Math93.com

TD 2 - 1re Spé Maths
Probabilités et Variables Aléatoires

Table des matières

Partie I. Variables aléatoires : Loi de probabilité et Espérance

Exercice 1. Gain algébrique : Exemple type et méthode

Voici les règles d'un jeu de hasard : le joueur mise $3 puis lance un dé cubique équilibré.

- S'il obtient un chiffre pair, le joueur reçoit, en dollars, le double du chiffre obtenu.
- S'il obtient 1 ou 3, le joueur reçoit $1.
- Sinon, le joueur ne reçoit rien.

On appelle X la fonction, qui, à chaque issue de cette expérience aléatoire, associe le gain du joueur (éventuellement négatif en tenant compte de la mise de départ).

1. Univers et valeurs prises par la v.a. X.
Quelles sont les valeurs susceptibles d'être prises par la variable aléatoire X . ?

Aide
Pour répondre à cette question, il est souvent utile d'associer à chaque issue, le gain algébrique obtenu en complétant par exemple un tableau :

Issues de l'univers	1	2	3	4	5	6
Gain algébrique (attention, on mise 3 dollars)	......	......	......	......	......	......

Les valeurs prises par la v.a. X sont donc : ....
....

2. Loi de probabilité de la v.a. X.
Calculer la probabilité que X prenne chacune de ces valeurs et résumer cela dans ce tableau.

x_i	$1-3=-2$	......	......	......	......	Somme des p_i
$P(X=x_i)$	......	......	......	......	......	1

Remarque
On dit avec ce tableau que l'on a déterminé la loi de probabilité de la v.a. X.

3. Espérance de la v.a. X.

On peut se demander si il est raisonnable de jouer à ce jeu. Pour cela on va calculer l'espérance de de la v.a. X (la moyenne des valeurs prises par X pondérée par les probabilités). Alors ce jeu est-il équitable ?

Espérance d'une v.a.

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i) \; = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + ... + x_n \times p_n}$$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

4. Une mise de départ m à calculer (Un grand classique)

Quelle doit être la mise de départ m pour que le jeu soit équitable, c'est à dire pour que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X soit nulle.

Méthode

On reprend l'exercice en remplaçant ma mise de départ par m.

Il faut donc refaire les deux tableaux, calculer l'espérance puis résoudre l'équation $E(x) = 0$).

Issues de l'univers	1	2	3	4	5	6
Gain algébrique (attention, on mise 3 dollars)	$1-m$	......	$1-m$	......	......	......

x_i	$1-m$	......	......	......	......	Somme des p_i
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	......	......	......	......	1

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Exercice 2. Sur le même modèle que l'ex. 1 : dans une urne

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher numérotées de 0 à 19.
Voici les règles d'un jeu de hasard : Le joueur mise $m = \$10$ puis tire une des boules au hasard et note le numéro obtenu.

- S'il obtient un nombre premier, le joueur récupère sa mise de départ.
- S'il obtient un nombre pair le joueur reçoit 15 dollars (les gains peuvent se cumuler ...).
- Sinon, le joueur ne gagne rien.

On appelle X la fonction, qui, à chaque issue de cette expérience aléatoire, associe le gain du joueur (éventuellement négatif en tenant compte de la mise de départ).

1. Quelles sont les valeurs susceptibles d'être prises par la variable aléatoire X ?

2. Déterminer la loi de probabilité de la v.a. X.

3. Déterminer l'espérance mathématique de la v.a. X.
Ce jeu est-il équitable ?

4. Déterminer quelle doit être la mise de départ m pour que le jeu soit équitable, c'est à dire pour que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X soit nulle.

Exercice 3. Loi de probabilité et espérance : un jeu de cartes

On tire au hasard une carte dans un jeu qui en contient 32.

1. Jeu 1 : On gagne 10 points si on tire une figure, 3 points si on tire un 10 et 1 point si on tire une autre carte.

1. a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne le nombre de points obtenus.

1. b. Calculer l'espérance de la v.a. X.

2. Jeu 2 :
On gagne 5 points si on tire une carte rouge, 2 points si on tire une figure de pique et on perd 3 points si on tire une autre carte.

2. a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire Y qui donne le nombre de points obtenus.

2. b. Calculer l'espérance de la v.a. Y.

Exercice 4. A partir de la loi de probabilité

Voici la loi de probabilité de X.

