Math93.com

TD 1 - 1re Spé. Maths
Trigonométrie

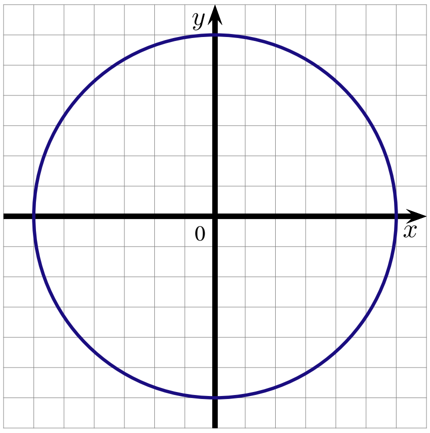
Table des matières

Partie I. Enroulement de la droite des réels

Exercice 1. Des points sur le cercle trigonométrique

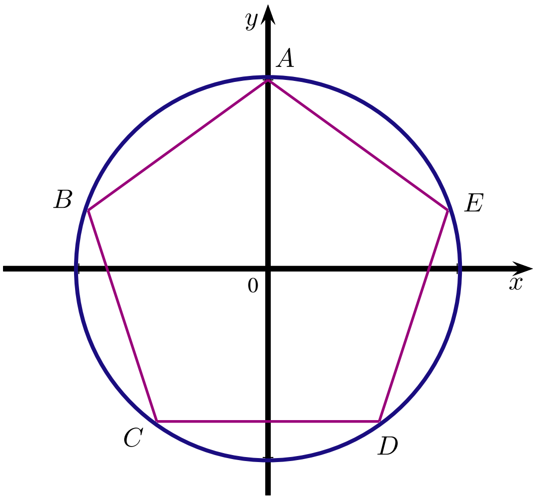
Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C, D , E et F repérés respectivement par les réels

$$\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}.$$



Exercice 2. Dans un pentagone

Le pentagone $ABCDE$ est inscrit dans le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$.



1. Quelle est la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$?

2. À quels réels de l'intervalle $]-\pi;\pi]$ sont associés les sommets de ce pentagone ?

Point	A	B	C	D	E
Réel associé dans $]-\pi\,;\,\pi]$	$\frac{\pi}{2}$	......	......	......	......

Réponses

(1.) $\overset{\frown}{AB} = \frac{2\pi}{5}$ (2.) $B\left(\frac{9\pi}{10}\right)$; $C\left(-\frac{7\pi}{10}\right)$; $D\left(-\frac{3\pi}{10}\right)$; $E\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 3. Notion de mesure principale

Rappels

1. Par enroulement de la droite numérique sur le cercle trigonométrique, on peut associer à tout réel un unique point du cercle.
2. Soit x un réel et M un point du cercle trigonométrique associé au réel x, alors le point M est associé à tous les réels de la forme $x + k \times 2\pi$, où k est un entier relatif ,$k \in \mathbb{Z}$.
3. **Mesure principale**.
Parmi tous les réels de la forme $x + k \times 2\pi$, (où k est un entier relatif) qui sont associés(au point M, on va privilégier celui qui appartient à l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$.
Dans le repère orthonormé (O ; I ; J), cela correspond en fait au plus petit arc reliant I et M.

1. Soit A le point image du nombre réel $\frac{27\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique.

1. a. Effectuer la division euclidienne de 27 par 4.

$$\begin{array}{r|l} 2\ 7 & 4 \\ \hline 3 & 6 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad 27 = 4 \times \cdots + \cdots$$

1. b. Montrer alors que $\frac{27\pi}{4}$ peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{27\pi}{4} = \alpha + k \times 2\pi \quad , \quad \text{avec} \begin{cases} \alpha \in]-\pi\ ;\ \pi] \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

1. c. Le réel α est alors la mesure principale de $\frac{27\pi}{4}$. Placer le point A sur le cercle trigonométrique.

2. Soit B le point image sur le cercle trigonométrique du nombre réel $-\frac{17\pi}{3}$.

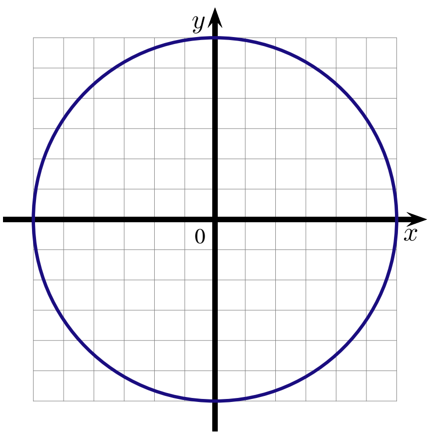
Déterminer la mesure principale du réel $-\frac{17\pi}{3}$, c'est à dire déterminer le réel α de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ qui a le même point image B sur le cercle. Placer B sur le cercle.

