Math93.com

# TD 1 - 1re Spé. Maths
# Trigonométrie

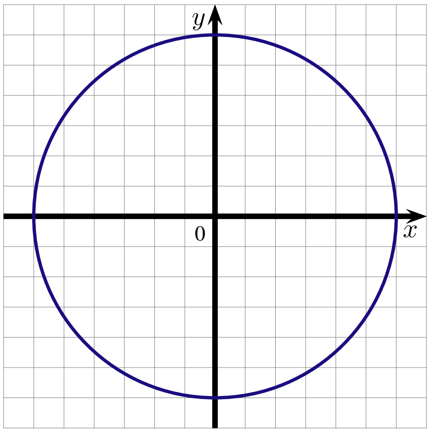
## Table des matières

# Partie I. Enroulement de la droite des réels

## Exercice 1. Des points sur le cercle trigonométrique

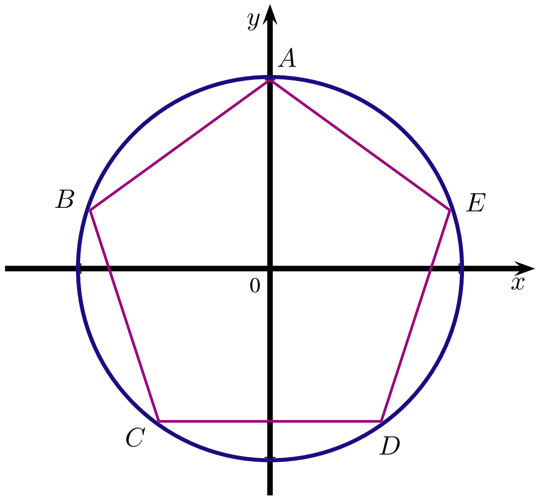
Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D , E et F repérés respectivement par les réels

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}.$$



## Exercice 2. Dans un pentagone

Le pentagone $ABCDE$ est inscrit dans le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.




**1.** Quelle est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ?

**2.** À quels réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont associés les sommets de ce pentagone ?

| Point | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| Réel associé dans $]-\pi\,;\,\pi]$ | $\frac{\pi}{2}$ | ...... | ...... | ...... | ...... |

**Réponses**

*(1.)* $\overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi}{5}$ *(2.)* $B\left(\frac{9\pi}{10}\right)$ ; $C\left(-\frac{7\pi}{10}\right)$ ; $D\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$ ; $E\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

## Exercice 3. Notion de mesure principale

**Rappels**

1. Par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, on peut associer à tout réel un unique point du cercle.

2. Soit $x$ un réel et M un point du cercle trigonométrique associé au réel $x$, alors le point M est associé à tous les réels de la forme $x + k \times 2\pi$, où $k$ est un entier relatif ,$k \in \mathbb{Z}$ .

3. **Mesure principale**.
Parmi tous les réels de la forme $x + k \times 2\pi$, (où $k$ est un entier relatif) qui sont associés( au point M, on va privilégier celui qui appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
Dans le repère orthonormé (O ; I ; J), cela correspond en fait au plus petit arc reliant I et M.

**1.** Soit A le point image du nombre réel $\dfrac{27\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique.

**1. a.** Effectuer la division euclidienne de 27 par 4.

$$\begin{array}{r|l} 2\ 7 & 4 \\ \hline 3 & 6 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad 27 = 4 \times \cdots + \cdots$$

**1. b.** Montrer alors que $\dfrac{27\pi}{4}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{27\pi}{4} = \alpha + k \times 2\pi \quad , \quad \text{avec } \begin{cases} \alpha \in ]-\pi\ ;\ \pi] \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

**1. c.** Le réel $\alpha$ est alors la mesure principale de $\dfrac{27\pi}{4}$. Placer le point A sur le cercle trigonométrique.

**2.** Soit B le point image sur le cercle trigonométrique du nombre réel $-\dfrac{17\pi}{3}$ .

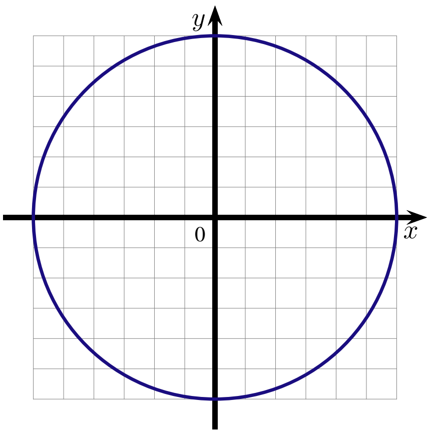
Déterminer la mesure principale du réel $-\dfrac{17\pi}{3}$, c'est à dire déterminer le réel $\alpha$ de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ qui a le même point image B sur le cercle. Placer B sur le cercle.

