naturel n.

2. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,92. Préciser son premier terme.
Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1}-37,5 \\ &= 0,92u_n+3-37,5 \\ &= 0,92u_n-34,5 \\ &= 0,92\left(u_n-\frac{34,5}{0,92}\right) \\ &= 0,92\,(u_n-37,5) \\ v_{n+1} &= 0,92v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite **géométrique de raison $q=0,92$,**
et de premier terme $v_0=u_0-37,5=-17,5$.

$$\boxed{(v_n):\left\{\begin{array}{ll} v_0 & =-17,5 \\ v_{n+1} & =0,92w_n \end{array}\right. ;\ \forall n\in\mathbb{N}}$$

3. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n=-17,5\times0,92^n+37,5$.
Puisque la suite (v_n) est géométrique, son terme général est, pour n entier : $v_n=v_0\times q^n$ soit :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ v_n=-17,5\times0,92^n}$$

De l'égalité $v_n=u_n-37,5$ définie pour tout entier n, on peut en déduire l'expression de $u_n=v_n+37,5$ soit :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ;\ u_n=-17,5\times0,92^n+37,5}$$

4. Déterminer le nombre d'abonnés en millions en 2020. Arrondir les résultats à 10^{-3}.
En 2020 cela correspond à $n=7$ donc $u_7\approx 27,738$.
L'opérateur aura donc en 2020 environ **27,738 millions d'abonnés**.

Partie B

Compte tenu des investissements, l'opérateur considère qu'il réalisera des bénéfices lorsque le nombre d'abonnés dépassera 25 millions.

1. **Recopier et compléter l'algorithme suivant afin de déterminer le nombre d'années nécessaires à partir de 2013 pour que l'opérateur fasse des bénéfices.**

Pseudo Code

```
Fonction suite( )
  n ← 0
  u ← 20
  Tant que u < 25   Faire
      u ← 0,92 × u + 3
      n ← n + 1
  Fin Tant que
  Renvoyer n
```

2. ***(Question supplémentaire) Montrer que la suite (u_n) est croissante.***
Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -17,5 \times 0,92^{n+1} + 37,5 - \Big(-17,5 \times 0,92^n + 37,5 \Big) \\ &= -17,5 \times 0,92^n \times 0,92 + 37,5 + 17,5 \times 0,92^n - 37,5 \\ &= \underline{17,5 \times 0,92^n} \times (-0,92) + \underline{17,5 \times 0,92^n} \times 1 \\ &= 17,5 \times 0,92^n \times (-0,92 + 1) \\ u_{n+1} - u_n &= \underbrace{17,5 \times 0,92^n}_{>0} \times \underbrace{(0,08)}_{>0} \\ u_{n+1} - u_n &> 0 \\ u_{n+1} &> u_n \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est croissante.

3. **En quelle année l'opérateur fera-t-il des bénéfices pour la première fois ?**
On constate que :

En 2017	:	u_4	$\approx$	$24,963 < 25$	(millions d'abonnés)
En 2018	:	u_5	$\approx$	$25,966 > 25$	(millions d'abonnés)

C'est donc à **partir de 2018 que l'opérateur fera des bénéfices.**

Correction de l'exercice 26 : Bac ES 2014 Centres Etrangers - Obligatoire — 5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Dans une ville, un nouveau lycée vient d'ouvrir ses portes et accueille pour sa première rentrée 500 élèves. D'une année sur l'autre, le proviseur du lycée prévoit une perte de 30 % de l'effectif et l'arrivée de 300 nouveaux élèves.
On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année $2013+n$, avec n entier naturel. On a donc $u_0 = 500$.

1. **1. a. Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2014.**
   En 2014 il y aura $\mathbf{500 \times 0,7 + 300 = 650}$ **élèves**.

   1. b. Calculer Je nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2015.
   En 2015 il y aura $\mathbf{650 \times 0,7 + 300 = 755}$ **élèves**.

2. **Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 300$.**
   - « D'une année sur l'autre, le proviseur du lycée prévoit une perte de 30 % de l'effectif », cela revient donc à dire que 70 % des élèves restent au lycée, on multiplie le nombre d'élèves de l'année passées par 0,7 ;
   - « Le proviseur du lycée prévoit une perte de 30 % de l'effectif et l'arrivée de 300 nouveaux élèves. », on ajoute donc 300 au calcul précédent et de ce fait :