3. Soit C le point image sur le cercle trigonométrique du nombre réel $\frac{163\pi}{4}$.

Déterminer la mesure principale du réel $\frac{163\pi}{4}$, c'est à dire déterminer le réel α de l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ qui a le même point image C sur le cercle. Placer C sur le cercle.

4. Soit D le point image sur le cercle trigonométrique du nombre réel $\frac{1045\pi}{3}$.

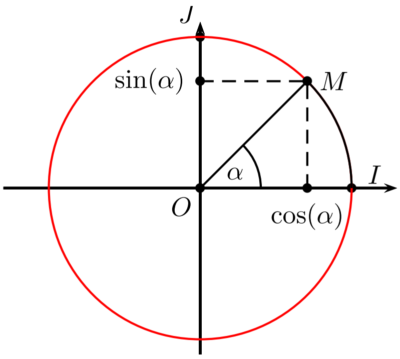
Déterminer la mesure principale du réel $\frac{1045\pi}{3}$ et placer D sur le cercle.



Réponses

1°) et 2°) A $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ *; B* $\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$ *; corrigé en vidéo ; 3°) C* $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ *corrigé en vidéo*

Partie II. Cosinus et sinus d'un réel

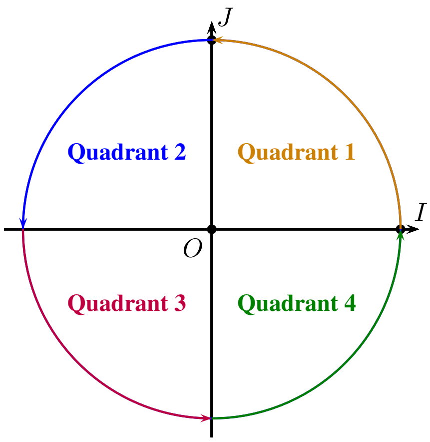


Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Angle en radian x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Non défini	0

Exercice 4. Dans les quadrants

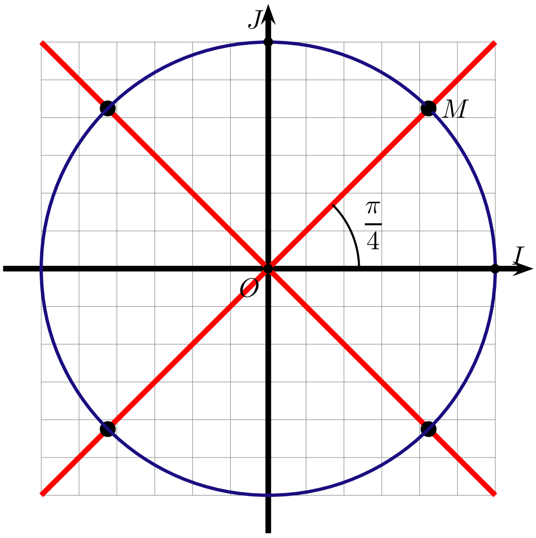
On considère le cercle trigonométrique ci-contre.
M est le point image sur le cercle d'un nombre réel x.
Recopier et compléter le tableau suivant avec le signe de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de la position du point M sur le cercle.

M est dans le quadrant ...	1	2	3	4
Signe de $\cos(x)$				
Signe de $\sin(x)$				



Exercice 5. Sinus et cosinus d'angles remarquables : à partir de $\frac{\pi}{4}$

1. On sait qu'un angle $\frac{\pi}{4}$ radian correspond à un angle de 45 degré. Cela nous permet de placer facilement le point M du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{4}$. Il suffit de prendre le point du cercle qui est sur la première bissectrice du repère (O ; I ; J). On a construit ce point M.



2. Placer les points A, B et C du cercle trigonométrique associés aux réels :

$$\frac{3\pi}{4}\,;\,-\frac{\pi}{4}\,;\,-\frac{3\pi}{4}.$$

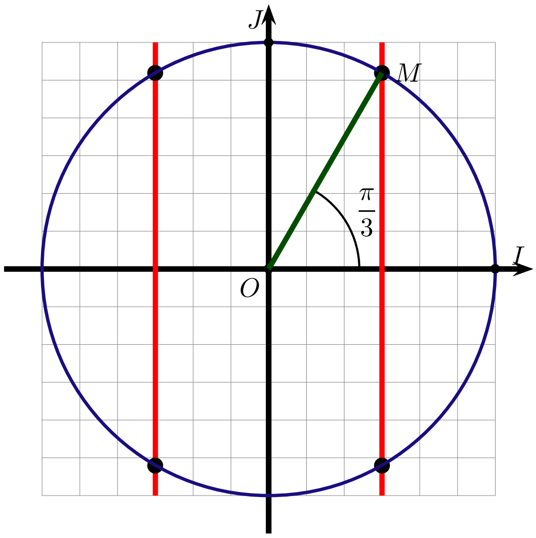
3. Donner les valeurs exactes des sinus et cosinus des réels précédents.