**3.** Soit C le point image sur le cercle trigonométrique du nombre réel $\dfrac{163\pi}{4}$ .

Déterminer la mesure principale du réel $\dfrac{163\pi}{4}$, c'est à dire déterminer le réel $\alpha$ de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ qui a le même point image C sur le cercle. Placer C sur le cercle.

**4.** Soit D le point image sur le cercle trigonométrique du nombre réel $\dfrac{1045\pi}{3}$ .

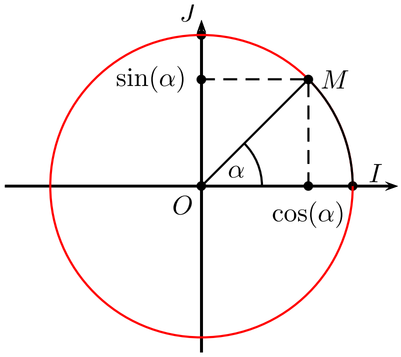
Déterminer la mesure principale du réel $\dfrac{1045\pi}{3}$ et placer D sur le cercle.



**Réponses**

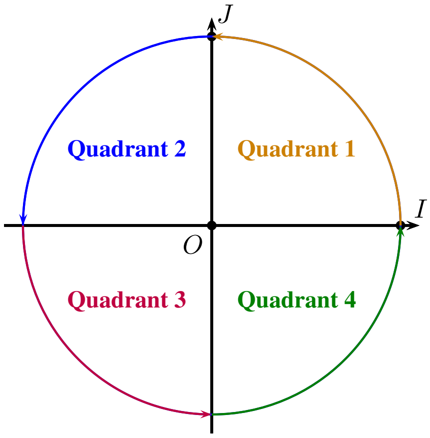
*1°) et 2°)* $A\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ *;* $B\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ *; corrigé en vidéo ; 3°)* $C\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ *corrigé en vidéo*

# Partie II. Cosinus et sinus d'un réel




| Angle en degré | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Angle en radian $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-1$ |
| $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | Non défini | 0 |

## Exercice 4. Dans les quadrants

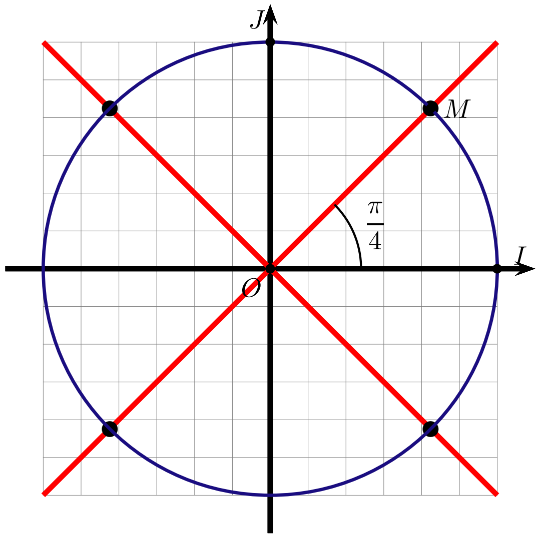



On considère le cercle trigonométrique ci-contre.
M est le point image sur le cercle d'un nombre réel $x$.
Recopier et compléter le tableau suivant avec le signe de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de la position du point M sur le cercle.

| M est dans le quadrant ... | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| Signe de $\cos(x)$ | | | | |
| Signe de $\sin(x)$ | | | | |

## Exercice 5. Sinus et cosinus d'angles remarquables : à partir de $\frac{\pi}{4}$

**1.** On sait qu'un angle $\frac{\pi}{4}$ radian correspond à un angle de 45 degré. Cela nous permet de placer facilement le point M du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{4}$. Il suffit de prendre le point du cercle qui est sur la première bissectrice du repère (O ; I ; J). On a construit ce point M.




**2.** Placer les points A, B et C du cercle trigonométrique associés aux réels :

$$\frac{3\pi}{4}\,;\,-\frac{\pi}{4}\,;\,-\frac{3\pi}{4}.$$

**3.** Donner les valeurs exactes des sinus et cosinus des réels précédents.

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \end{cases}$$

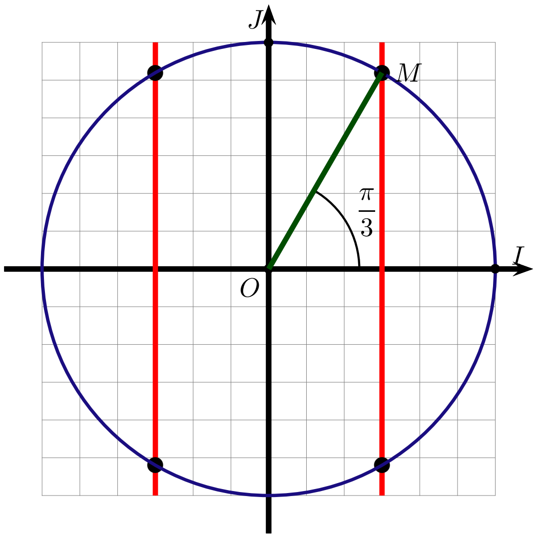
## Exercice 6. Sinus et cosinus d'angles remarquables : à partir de $\frac{\pi}{3}$