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_{n+1} = 0,7u_n + 300}$$

3. On souhaite, pour un entier n donné, afficher tous les termes de la suite (u_n) du rang 0 au rang n.
   Lequel des trois algorithmes suivants permet d'obtenir le résultat souhaité ? Justifier.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables :	**Variables :**	**Variables :**
n, i entiers naturels,	n, i entiers naturels,	n, i entiers naturels,
u nombre réel	u nombre réel	u nombre réel
Début algorithme	**Début algorithme**	**Début algorithme**
Lire n	Lire n	Lire n
u prend la valeur 500	u prend la valeur 500	u prend la valeur 500
Pour i allant de 1 à n	Pour i allant de 1 à n	Pour i allant de 1 à n
Afficher u	Afficher u	u prend la valeur $0,7 \times u + 300$
u prend la valeur $0,7 \times u + 300$	u prend la valeur $0,7 \times u + 300$	Fin Pour
Fin Pour	Fin Pour	Afficher u
	Afficher u	
Fin algorithme	**Fin algorithme**	**Fin algorithme**

   - L'algorithme 3 n'affiche que le dernier terme calculé car l'instruction d'affichage n'est pas dans la boucle ;
   - L'algorithme 1 n'affiche que les n termes de u_0 à u_{n-1} ;
   - **L'algorithme 2 est donc le seul qui convient**.

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1\,000$.

   4. a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,7$.
   Pour tout entier n on a :

   $$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 1\,000 \\ &= 0,7\,u_n + 300 - 1\,000 = 0,7\,u_n - 700 \\ &= 0,7\ )u_n - 1\,000) = 0,5\,v_n \end{aligned}$$

   La suite $)v_n)$ est donc une suite **géométrique de raison $q = 0,7$, et de premier terme $v_0 = u_0 - 1\,000 = -500$**.

   $$\boxed{)v_n) : \left\{ \begin{array}{ll} v_0 & = -500 \\ v_{n+1} & = 0,7\,v_n \end{array} \right. \ ;\ \forall n \in \mathbb{N}}$$

4. b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,000 - 500 \times 0,7^n$.

- Puisque la suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 0,7$ et de premier terme -500, on peut écrire que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = -500\,(0,7)^n}$$

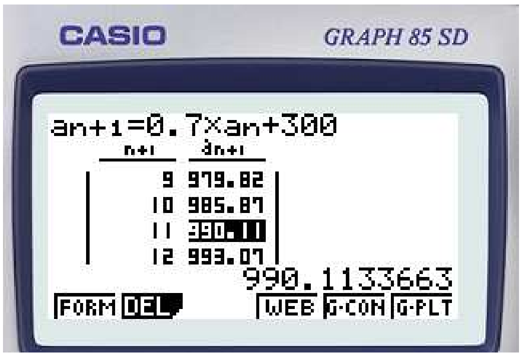
- De l'égalité $v_n = u_n - 1\,000$ définie pour tout entier n, on peut en déduire l'expression de $u_n = v_n + 1\,000$ soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = 1\,000 - 500 \times 0,7^n}$$

5.

5. a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n \geqslant 990$.

Cette question n'est à notre niveau faisable qu'avec la calculatrice, on obtient :



Et puisque n est un entier on a :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n \geqslant 990 \iff n \geqslant 11}$$

5. b. Interpréter le résultat trouvé précédemment.

Cela signifie qu'au bout de 11 ans, soit en 2024, car $(2024 = 2013 + 11)$, le lycée aura plus de 990 élèves.

Correction de l'exercice 27 : Bac ES/L 2016 de Pondichéry - 21 Avril 2016

1.

1. a. Démontrer que u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de 5 485,50 euros.

Au 26 février 2016, le capital restant dû u_1 s'obtient en faisant une augmentation de 1,5 % des 5 485,50 euros de janvier 2016 et en déduisant les 300 euros de mensualité. Effectuer une augmentation de 1,5 % revient à multiplier par $1 + 1,5\,\% = 1,015$ donc u_1, capital restant dû au 26 février 2016 juste après la première mensualité, est de :

$$u_1 = 5\,700 \times 1,015 - 300 = \underline{5\,485,5€}$$

1. b. Calculer u_2.

On obtient de même le capital restant dû au 26 mars 2016 u_2 en faisant une augmentation de 1,5 % des 5 485,5 euros de février 2016 et en déduisant les 300 euros de mensualité soit :

$$u_2 = 5\,485,5 \times 1,015 - 300 \approx \underline{5\,267,78€}$$

2. On admet que la suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par : $u_{n+1} = 1,015u_n - 300$. On considère l'algorithme suivant :

Pseudo Code

Fonction suite( )
- $n \leftarrow 0$
- $u \leftarrow 5700$
- Tant que $u > 4500$ Faire
  - $u \leftarrow 1,015 \times u - 300$
  - $n \leftarrow n + 1$
- Fin Tant que
- Renvoyer n

2. a. Recopier et compléter le tableau en ajoutant autant de colonnes que nécessaires entre la deuxième et la dernière colonne.

u	5 700.00	5 485.50	5 267.78	5 046.80	4 822.50	4 594.84	4 363.76
n	0	1	2	3	4	5	6
$u > 4500$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

2. b. Quelle valeur est affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme ? Interpréter cette valeur dans le contexte .