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \\ \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \end{cases}$$

Exercice 6. Sinus et cosinus d'angles remarquables : à partir de $\frac{\pi}{3}$

1. On sait que le cosinus de $\frac{\pi}{3}$ vaut $\frac{1}{2}$ et cela nous permet de placer facilement le point M du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{3}$. Il suffit de prendre le point du cercle d'abscisse 0,5. On a placé ce point M.



2. En utilisant la méthode de construction de l'hexagone régulier et des symétrie évidentes, placer les points A, B et C du cercle trigonométrique associés aux réels :

$$\frac{2\pi}{3}\,;\,-\frac{\pi}{3}\,;\,-\frac{2\pi}{3}.$$

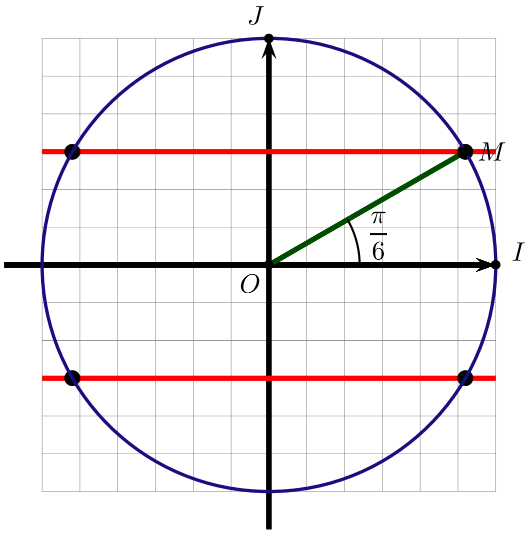
3. Donner les valeurs exactes des sinus et cosinus des réels précédents.

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \\ \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \\ \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \\ \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \end{cases}$$

Exercice 7. Sinus et cosinus d'angles remarquables : à partir de $\frac{\pi}{6}$

1. On sait que le sinus de $\frac{\pi}{6}$ vaut $\frac{1}{2}$ et cela nous permet de placer facilement le point M du cercle trigonométrique associé à $\frac{\pi}{6}$. Il suffit de prendre le point du cercle d'ordonnée 0,5. On a placé ce point M.