**1.** On sait que le cosinus de $\frac{\pi}{3}$ vaut $\frac{1}{2}$ et cela nous permet de placer facilement le point M du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{3}$. Il suffit de prendre le point du cercle d'abscisse 0,5. On a placé ce point M.

**2.** En utilisant la méthode de construction de l'hexagone régulier et des symétrie évidentes, placer les points A, B et C du cercle trigonométrique associés aux réels :

$$\frac{2\pi}{3} ; -\frac{\pi}{3} ; -\frac{2\pi}{3}.$$

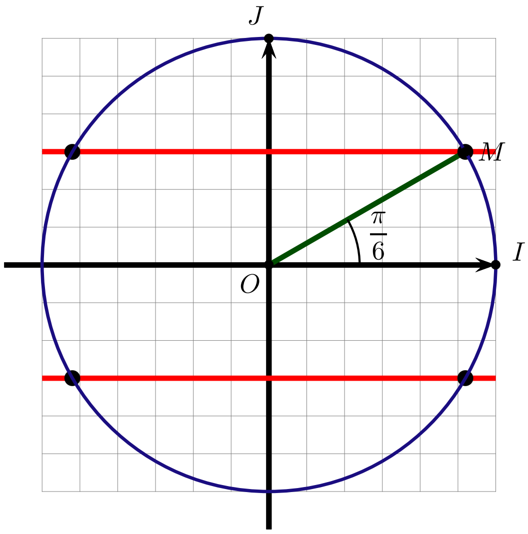
**3.** Donner les valeurs exactes des sinus et cosinus des réels précédents.




$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases} \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \\ \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \end{cases}$$

## Exercice 7. Sinus et cosinus d'angles remarquables : à partir de $\frac{\pi}{6}$




1. On sait que le sinus de $\frac{\pi}{6}$ vaut $\frac{1}{2}$ et cela nous permet de placer facilement le point M du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{6}$. Il suffit de prendre le point du cercle d'ordonnée 0,5. On a placé ce point M.

2. En utilisant des symétrie évidentes, placer les points A, B et C du cercle trigonométrique associés aux réels :

$$\frac{5\pi}{6}\,;-\frac{\pi}{6}\,;-\frac{5\pi}{6}.$$

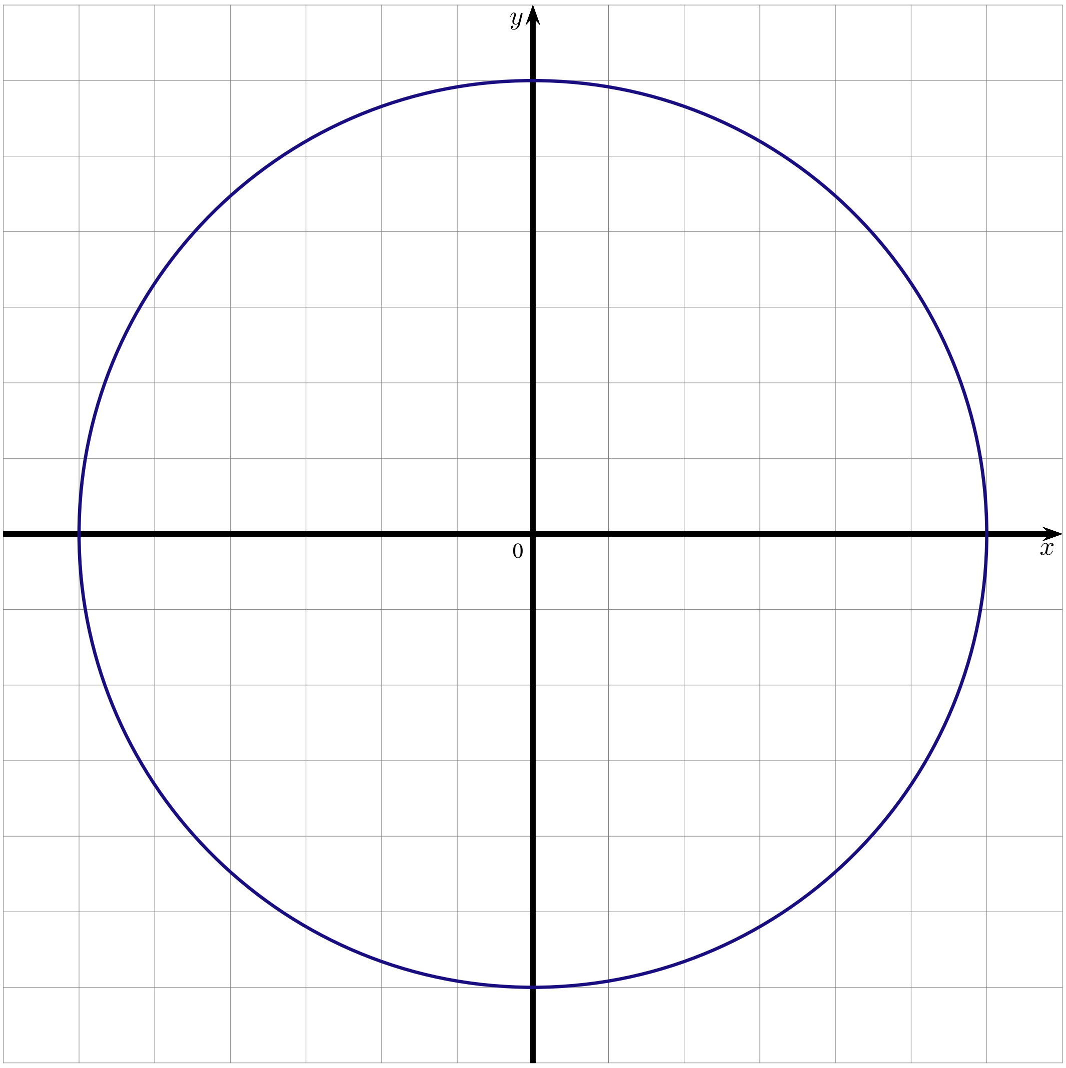
3. Donner les valeurs exactes des sinus et cosinus des réels précédents.