L'algorithme affichera donc 6. Il s'agit du nombre de mois nécessaire pour que le capital restant dû soit inférieur pour la première fois à 4 500 euros.

3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 20\,000$.

3. a. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_{n+1} = 1,015 \times v_n$.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 5\,700 \\ u_{n+1} & = 1{,}015 \times u_n - 300 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 20\,000 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 20\,000 \\ v_{n+1} &= (1{,}015\, u_n - 300) - 20\,000 \\ v_{n+1} &= 1{,}015 \times u_n - 20\,300 \\ v_{n+1} &= 1{,}015 \times \left(u_n + \frac{-20\,300}{1{,}015}\right) \\ v_{n+1} &= 1{,}015 \times (u_n - 20\,000) \\ v_{n+1} &= 1{,}015 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $q = 1{,}015$, et de premier terme $v_0 = -14\,300$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 20\,000 \\ v_0 &= 5\,700 - 20\,000 \\ v_0 &= -14\,300 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = -14\,300 \\ v_{n+1} & = 1{,}015 \times v_n \end{cases} \; ; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}015$, et de premier terme $v_0 = -14\,300$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ v_n = -14\,300 \times (1{,}015)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 20\,000$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 20\,000$$

Soit :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n = -14\,300 \times (1{,}015)^n + 20\,000}$$

4. À l'aide de la réponse précédente, répondre aux questions suivantes :

On a montré lors de la question **(3.b.)** que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n$$

4. a. Démontrer qu'une valeur approchée du capital restant dû par l'emprunteur au 26 avril 2017 est 2 121,68 euros.

Le 26 avril 2017 on a $n = 15$ donc :

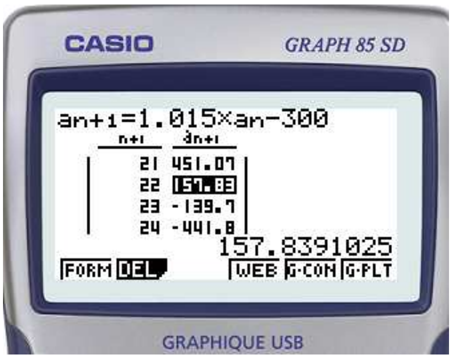
$$u_{15} = 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^{15} \approx \underline{2\ 121.68€}$$

4. b. Déterminer le nombre de mensualités nécessaires pour rembourser intégralement le prêt.

On veut déterminer la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0$, il nous faut donc résoudre cette inéquation. Pour tout entier naturels n :

$$u_n \leqslant 0 \Longleftrightarrow 20\,000 - 14\,300 \times 1,015^n \leqslant 0$$

On utilise alors la calculatrice qui nous donne :



Il faut donc <u>23 mensualité</u> pour rembourser le crédit.

Remarque : l'affichage de la calculatrice présente une troncature au centième et pas un arrondi. Il faut poser le curseur sur le nombre cherché pour avoir plus de chiffres significatifs.

4. c. Quel sera le montant de la dernière mensualité ?

On a $u_{22} \approx 157,84$ donc la dernière mensualité sera de :

$$157,84 \times 1,015 = \underline{160,20€}$$

4. d. Lorsque la personne aura terminé de rembourser son crédit à la consommation, quel sera le coût total de son achat ?

L'emprunteur aura donc payé au total 22 mensualités de 200 euros plus 160,20 euros soit :

$$22 \times 300 + 160,20 = \underline{6\ 760,2€}$$

Correction de l'exercice 28 : Bac ES/L 2016 du Liban - 31 Mai 2016

L'entreprise PiscinePlus, implantée dans le sud de la France, propose des contrats annuels d'entretien aux propriétaires de piscines privées. Le patron de cette entreprise remarque que, chaque année, 12 % de contrats supplémentaires sont souscrits et 6 contrats résiliés. Il se fonde sur ce constat pour estimer le nombre de contrats annuels à venir. En 2015, l'entreprise PiscinePlus dénombrait 75 contrats souscrits. On modélise la situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de contrats souscrits auprès de l'entreprise PiscinePlus l'année $2015+n$. Ainsi, on a $u_0 = 75$.

1.