2. En utilisant des symétrie évidentes, placer les points A, B et C du cercle trigonométrique associés aux réels :

$$\frac{5\pi}{6}\,;\,-\frac{\pi}{6}\,;\,-\frac{5\pi}{6}.$$

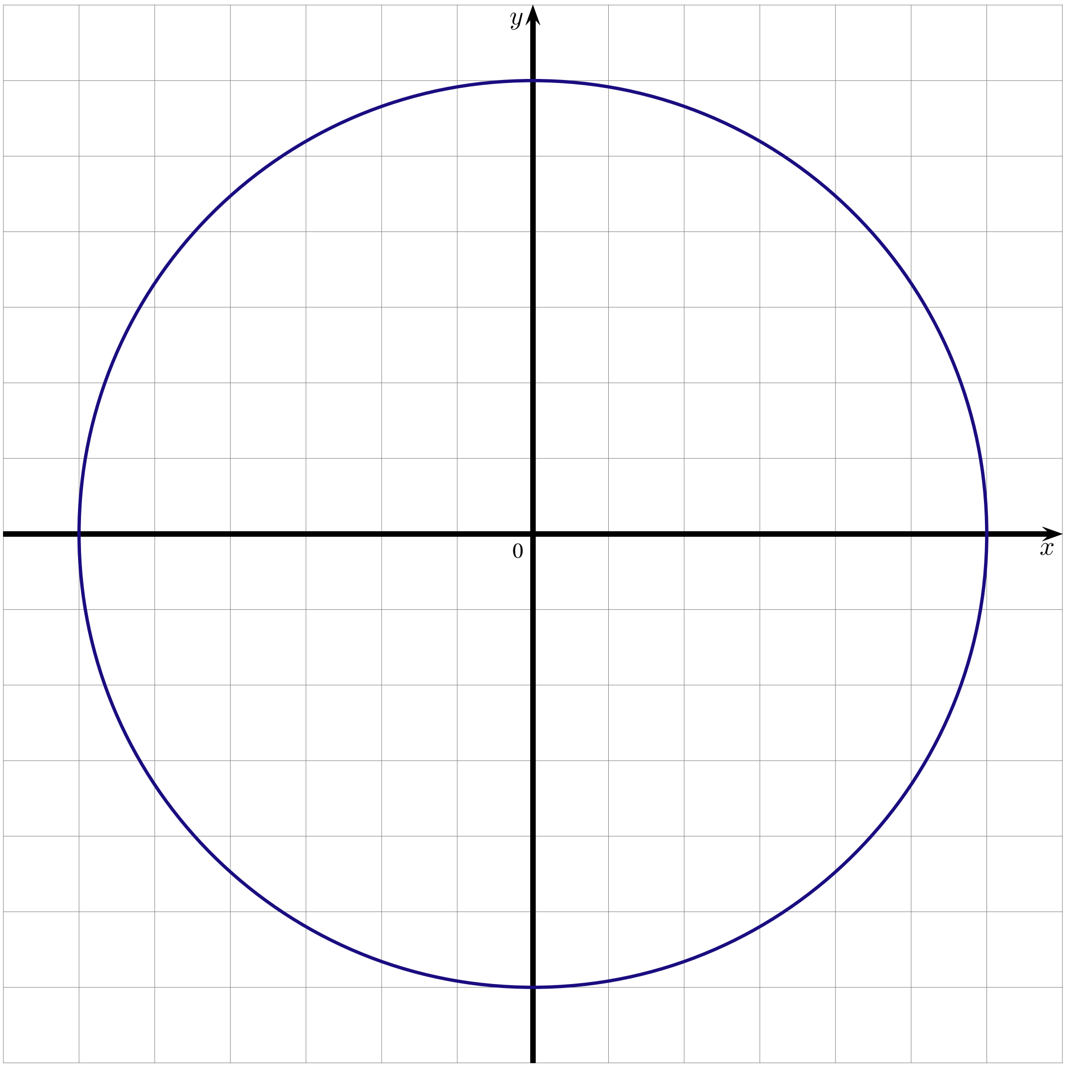
3. Donner les valeurs exactes des sinus et cosinus des réels précédents.

$$\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\ \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \\ \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \end{cases} \qquad \begin{cases}\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \\ \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = \end{cases}$$

Exercice 8. Des points sur le cercle trigonométrique, et leurs coordonnées

1. Placer sur le cercle trigonométrique les points A, B, C et D repérés respectivement par les réels $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$.



2. Donner les coordonnées des quatre points A, B, C et D.

Réponses

(2.) $A\left(-\frac{1}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $C\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$; $D\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Partie III. Calculer en utilisant les angles remarquables

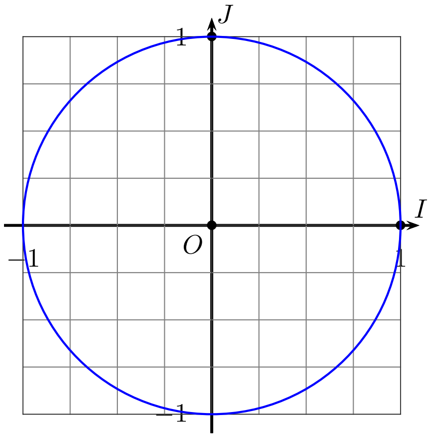
Exercice 9. Utiliser les angles remarquables

Sans utiliser de calculatrice, calculer :

$$A = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin(\pi)$$

Exercice 10. Calculer et réduire au même dénominateur 1

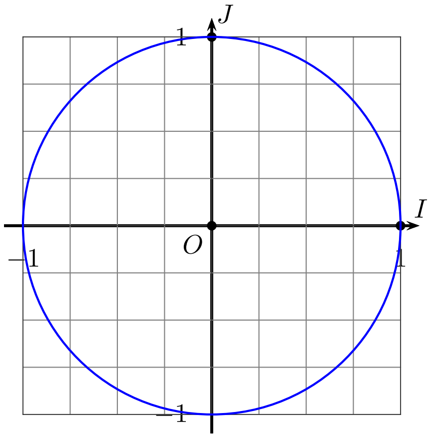
Sans calculatrice, calculer et réduire au même dénominateur les expressions suivantes.
On pourra s'aider du cercle trigonométrique et on indiquera les étapes intermédiaires.



1. $A = \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{-7\pi}{4}\right)$
2. $B = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) - \sin(2\pi) + \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)$
3. $C = \cos(-2018\pi) - \cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
4. $D = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

Exercice 11. Calculer les expressions trigonométriques

Sans calculatrice, calculer les expressions suivantes.
On pourra s'aider du cercle trigonométrique et on indiquera les étapes intermédiaires s'il y en a.