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \end{cases}$$

## Exercice 8. Des points sur le cercle trigonométrique, et leurs coordonnées

**1.** Placer sur le cercle trigonométrique les points $A$, $B$, $C$ et $D$ repérés respectivement par les réels $-\dfrac{2\pi}{3}$, $-\dfrac{3\pi}{4}$, $\dfrac{5\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.




**2.** Donner les coordonnées des quatre points $A$, $B$, $C$ et $D$.

**Réponses**

*(2.)* $A\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ; $B\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\,;\,-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ; $C\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ ; $D\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

# Partie III. Calculer en utilisant les angles remarquables

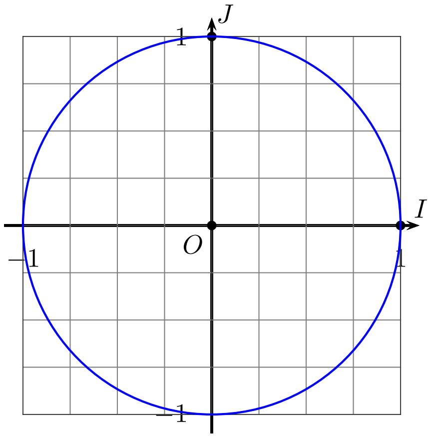
## Exercice 9. Utiliser les angles remarquables

Sans utiliser de calculatrice, calculer :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$$

## Exercice 10. Calculer et réduire au même dénominateur 1

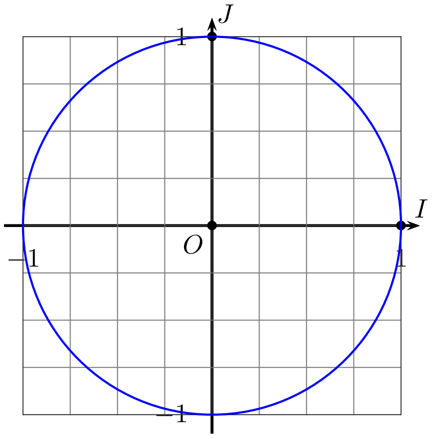
Sans calculatrice, calculer et réduire au même dénominateur les expressions suivantes.
On pourra s'aider du cercle trigonométrique et on indiquera les étapes intermédiaires.




1. $A = \cos\left(\dfrac{-\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{-7\pi}{4}\right)$
2. $B = \cos\left(\dfrac{5\pi}{3}\right) - \sin(2\pi) + \cos\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$
3. $C = \cos(-2018\pi) - \cos\left(\dfrac{-\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$
4. $D = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$

## Exercice 11. Calculer les expressions trigonométriques

Sans calculatrice, calculer les expressions suivantes.
On pourra s'aider du cercle trigonométrique et on indiquera les étapes intermédiaires s'il y en a.