X	-2	0	1	3	6
$P(X = x_i)$	$0,1$	$0,3$	$0,4$	$0,1$	$0,1$

1. Calculer $P(X \leqslant 0)$, $P(X > 3)$, $P(X \geqslant 3)$ et $P(-2 < X \leqslant 3)$.

2. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 5. A partir de la loi de probabilité

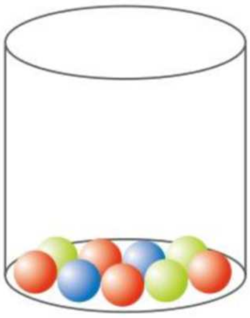
1. Déterminer la valeur de p pour que le tableau soit celui d'une loi de probabilité.

2. Déterminer alors son espérance.

X	-2	1	3
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	p

Partie II. Espérance et jeu équitable

Exercice 6. Jeu équitable 1



Après avoir misé m € , un joueur tire une boule au hasard dans l'urne ci-contre. S'il tire une boule bleue, il reçoit 18 €; s'il tire une boule verte, on lui rembourse sa mise et s'il tire une boule rouge, il perd sa mise.
Soit X la variable aléatoire qui donne le gain du joueur, éventuellement négatif.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Exprimer $E(X)$ en fonction de m.
3. Quel doit être le montant de la mise pour que le jeu soit équitable ?

Exercice 7. jeu équitable 2

Après avoir misé une certaine somme d'argent, un joueur lance un dé à six faces.
Il gagne 3 € s'il obtient un diviseur de 6.
Quel doit être le montant de la mise pour que le jeu soit équitable ?

Partie III. Espérance, Variance et Écart-type

Exercice 8. Espérance, variance et écart-type : à la main

1. Dans chaque cas, calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X.
Si besoin, arrondir les résultats à 10^{-2} près.

2. Vérifier ensuite vos résultats en utilisant le mode STAT de votre calculatrice.

X	-5	0	7	
$P(X = x_i)$	$0,3$	$0,4$	$0,3$	

X	-4	-3	2	5	
$P(X = x_i)$	$0,2$	$0,3$	$0,4$	$0,1$	

Exercice 9. Une cible

Un jeu consiste à tirer dans la cible ci-dessous.
La probabilité d'atteindre une zone de couleur est proportionnelle à sa surface. On suppose que le participant ne rate jamais la cible.

1	3	5	8	10
1	3	5	8	8
1	3	5	5	5
1	3	3	3	3
1	1	1	1	1

1. Quelles sont les probabilités d'atteindre chacune des cinq zones colorées ?

2. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de points marqués par le participant.

2. a. Donner la loi de probabilité de X.

2. b. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

2. c. Calculer avec la calculatrice la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$ et interpréter le résultat.

Exercice 10. Un menu

Un restaurant universitaire propose tous les jours de la viande ou du poisson avec comme accompagnement possible des frites ou du riz. On suppose que chaque étudiant choisit aléatoirement le contenu de son assiette. Les prix affichés sont les suivants :

- viande : 4,50 € ;
- poisson : 3,50 € ;
- frites : 2 € ;
- riz : 3 € .

On note T la variable aléatoire donnant le prix payé pour un plat au restaurant universitaire.

1. Donner la loi de probabilité de T.

2. Calculer $E(T)$ et interpréter le résultat.

3. Calculer avec la calculatrice la variance $V(T)$ et l'écart-type $\sigma(T)$ et interpréter le résultat.

Partie IV. Propriétés

Exercice 11. Modéliser (ex. 70)

On note S le nombre de fois où le bus s'est effectivement arrêté lors du trajet. Une étude statistique a permis d'établir la loi de probabilité de S.

x_i	0	1	2	3	4
$P(S = x_i)$	0,05	0,15	0,3	0,35	0,15

1. Calculer E(S) et interpréter le résultat.

2. Le trajet direct dure vingt minutes et chaque arrêt rallonge de trois minutes la durée du voyage. Soit T la variable aléatoire qui donne la durée du trajet.

2. a. Quelle relation lie S et T ?

2. b. En déduire, sur un très grand nombre de jours, le temps de trajet moyen mis par Camille pour se rendre au travail.

Exercice 12. Modéliser (ex. 71)

Un magasin propose un service de courses en ligne. Les achats des clients sont rangés dans des sacs réutilisables dont le nombre dépend du volume que représentent les différents articles. On note X le nombre de sacs nécessaires pour ranger les courses d'un client. Une étude statistique a permis d'établir la loi de probabilité de X.

x_i	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,15	0,2	0,45	0,1	0,1

1. Calculer E(X).

2. En moyenne, les clients paient 70 euros pour leurs articles et chaque sac est facturé 0,30 euros. Soit T la variable aléatoire qui donne le prix total que paie un client.

2. a. Quelle relation lie X et T ?

2. b. En déduire E(T) et interpréter le résultat.