1. $A = \cos^2\left(\frac{-\pi}{13}\right) + \sin^2\left(\frac{-\pi}{13}\right)$
2. $B = \cos^2\left(\frac{-\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{-\pi}{6}\right)$
3. $C = \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - \cos\left(-\pi\right)$
4. $D = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$

Partie IV. A partir du cosinus ou sinus d'un angle particulier

Exercice 12. A partir d'un cosinus de $\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, déterminer :

a. $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

b. $\cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)$

c. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}\right)$

d. $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

e. $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$

Exercice 13. A partir d'un sinus de $\left(\frac{7\pi}{12}\right)$ (c)

Sachant que $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

Partie V. Déterminer un angle connaissant sinus ou cosinus

Exercice 14. Arcsin et Arccos

1. En utilisant les touches $\boxed{\cos^{-1}}$ ou $\boxed{\text{arccos}}$ et $\boxed{\sin^{-1}}$ ou $\boxed{\text{arcsin}}$ de la calculatrice, déterminer une valeur de x arrondie à 0,1 degré près, en degré puis en radian dans les cas suivants.

$\cos(x) = 0,5$ | $\sin(x) = 0,2$ | $\sin(x) = -0,5$

2. La calculatrice affiche-t-elle toutes les possibilités ? Justifier.

Exercice 15. Déterminer un angle connaissant le sinus ou le cosinus

Donner, dans chaque cas, deux réels x dans l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi]$ vérifiant la condition donnée.

1. Sans utiliser la calculatrice, déterminer une valeur de x dans les cas suivants.

$\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ | $\sin(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

2. Donner toutes les valeurs possibles.

Partie VI. Équations trigonométriques

Exercice 16. Équations trigonométriques

Dans chaque cas, déterminer les réels x tels que :

1. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left]-\pi;\pi\right]$

2. $\sin x = \dfrac{1}{2}$ et $x \in [0;\pi]$

Exercice 17. Équations trigonométriques

Résoudre dans l'intervalle $\left]-\pi\ ;\ \pi\right]$ l'équation $4\cos^2 x - 3 = 0$.

Exercice 18. Équations trigonométriques

Soit x un réel de l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ tel que $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Calculer $\cos x$.

Exercice 19. Équations

1. Soit pour X réel l'expression du second degré

$$A(X) = X^2 - X - \frac{3}{4}$$

1. a. Par la méthode de votre choix, montrer que la forme canonique de $A(X)$ est :

$$A(x) = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

1. b. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(X) = 0$.