1. $A = \cos^2\left(\dfrac{-\pi}{13}\right) + \sin^2\left(\dfrac{-\pi}{13}\right)$
2. $B = \cos^2\left(\dfrac{-\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\dfrac{-\pi}{6}\right)$
3. $C = \sin\left(\dfrac{-5\pi}{6}\right) \times \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(-\pi\right)$
4. $D = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}$

# Partie IV. A partir du cosinus ou sinus d'un angle particulier

## Exercice 12. A partir d'un cosinus de $\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, déterminer :

**a.** $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

**b.** $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$

**c.** $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$

**d.** $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

**e.** $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

## Exercice 13. A partir d'un sinus de $\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ $(c)$

Sachant que $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

**1.** Calculer la valeur exacte de $\cos^2\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

**2.** En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ .

# Partie V. Déterminer un angle connaissant sinus ou cosinus

## Exercice 14. Arcsin et Arccos

**1.** En utilisant les touches $\boxed{\cos^{-1}}$ ou $\boxed{\text{arccos}}$ et $\boxed{\sin^{-1}}$ ou $\boxed{\text{arcsin}}$ de la calculatrice, déterminer une valeur de $x$ arrondie à 0,1 degré près, en degré puis en radian dans les cas suivants.

| | | |
|---|---|---|
| $\cos(x) = 0,5$ | $\sin(x) = 0,2$ | $\sin(x) = -0,5$ |

**2.** La calculatrice affiche-t-elle toutes les possibilités ? Justifier.

## Exercice 15. Déterminer un angle connaissant le sinus ou le cosinus

Donner, dans chaque cas, deux réels $x$ dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ vérifiant la condition donnée.

**1.** Sans utiliser la calculatrice, déterminer une valeur de $x$ dans les cas suivants.

| | | |
|---|---|---|
| $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ | $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ |

**2.** Donner toutes les valeurs possibles.

# Partie VI. Équations trigonométriques

## Exercice 16. Équations trigonométriques

Dans chaque cas, déterminer les réels $x$ tels que :

**1.** $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left]-\pi; \pi\right]$

**2.** $\sin x = \dfrac{1}{2}$ et $x \in [0; \pi]$

## Exercice 17. Équations trigonométriques

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ l'équation $4\cos^2 x - 3 = 0$.

## Exercice 18. Équations trigonométriques

Soit $x$ un réel de l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ tel que $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Calculer $\cos x$.