2. c. En général, il y a 80 clients par jour en semaine et 120 clients par jour le samedi (le magasin est fermé le dimanche). Quelle est la recette hebdomadaire que peut espérer réaliser ce magasin ?

Exercice 13. Raisonner (ex. 64)

Après avoir misé une certaine somme d'argent, un joueur lance un dé à six faces.
Il gagne 3 euros s'il obtient un diviseur de 6.
Quel doit être le montant de la mise pour que le jeu soit équitable (c'est-à-dire pour que l'espérance de gain soit nulle) ?

Partie V. Bilan

Exercice 14. D'après Bac : avec un arbre

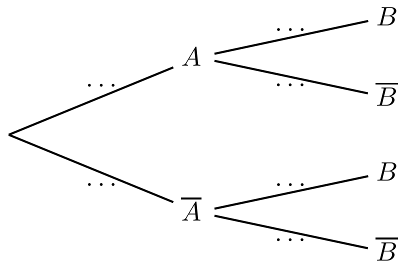
On considère deux élevages de chatons sacrés de Birmanie :

- Dans le premier élevage 75 % des chatons deviennent couleur Chocolat et 25 % deviennent couleur Blue.
- Dans le second élevage 30 % des chatons deviennent couleur Chocolat et 70 % deviennent couleur Blue.

Une animalerie se fournit dans ces deux élevages. Elle achète 40 % de ses chatons au premier élevage et 60 % au deuxième.
On choisit au hasard un chaton de l'animalerie.
On note A l'évènement « Le chaton provient du premier élevage » et B l'évènement « Le chaton est de couleur Blue ».
On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A et $\overline{B}$ l'évènement contraire de B.

1.

1. a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous :



1. b. Calculer $p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$ et interpréter ce résultat.

1. c. Montrer que la probabilité que le chaton soit de couleur Chocolat est $0,48$.

1. d. Sachant que Jules a choisi un chaton couleur Blue dans cette animalerie, quelle est la probabilité que le chaton provienne du deuxième élevage ? On donnera le résultat à 10^{-2} près.

2. Le responsable du rayon fixe à 100 € le prix de vente d'un chaton couleur Blue et à 75 € le prix d'un chaton couleur Chocolat.

2. a. On choisit au hasard un chaton de l'animalerie et on désigne par X la variable aléatoire égale au prix en euros du chaton acheté. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. b. Déterminer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

Exercice 15. D'après Bac

Une usine fabrique des objets destinés à être commercialisés. Sur 100 objets qui sortent de l'usine, en moyenne, quinze ont uniquement le défaut A, sept ont uniquement le défaut B et trois ont les deux défauts.
Le coût de production d'un objet est de 150 € . Grâce à la garantie, les clients peuvent faire réparer leur objet aux frais du fabricant. La réparation du défaut A revient à 30 € et la réparation du défaut B revient à 40 € .
Soit X la variable aléatoire qui associe à un objet choisi au hasard dans la production de l'usine, son coût de revient (coût de production + coût des réparations éventuelles).

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Calculer $E(X)$ et interpréter le résultat.

3. On suppose que tous les objets produits sont vendus.

3. a. L'usine réalisera-t-elle des bénéfices si elle vend les objets 160 € pièce ?

3. b. Quel doit être le prix de vente d'un objet pour que l'usine réalise un bénéfice moyen de 50 € par objet ?

Exercice 16. D'après Bac

Dans un sac opaque, on met deux billets de 5 € , un billet de 10 € et deux billets de 20 € . Tous les billets sont indiscernables au toucher. Pour avoir le droit de jouer, il faut payer 20 € . On tire successivement et sans remise deux billets dans le sac.
On note G la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Traduire la situation par un arbre de probabilité.

2. Déterminer la loi de probabilité de G.

3. Le jeu est-il intéressant pour le joueur ?

Exercice 17. D'après Bac

On dispose d'un dé équilibré à six faces et de deux urnes U et V contenant des boules blanches ou rouges, indiscernables au toucher.
L'urne U contient 40 boules blanches et 60 boules rouges.
L'urne V contient 70 boules blanches et 30 boules rouges.
Un jeu consiste à lancer le dé puis tirer une boule dans l'une des urnes. Si on obtient 1 ou 6 sur le dé, le tirage s'effectue dans l'urne U. Si on obtient 2, 3, 4 ou 5 sur le dé, le tirage s'effectue dans l'urne V.
On considère les évènements :

- U : « le tirage s'effectue dans l'urne U »
- V : « le tirage s'effectue dans l'urne V »
- B : « la boule tirée est blanche »
- R : « la boule tirée est rouge ».

Sauf indication contraire, les probabilités seront arrondies au millième.

1. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Déterminer la probabilité de l'évènement « la boule tirée est rouge ».

3. On tire une boule rouge. Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne U ?

4. Pour jouer, il faut miser 1 €. Le joueur gagne 3 € s'il tire une boule rouge et il ne gagne rien s'il tire une boule blanche. On note $\mathcal{G}$ la variable aléatoire donnant le gain du joueur.

4. a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{G}$.
On donnera le tableau de la loi de probabilité, mais aucune justification n'est demandée.

4. b. Calculer l'espérance mathématique de $\mathcal{G}$. Interpréter ce résultat.

Exercice 18. Bac S - Métropole - 2013

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1 et le reste de l'horticulteur H_3.
Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles. La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 % .

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock. On envisage les événements suivants :

- H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 » ;
- H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 » ;
- H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 » ;
- C : « l'arbre choisi est un conifère » ;
- F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu » .

1. a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

1. b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

1. c. Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à $0,525$.

1. d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3} près.

2. On choisit au hasard deux arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment grand pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de deux arbres dans le stock.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères choisis.

2. a. Calculer et interpréter $P(X = 0)$.

2. b. En déduire $P(X \geqslant 1)$ et interpréter le résultat.

Exercice 19.

On lance trois fois de suite un dé équilibré à six faces.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de 6 obtenus.
Calculer l'espérance de X.

Partie VI. Python c'est ma passion

Exercice 20. Simulation

Faire le TD 1 qui va simuler différents jeux.

↬ https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/7cd8-7863928

Exercice 21. Calculer espérance, variance et écart-type

Faire le TD 2 :

↬ https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/6a6e-5276014

Partie VII. Corrections

Correction de l'exercice 1 page 2

Voici les règles d'un jeu de hasard : le joueur mise \$3 puis lance un dé cubique équilibré.

- S'il obtient un chiffre pair, le joueur reçoit, en dollars, le double du chiffre obtenu.
- S'il obtient 1 ou 3, le joueur reçoit \$1.
- Sinon, le joueur ne reçoit rien.

On appelle X la fonction, qui, à chaque issue de cette expérience aléatoire, associe le gain du joueur (éventuellement négatif en tenant compte de la mise de départ).

1. Univers et valeurs prises par la v.a. X.
Quelles sont les valeurs susceptibles d'être prises par la variable aléatoire X .?

Corrigé

Issues de l'univers	1	2	3	4	5	6
Gain algébrique (attention, on mise 3 dollars)	-2	1	-2	5	-3	9

Les valeurs prises par la v.a. X sont donc : $-3, -2, 1, 5$ et 9 .

2. Loi de probabilité de la v.a. X.
Calculer la probabilité que X prenne chacune de ces valeurs et résumer cela dans ce tableau.

Corrigé

x_i	-2	-3	1	5	9	Somme des p_i
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

Remarque
On dit avec ce tableau que l'on a déterminé la loi de probabilité de la v.a. X.

3. Espérance de la v.a. X.
On peut se demander si il est raisonnable de jouer à ce jeu. Pour cela on va calculer l'espérance de de la v.a. X (la moyenne des valeurs prises par X pondérée par les probabilités). Alors ce jeu est-il équitable ?

Espérance d'une v.a.

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X = x_i) \ = x_1 \times p_1 + x_2 \times p_2 + x_3 \times p_3 + \ldots.. + x_n \times p_n}$$

Corrigé

x_i	-2	-3	1	5	9	Somme des p_i
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E(X) = -2 \times \frac{2}{6} + (-3 + 1 + 5 + 9) \times \frac{1}{6} = \frac{-4 + 12}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Le gain moyen sera donc d'environ 1,33 dollars.

4. Une mise de départ m à calculer (Un grand classique)
Quelle doit être la mise de départ m pour que le jeu soit équitable, c'est à dire pour que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X soit nulle.

Méthode

On reprend l'exercice en remplaçant ma mise de départ par m.
Il faut donc refaire les deux tableaux, calculer l'espérance puis résoudre l'équation $E(x) = 0$.

Corrigé

Issues de l'univers	1	2	3	4	5	6
Gain algébrique (attention, on mise m dollars)	$1 - m$	$4 - m$	$1 - m$	$8 - m$	-3	$12 - m$

x_i	$1 - m$	$-m$	$4 - m$	$8 - m$	$12 - m$	Somme des p_i
$P(X = x_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

On obtient alors :

$$E(x) = \frac{2(1 - m) - m + (4 - m) + (8 - m) + (12 - m)}{6} = \frac{26 - 6m}{6}$$

Et donc

$$E(X) = 0 \iff m = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \approx \underline{4,33 \text{ dollars}}$$