2. En déduire les solutions dans l'intervalle $\left]-\pi\ ;\ \pi\right]$ de l'équation :

$$\sin^2 x - \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

Remarque

$\sin^2 x = \left(\sin x\right)^2$

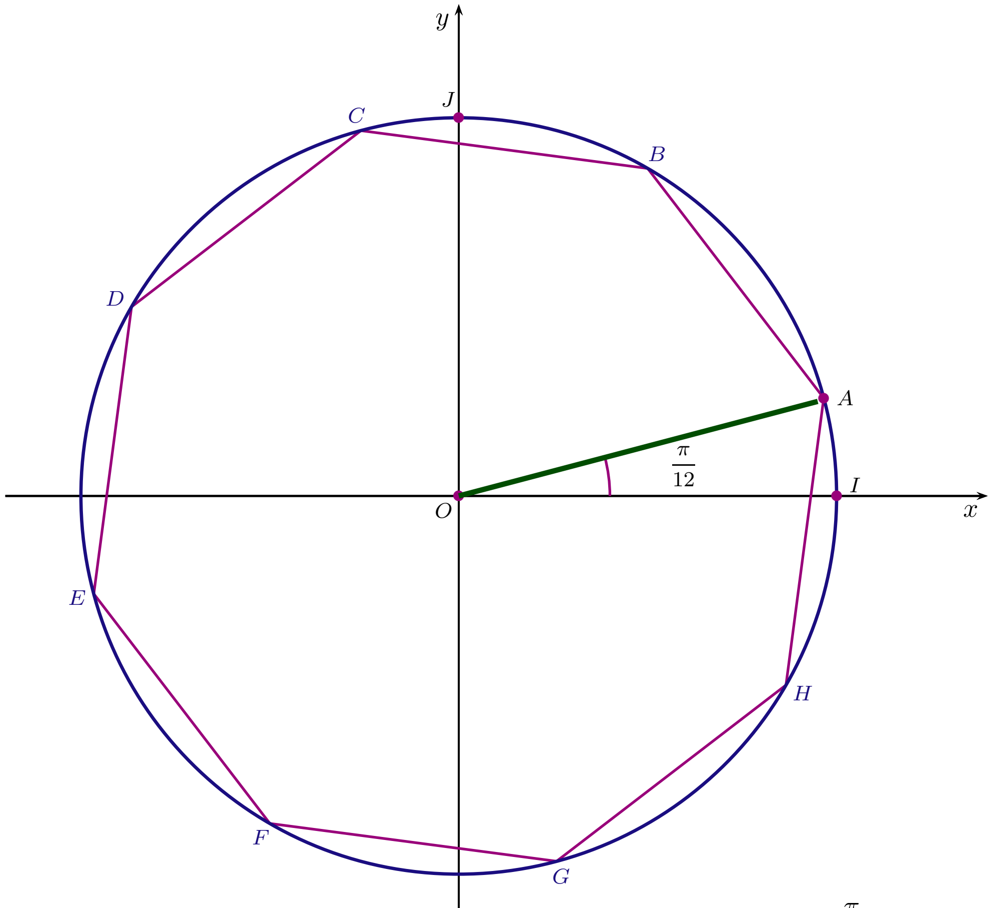
Réponses

- *Exercice 16* : *(1.)* $x = \dfrac{3\pi}{4}$ *ou* $x = -\dfrac{3\pi}{4}$ *(2.)* $x = \dfrac{5\pi}{6}$ *ou* $x = \dfrac{\pi}{6}$
- *Exercice 17* : $x = \dfrac{5\pi}{6}$ *ou* $x = \dfrac{\pi}{6}$
- *Exercice 18* : $\cos x = -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$
- *Exercice 19* : *(1.)* $X = -\dfrac{1}{2}$ *ou* $X = \dfrac{3}{2}$ *(2.)* $S = \left\{-\dfrac{\pi}{6}\ ;\ -\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

Partie VII. Bilan et compléments

Exercice 20. Octogone : Un polygone régulier ABCDEFGH

Sur le cercle trigonométrique associé au repère orthonormé $(O; I, J)$, on a tracé l'octogone $ABCDEFGH$, un polygone régulier à huit côtés.



Par enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique, le point A est associé au réel $\dfrac{\pi}{12}$.

Le polygone régulier ABCDEFGH ayant des angles au centre égaux à $\dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$, le point B est associé au réel : $\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{3}$.

1. Compléter le tableau suivant :

Point	A	B	C	D	E	F	G	H
Réel associé dans $]-\pi\,;\,\pi]$	$\dfrac{\pi}{12}$	$\dfrac{\pi}{3}$	......	......	......	......	......	......

2. Donner les valeurs exactes des coordonnées du point B.

3. On donne $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

3. a. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

3. b. En déduire les valeurs exactes du cosinus et du sinus des réels $\dfrac{11\pi}{12}$ et $\dfrac{13\pi}{12}$.

Réponses

(1.) $\frac{7\pi}{12}$; $\frac{5\pi}{6}$; $-\frac{11\pi}{12}$; $-\frac{2\pi}{3}$; $-\frac{5\pi}{12}$; $-\frac{\pi}{6}$ *(2.)* $B\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ *(3.a.)* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3.b.) $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$; $\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

Exercice 21. Avec la tangente

La tangente d'un réel x est définie par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ pour toutes les valeurs de $x \in \mathcal{D}_T$ où $\cos(x) \neq 0$.
Montrer que pour tous les réels $x \in \mathcal{D}_T$, on a :

$$\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} - 1$$

Exercice 22. Angle Addition formulas and more (c)

On admet les formules suivantes :

Formules d'addition (Si-CO-CO-SI CO-CO-SI-SI)

Pour tous les réels a et b on a :

- $\sin(a+b) = \sin a \times \cos b + \cos a \times \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \times \cos b - \sin a \times \sin b$

Mémo

1. Si-CO-CO-SI CO-CO-SI-SI
2. priorité au Sinus et à l'addition
3. moins 1 à la dernière.

En utilisant, entre autres, les formules d'addition établir les formules :

1. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.
2. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(b)\sin(a)$.
3. $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$.
4. $\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$.

Formules de duplication du cosinus

5. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.
6. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$
7. $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

Formules de duplication du sinus

8. $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.
9. $\sin 2a = \frac{2\tan a}{1+\tan^2 a}$.

Formules de duplication de la tangente

10. $\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

Power reducing Formulas

11. $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$.
12. $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$.
13. $\tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

Sum-to-Product Formulas

14. $\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) . \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.
15. $\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) . \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$.

Exercice 23. $\cos\dfrac{\pi}{8}$

1. A l'aide d'une des formules précédentes de l'exercice 22, calculer la valeur exacte de $\cos^2\dfrac{\pi}{8}$.
2. En déduire la valeur exacte de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et de $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 24. A partir de tan $x/2$

En posant $t = \tan\dfrac{a}{2}$, montrer que, sous réserve d'existence avec a réel :

$$\sin a = \frac{2t}{1+t^2} \ ; \ \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \ ; \ \tan a = \frac{2t}{1-t^2}$$

Exercice 25. A partir de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ (c)

On souhaite déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

Pour cela, on considère un triangle ABC isocèle en A tel que $\mathrm{AB}=2$ et $\widehat{\mathrm{ABC}}=\dfrac{2\pi}{5}$.