## Exercice 19. Équations

**1.** Soit pour $X$ réel l'expression du second degré

$$A(X) = X^2 - X - \frac{3}{4}$$

**1. a.** Par la méthode de votre choix, montrer que la forme canonique de $A(X)$ est :

$$A(x) = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

**1. b.** Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(X) = 0$.

**2.** En déduire les solutions dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ de l'équation :

$$\sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

**Remarque**

$\sin^2 x = \left(\sin x\right)^2$

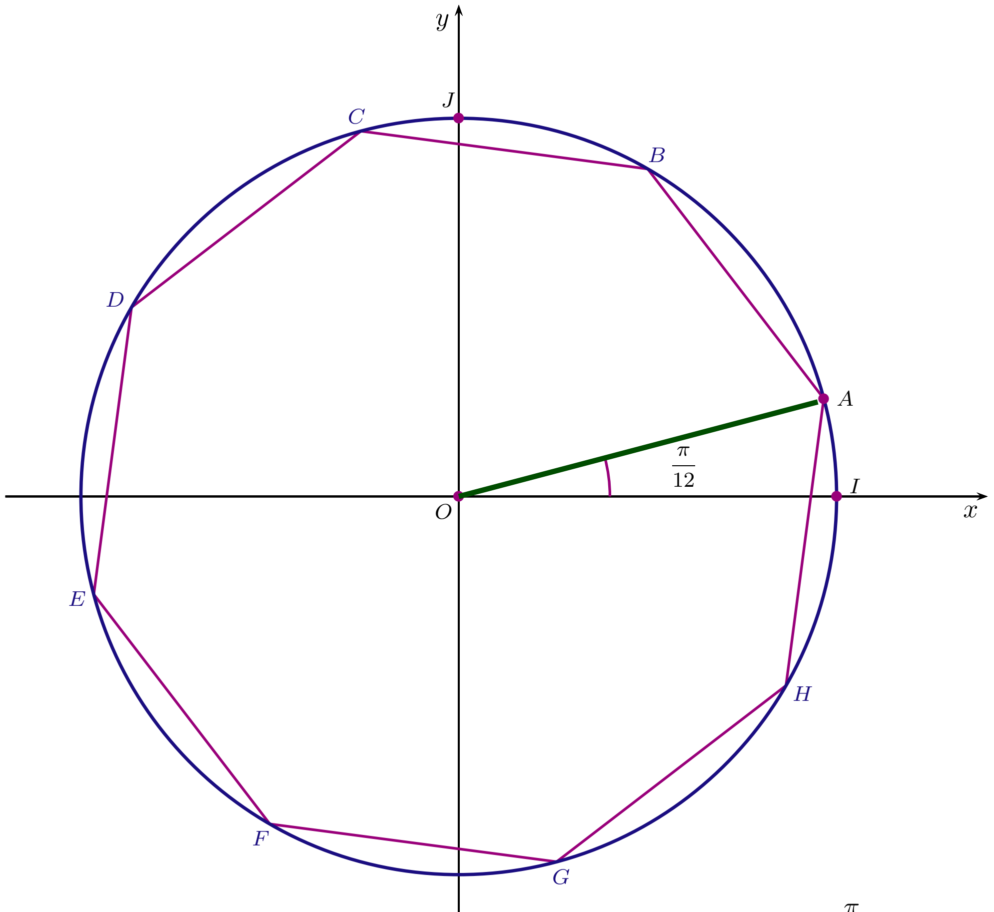
**Réponses**

- *Exercice 16* : *(1.)* $x = \frac{3\pi}{4}$ *ou* $x = -\frac{3\pi}{4}$ *(2.)* $x = \frac{5\pi}{6}$ *ou* $x = \frac{\pi}{6}$
- *Exercice 17* : $x = \frac{5\pi}{6}$ *ou* $x = \frac{\pi}{6}$
- *Exercice 18* : $\cos x = -\frac{\sqrt{6}}{3}$
- *Exercice 19* : *(1.)* $X = -\frac{1}{2}$ *ou* $X = \frac{3}{2}$ *(2.)* $S = \left\{-\frac{\pi}{6}\ ;\ -\frac{5\pi}{6}\right\}$.

# Partie VII. Bilan et compléments

## Exercice 20. Octogone : Un polygone régulier ABCDEFGH

Sur le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé $(O; I, J)$, on a tracé l'octogone $ABCDEFGH$ , un polygone régulier à huit côtés.




Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique, le point $A$ est associé au réel $\frac{\pi}{12}$.

Le polygone régulier ABCDEFGH ayant des angles au centre égaux à $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$, le point $B$ est associé au réel : $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3}$.

**1.** Compléter le tableau suivant :

| Point | A | B | C | D | E | F | G | H |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Réel associé dans $]-\pi\,;\,\pi]$ | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{3}$ | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... | ...... |

**2.** Donner les valeurs exactes des coordonnées du point $B$.

**3.** On donne $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

**3. a.** Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

**3. b.** En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus des réels $\frac{11\pi}{12}$ et $\frac{13\pi}{12}$.

**Réponses**

*(1.)* $\frac{7\pi}{12}$ ; $\frac{5\pi}{6}$ ; $-\frac{11\pi}{12}$ ; $-\frac{2\pi}{3}$ ; $-\frac{5\pi}{12}$ ; $-\frac{\pi}{6}$ *(2.)* $B\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *(3.a.)* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

*(3.b.)* $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ; $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ; $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ; $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

## Exercice 21. Avec la tangente

La tangente d'un réel $x$ est définie par $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour toutes les valeurs de $x \in \mathcal{D}_T$ où $\cos(x) \neq 0$.
Montrer que pour tous les réels $x \in \mathcal{D}_T$, on a :

$$\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1$$

## Exercice 22. Angle Addition formulas and more (c)

On admet les formules suivantes :

**Formules d'addition (Si-CO-CO-SI CO-CO-SI-SI)**

Pour tous les réels $a$ et $b$ on a :

- $\sin(a+b) = \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$

**Mémo**

1. Si-CO-CO-SI CO-CO-SI-SI
2. priorité au Sinus et à l'addition
3. moins 1 à la dernière.

En utilisant, entre autres, les formules d'addition établir les formules :

1. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.
2. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(b)\sin(a)$.
3. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
4. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Formules de duplication du cosinus

5. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.
6. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$
7. $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

Formules de duplication du sinus

8. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.
9. $\sin 2a = \dfrac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$.

Formules de duplication de la tangente

10. $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Power reducing Formulas

11. $\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$.
12. $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$.
13. $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

Sum-to-Product Formulas

14. $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.
15. $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right).\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)$.

## Exercice 23. $\cos\dfrac{\pi}{8}$

1. A l'aide d'une des formules précédentes de l'exercice 22, calculer la valeur exacte de $\cos^2\dfrac{\pi}{8}$.

2. En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

## Exercice 24. A partir de tan $x/2$

En posant $t = \tan \dfrac{a}{2}$, montrer que, sous réserve d'existence avec $a$ réel :

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2}\ ;\ \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ;\ \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

## Exercice 25. A partir de $\cos \dfrac{2\pi}{5}$ (c)

On souhaite déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Pour cela, on considère un triangle $\mathrm{ABC}$ isocèle en $\mathrm{A}$ tel que $\mathrm{AB}=2$ et $\widehat{\mathrm{ABC}}=\dfrac{2\pi}{5}$.