1. a. Estimer le nombre de contrats d'entretien en 2016.
En 2016, l'entreprise aura gagné 12 % des 75 contrats de 2015 et en aura perdu 6 donc ce qui nous donne un nombre de contrats en 2016 de :

$$75 \times (1 + 12\%) - 6 = 1,12 \times 75 - 6 = \underline{78}$$

1. b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 1,12u_n - 6$.
Pour tout entier n, en $2015 + (n+1)$, l'entreprise aura gagné 12 % des u_n contrats de $2015+n$ et en aura perdu 6 donc ce qui nous donne un nombre de contrats en $2015 + (n+1)$ de :

$$u_{n+1} = u_n \times (1 + 12\%) - 6 = \underline{1,12 \times u_n - 6}$$

2. L'entreprise PiscinePlus peut prendre en charge un maximum de 100 contrats avec son nombre actuel de salariés. Au-delà, l'entreprise devra embaucher davantage de personnel. On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher. Pour cela, on utilise l'algorithme suivant :

Pseudo Code

```
Fonction suite( )
   n ← 0
   u ← 75
   Tant que u ⩽ 100   Faire
       n ← n + 1
       u ← 1,12 × u − 6
   Fin Tant que
   Renvoyer ···
```

2. a. Recopier et compléter la dernière ligne .
On cherche à connaître en quelle année l'entreprise devra embaucher donc à partir de quand le nombre de contrats dépassera 100. Il faut alors en sortie :

$\boxed{\text{renvoyer } 2015+n}$ ou $\boxed{\text{renvoyer } n}$ même si la première solution correspond plus à la question posée.

2. b. Recopier et compléter le tableau ci-dessous, en ajoutant autant de colonnes que nécessaire pour permettre la réalisation de l'algorithme ci-dessus. On arrondira les résultats à l'unité.
On peut ajouter une ligne pour avoir l'année.

Année	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
n	0	1	2	3	4	5	6	7
U arrondi à l'unité	75	78	81	85	89	94	99	105

2. c. Donner la valeur affichée à la fin de l'exécution de cet algorithme puis interpréter cette valeur.
L'algorithme affichera donc $2015 + 7 = 2022$ ce qui correspond à l'année à partir de laquelle le nombre de contrats sera supérieur à 100 ce qui imposera l'embauche de personnel.

3. On pose pour tout entier naturel n : $v_n = u_n - 50$.

3. a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. En préciser la raison et le premier terme.

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier n par :

$$(u_n) : \begin{cases} u_0 & = 75 \\ u_{n+1} & = 1{,}12 \times u_n - 6 \end{cases} \quad \Bigg| \quad (v_n) : \begin{cases} v_0 & \\ v_n & = u_n - 50 \end{cases}$$

Pour tout entier n on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 50 \\ v_{n+1} &= (1{,}12\, u_n - 6) - 50 \\ v_{n+1} &= 1{,}12 \times u_n - 56 \\ v_{n+1} &= 1{,}12 \times \left(u_n + \frac{-56}{1{,}12}\right) \\ v_{n+1} &= 1{,}12 \times (u_n - 50) \\ v_{n+1} &= 1{,}12 \times v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc une <u>suite géométrique</u> de raison $q = 1{,}12$, et de premier terme $v_0 = 25$ puisque :

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - 50 \\ v_0 &= 75 - 50 \\ v_0 &= 25 \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{(v_n) : \begin{cases} v_0 & = 25 \\ v_{n+1} & = 1{,}12 \times v_n \end{cases} \; ; \; \forall n \in \mathbb{N}}$$

3. b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis que, pour tout entier naturel n, on a $u_n = 25 \times 1,12^n + 50$.

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 1{,}12$, et de premier terme $v_0 = 25$ donc son terme général est

$$\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; v_n = v_0 \times (q)^n$$

Soit

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; v_n = 25 \times (1{,}12)^n}$$

De l'égalité définie pour tout entier n :

$$v_n = u_n - 50$$

On peut en déduire l'expression :

$$u_n = v_n + 50$$

Soit :

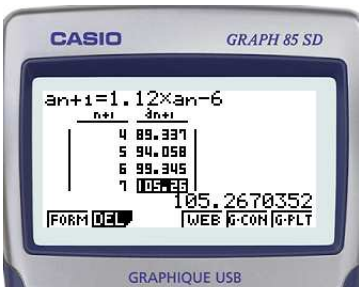
$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; u_n = 25 \times (1{,}12)^n + 50}$$

3. c. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n > 100$ à l'aide de la calculatrice.

Pour tout entier naturels n :

$$u_n > 100 \iff 25 \times 1,12^n + 50 > 100$$

On utilise alors la calculatrice qui nous donne :



Puisque n est entier, l'ensemble des solutions de l'inéquation est donc composé des entiers naturels supérieurs ou égaux

3. d. Quel résultat de la question 2 retrouve-t-on ?

On retrouve alors le premier rang de l'année $2015 + n$ pour lequel le nombre de contrats est supérieur strictement à 100 soit $n = 7$ comme nous l'avons vu dans la question **(2.c.)**.