On note $\mathrm{BC}=\ell$ où ℓ est un réel strictement positif.

On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{ABC}}$ et on note M le point d'intersection de cette bissectrice avec le segment $[\mathrm{AC}]$.

1. Déterminer la mesure en radian de tous les angles du triangle ABC.

2. Déterminer la mesure en radian de tous les angles du triangle BMC et en déduire que ce triangle est isocèle.

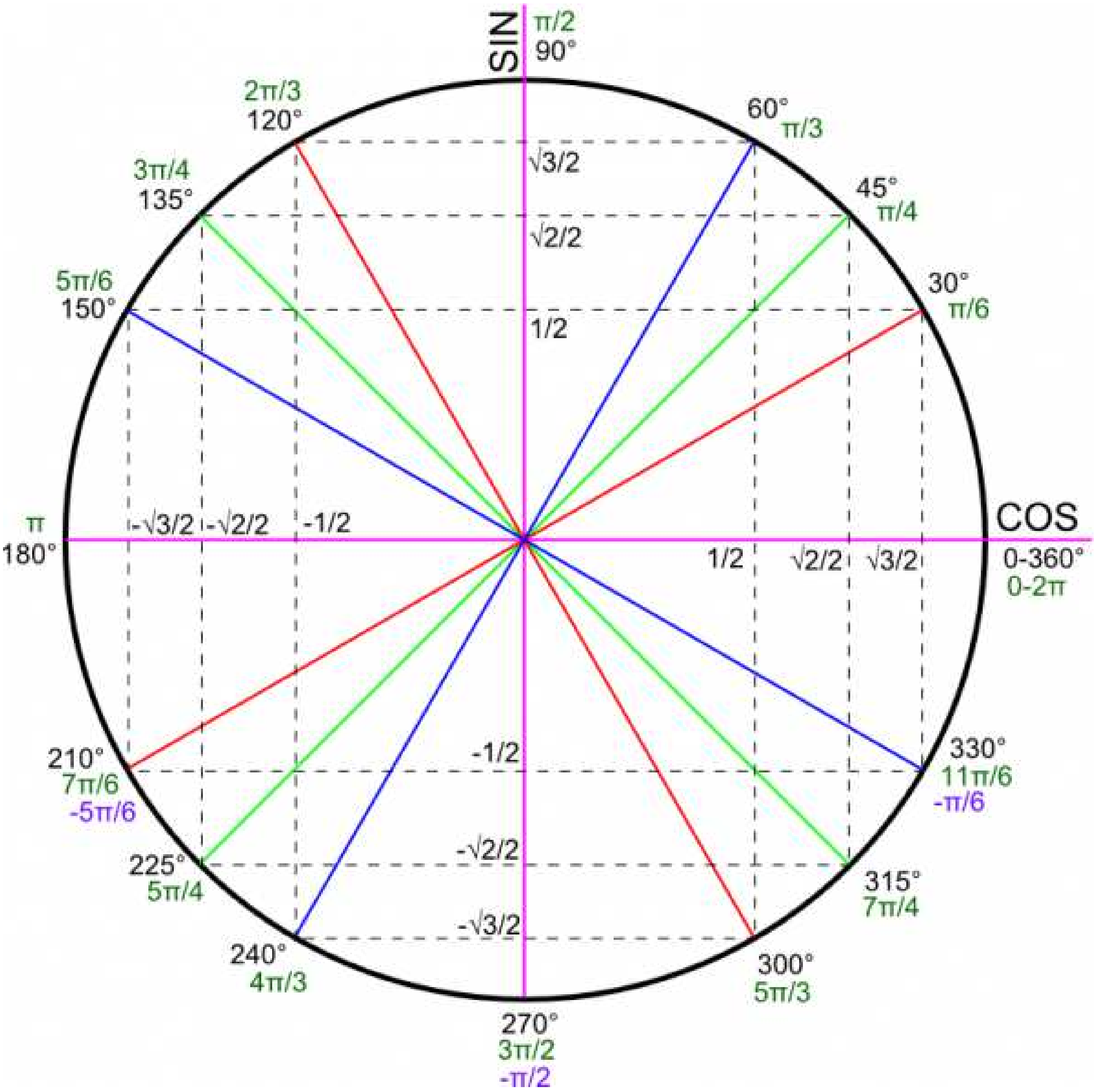
3. Démontrer que le triangle BMA est isocèle.