On note $\mathrm{BC}=\ell$ où $\ell$ est un réel strictement positif.

On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et on note $\mathrm{M}$ le point d'intersection de cette bissectrice avec le segment $[\mathrm{AC}]$.

**1.** Déterminer la mesure en radian de tous les angles du triangle $\mathrm{ABC}$.

**2.** Déterminer la mesure en radian de tous les angles du triangle $\mathrm{BMC}$ et en déduire que ce triangle est isocèle.

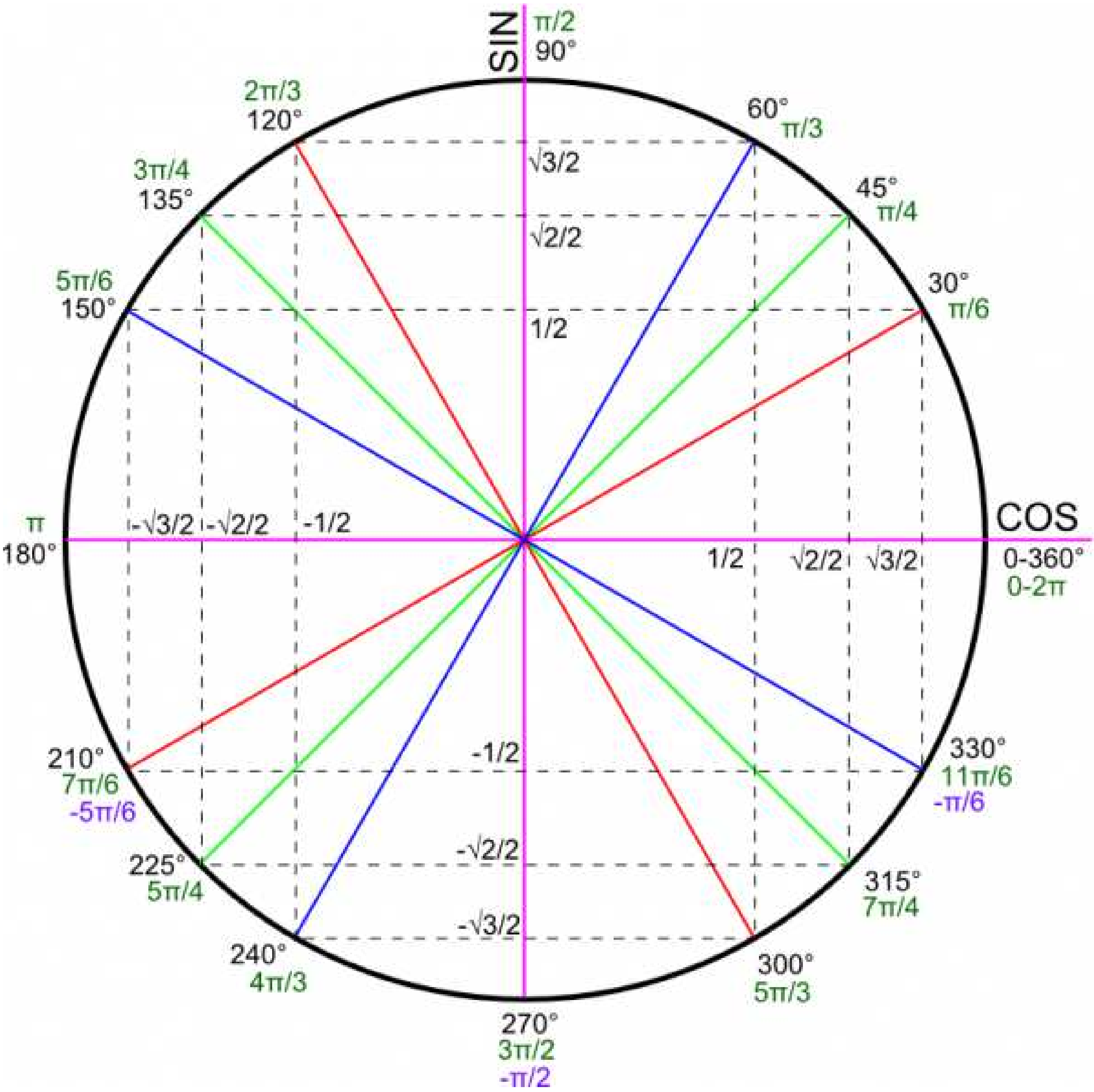
**3.** Démontrer que le triangle $\mathrm{BMA}$ est isocèle.

**4.** Que peut-on déduire pour les longueurs $\mathrm{BC}$, $\mathrm{BM}$ et $\mathrm{AM}$.

**5.** On peut alors démontrer que les triangles $\mathrm{ABC}$ et $\mathrm{BMC}$ sont semblables ; autrement dit, $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{CM}}{\mathrm{BC}}$.
Démontrer que $\ell$ est solution de l'équation $(\ell+1)^2-5=0$ et en déduire alors sa valeur.

**6.** En utilisant la construction d'une autre droite, démontrer que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{4}\times(\sqrt{5}-1)$.

# Partie VIII. Annexe



# Partie IX. Corrections

## Correction de l'exercice 13

On donne $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

**1.** Calculer la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

On sait que : $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1$ donc $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

**2.** En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

On a $\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{12} < \frac{3\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) < 0$ et donc $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\sqrt{\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

## Correction de l'exercice 25

On souhaite déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
Pour cela, on considère un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = 2$ et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{5}$.
On note $BC = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.
On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et on note $M$ le point d'intersection de cette bissectrice avec le segment $[AC]$.

**1.** Déterminer la mesure en radian de tous les angles du triangle ABC.

Comme le triangle $ABC$ est isocèle en $A$, les angles à sa base font la même mesure, on a donc $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}=\frac{2\pi}{5}$ rad. De plus, la somme des angles d'un triangle étant égale à $180^\circ=\pi$ rad, on a $\widehat{BAC}=\pi-\frac{2\pi}{5}-\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{5}$ rad.

**2.** Déterminer la mesure en radian de tous les angles du triangle BMC et en déduire que ce triangle est isocèle.

On sait déjà que $\widehat{BCM}=\widehat{BCA}=\frac{2\pi}{5}$ rad. De plus, comme $[BM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, on a $\widehat{MBC}=\frac{\frac{2\pi}{5}}{2}=\frac{\pi}{5}$ rad. Enfin, en utilisant la somme des angles d'un triangle, on trouve que $\widehat{BMC}=\pi-\frac{2\pi}{5}-\frac{\pi}{5}=\frac{2\pi}{5}$ rad. Le triangle $BCM$ admet donc deux angles égaux, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{BCM}$, il est donc isocèle en $B$.

**3.** Démontrer que le triangle BMA est isocèle.

On sait que : $\widehat{BAM}=\frac{\pi}{5}$ rad et que, par construction de la bissectrice, $\widehat{ABM}=\frac{\pi}{5}$ rad donc le triangle $ABM$ est isocèle en $M$.

**4.** Que peut-on déduire pour les longueurs BC, BM et AM.

Comme $ABM$ est isocèle en $M$, on a : $AM=BM$.
Comme $BCM$ est isocèle en $B$, on a : $BM=BC$. On en déduit donc que : $BC=BM=AM=\ell$.

**5.** On peut alors démontrer que les triangles ABC et BMC sont semblables ; autrement dit, $\frac{BC}{AB}=\frac{CM}{BC}$.
Démontrer que $\ell$ est solution de l'équation $(\ell+1)^2-5=0$ et en déduire alors sa valeur.

On utilise l'égalité des quotients donnée, en remplaçant par les valeurs de l'énoncé et en remarquant que : $CM=AC-AM=2-\ell$. On obtient alors $\frac{\ell}{2}=\frac{2-\ell}{\ell}$ ce qu'on peut réécrire comme suit : $\ell^2+2\ell-4=0$, ou bien encore $(\ell+1)^2-5=0$.
On résout maintenant l'équation trouvée :
$(\ell+1)^2-5=0 \Leftrightarrow (\ell+1)^2=5 \Leftrightarrow \ell+1=\sqrt{5}$ ou $\ell+1=-\sqrt{5}$. On a donc $\ell=\sqrt{5}-1$ ou $\ell=-\sqrt{5}-1$. La deuxième solution étant négative, ce qui est impossible pour une longueur, on a au final $\ell=\sqrt{5}-1$.

**6.** En utilisant la construction d'une autre droite, démontrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{4}\times(\sqrt{5}-1)$.

Soit $H$ le pied de la hauteur issue de $A$. Comme $ABC$ est un triangle isocèle en $A$, cette hauteur est aussi la médiatrice du segment $[CB]$, on a donc : $BH=HC=\frac{\ell}{2}$. Et pour finir, le triangle $ABH$ étant rectangle en $H$, on peut utiliser la trigonométrie, et on obtient : $\cos(\frac{\pi}{5})=\cos(\widehat{ABH})=\frac{BH}{BA}=\frac{\frac{\ell}{2}}{2}=\frac{\ell}{4}=\frac{1}{4}\times(\sqrt{5}-1)$.