4. Que peut-on déduire pour les longueurs BC, BM et AM.

5. On peut alors démontrer que les triangles ABC et BMC sont semblables ; autrement dit, $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}=\dfrac{\mathrm{CM}}{\mathrm{BC}}$.
Démontrer que ℓ est solution de l'équation $(\ell+1)^2-5=0$ et en déduire alors sa valeur.

6. En utilisant la construction d'une autre droite, démontrer que $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)=\dfrac{1}{4}\times(\sqrt{5}-1)$.

Partie VIII. Annexe



Partie IX. Corrections

Correction de l'exercice 13

On donne $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

On sait que : $\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 1$ donc
$\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$.

2. En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)$.

On a $\frac{\pi}{2} < \frac{7\pi}{12} < \frac{3\pi}{2}$ donc $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) < 0$ et donc
$\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = -\sqrt{\cos^2\left(\frac{7\pi}{12}\right)} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} =$
$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Correction de l'exercice 25

On souhaite déterminer la valeur exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$.
Pour cela, on considère un triangle ABC isocèle en A tel que $AB = 2$ et $\widehat{ABC} = \frac{2\pi}{5}$.
On note $BC = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.
On trace la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ et on note M le point d'intersection de cette bissectrice avec le segment $[AC]$.

1. Déterminer la mesure en radian de tous les angles du triangle ABC.

Comme le triangle ABC est isocèle en A, les angles à sa base font la même mesure, on a donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \frac{2\pi}{5}$ rad. De plus, la somme des angles d'un triangle étant égale à $180° = \pi$ rad, on a $\widehat{BAC} = \pi - \frac{2\pi}{5} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{5}$ rad.

2. Déterminer la mesure en radian de tous les angles du triangle BMC et en déduire que ce triangle est isocèle.

On sait déjà que $\widehat{BCM} = \widehat{BCA} = \frac{2\pi}{5}$ rad. De plus, comme $[BM)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, on a $\widehat{MBC} = \frac{\frac{2\pi}{5}}{2} = \frac{\pi}{5}$ rad. Enfin, en utilisant la somme des angles d'un triangle, on trouve que $\widehat{BMC} = \pi - \frac{2\pi}{5} - \frac{\pi}{5} = \frac{2\pi}{5}$ rad. Le triangle BCM admet donc deux angles égaux, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{BCM}$, il est donc isocèle en B.

3. Démontrer que le triangle BMA est isocèle.

On sait que : $\widehat{BAM} = \frac{\pi}{5}$ rad et que, par construction de la bissectrice, $\widehat{ABM} = \frac{\pi}{5}$ rad donc le triangle ABM est isocèle en M.

4. Que peut-on déduire pour les longueurs BC, BM et AM.

Comme ABM est isocèle en M, on a : $AM = BM$.
Comme BCM est isocèle en B, on a : $BM = BC$. On en déduit donc que : $BC = BM = AM = \ell$.

5. On peut alors démontrer que les triangles ABC et BMC sont semblables ; autrement dit, $\frac{BC}{AB} = \frac{CM}{BC}$.
Démontrer que ℓ est solution de l'équation $(\ell + 1)^2 - 5 = 0$ et en déduire alors sa valeur.

On utilise l'égalité des quotients donnée, en remplaçant par les valeurs de l'énoncé et en remarquant que : $CM = AC - AM = 2 - \ell$. On obtient alors $\frac{\ell}{2} = \frac{2-\ell}{\ell}$ ce qu'on peut réécrire comme suit : $\ell^2 + 2\ell - 4 = 0$, ou bien encore $(\ell + 1)^2 - 5 = 0$.
On résout maintenant l'équation trouvée :
$(\ell+1)^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow (\ell+1)^2 = 5 \Leftrightarrow \ell + 1 = \sqrt{5}$ ou $\ell + 1 = -\sqrt{5}$. On a donc $\ell = \sqrt{5} - 1$ ou $\ell = -\sqrt{5} - 1$. La deuxième solution étant négative, ce qui est impossible pour une longueur, on a au final $\ell = \sqrt{5} - 1$.

6. En utilisant la construction d'une autre droite, démontrer que $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{1}{4} \times (\sqrt{5} - 1)$.

Soit H le pied de la hauteur issue de A. Comme ABC est un triangle isocèle en A, cette hauteur est aussi la médiatrice du segment $[CB]$, on a donc : $BH = HC = \frac{\ell}{2}$. Et pour finir, le triangle ABH étant rectangle en H, on peut utiliser la trigonométrie, et on obtient : $\cos(\frac{\pi}{5}) = \cos(\widehat{ABH}) = \frac{BH}{BA} = \frac{\frac{\ell}{2}}{2} = \frac{\ell}{4} = \frac{1}{4} \times (\sqrt{5} - 1)$.