



Math93.com
MathExams.fr

Brevet des Collèges DNB 2015 Pondichéry

Avril 2015
Correction

Exercice 1. QCM

5 points

	Questions	A	B	C									
1	La forme développée de $(x - 1)^2$ est :		$x^2 - 2x + 1$										
2	Une solution de l'équation : $2x^2 + 3x - 2 = 0$ est			-2									
3	On considère la fonction $f : x \mapsto 3x + 2$. Un antécédent de -7 par la fonction f est :		-3										
4	Lorsqu'on regarde un angle de 18° à la loupe de grossissement 2, on voit un angle de :			18°									
5	On considère la fonction $g : x \mapsto x^2 + 7$. Quelle est la formule à entrer dans la cellule B2 pour calculer $g(-2)$? <table border="1" data-bbox="475 833 675 952"><tr><td></td><td>A</td><td>B</td></tr><tr><td>1</td><td>x</td><td>$g(x)$</td></tr><tr><td>2</td><td>-2</td><td></td></tr></table>		A	B	1	x	$g(x)$	2	-2		$= A2^2 + 7$		
	A	B											
1	x	$g(x)$											
2	-2												

1. La forme développée de $(x - 1)^2$:

En utilisant l'identité remarquable $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ on obtient :

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2 \times x \times 1 + 1^2$$

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

La bonne réponse est donc **1.B**.

2. Une solution de l'équation : $2x^2 + 3x - 2 = 0$:

Il suffit de tester les valeurs proposées :

- Pour $x = 0$, alors $2x^2 + 3x - 2 = 2 \times 0^2 + 3 \times 0 - 2 = -2 \neq 0$;
- Pour $x = 2$, alors $2x^2 + 3x - 2 = 2 \times 2^2 + 3 \times 2 - 2 = 8 + 6 - 2 = 12 \neq 0$;
- Pour $x = -2$, alors $2x^2 + 3x - 2 = 2 \times (-2)^2 + 3 \times (-2) - 2 = 8 - 6 - 2 = 0$;

Parmi les trois solutions proposées, la seule qui est solution de cette équation est (-2) , la bonne réponse est donc **2.C**.

3. On considère la fonction $f : x \mapsto 3x + 2$. Un antécédent de -7 par la fonction f est :

On cherche donc les éventuels antécédents de -7 par f c'est à dire les solution de l'équation $f(x) = -7$. Donc :

$$f(x) = -7 \Leftrightarrow 3x + 2 = -7$$

$$f(x) = -7 \Leftrightarrow 3x = -9$$

$$f(x) = -7 \Leftrightarrow x = \frac{-9}{3} = -3$$

L'unique antécédent de -7 par f est donc -3, la bonne réponse est donc **3.B**.

Remarque : On pouvait aussi calculer les images par f des valeurs proposées, on obtenait :

$$f(-19) = -55 ; f(-3) = -7 ; f(-7) = -19$$

4. Lorsqu'on regarde un angle de 18° à la loupe de grossissement 2, on voit un angle de :

Un agrandissement ou une réduction ne modifie pas les angles. Par exemple, un triangle équilatéral de côté 1 cm a tous ses angles de 60° , comme le même triangle agrandi 2 fois, donc de côté 2 cm. La bonne réponse est donc **4.C**.

5. Formule du tableur

Pour calculer l'image de la valeur de la cellule A2 par la fonction $g : x \mapsto x^2 + 7$, il faut ajouter 7 au carré de la valeur de cette cellule et donc entrer la formule $A2^2 + 7$. La bonne réponse est donc **5.A**.



Exercice 2. PGCD

4 points

Un chocolatier vient de fabriquer 2 622 oeufs de Pâques et 2 530 poissons en chocolat.

1. Le chocolatier peut-il faire 19 paquets ? Justifier.

Le nombre de paquets doit être un diviseur commun du nombre d'oeufs de Pâques et de poissons au chocolat. Or 19 ne divise pas 2 530 car le reste de la division euclidienne de 2 530 par 19 n'est pas nul :

$$2\,530 = 19 \times 133 + 3$$

Il ne peut donc pas faire 19 paquets.

2. Quel est le plus grand nombre de paquets qu'il peut réaliser ? Dans ce cas, quelle sera la composition de chaque paquet ?

Le nombre de paquets cherché N , est un diviseur commun de 2 530 et de 2 622. Or on cherche le nombre maximum de paquets et de ce fait N est le PGCD de 2 530 et de 2 622.

Utilisons l'algorithme d'Euclide pour calculer ce PGCD :

$$2\,622 = 1 \times 2\,530 + 92$$

$$2\,530 = 27 \times 92 + 46$$

$$92 = 2 \times 46 + 0$$

Le dernier reste non nul est 46, qui est donc le PGCD de 2 622 et de 2 530.

Le nombre maximal de paquets est de 46.

En outre, puisque :

$$2\,622 = 46 \times 57 \quad \text{et} \quad 2\,530 = 46 \times 55$$

La composition de chacun des 46 paquets sera de 57 oeufs de Pâques et 55 poissons au chocolat.



Exercice 3. Recherche du bénéfice maximal

6 points

Information 1 : les loyers des deux emplacements proposés :

- la paillotte sur la plage : 2 500 € par mois.
- la boutique au centre-ville : 60 € par jour.

Information 2 : la météo à Hendaye

Du 1^{er} juin au 31 août inclus :

- Le soleil brille 75 % du temps
- Le reste du temps, le temps est nuageux ou pluvieux.

Information 3 : prévisions des ventes par jour selon la météo :

	Soleil	Nuageux - pluvieux
La paillotte	500 €	50 €
La boutique	350 €	300 €

On rappelle que le mois de juin comporte 30 jours et les mois de juillet et août comportent 31 jours. Établissons un bilan des dépenses et des recettes envisagées pour chaque option.

- **Dépenses**

- **Sur la plage.**

La paillotte sur la plage se loue 2 500 euros par mois, donc pour les 3 mois :

$$D_1 = 2\,500 \times 3 = 7\,500 \text{ €}$$

- **Au centre ville.**

La période considérée est de 3 mois de respectivement 30, 31 et 31 jours soit au total :

$$30 + 31 + 31 = 92 \text{ jours}$$

La boutique au centre ville se loue 60 euros par jour, donc la dépense totale sera de :

$$D_2 = 92 \times 60 = 5\,520 \text{ €}$$

- **Recettes**

- **Sur la plage.**

Le soleil brille 75% du temps sur cette période. Or les prévisions de vente pour la paillotte sont de 500 euros par temps ensoleillé et 50 euros sinon. la recette totale sera donc pour les 92 jours de :

$$R_1 = (92 \times 0,75) \times 500 \text{ €} + (92 \times 0,25) \times 50 \text{ €}$$

$$R_1 = 69 \times 500 \text{ €} + 23 \times 50 \text{ €}$$

$$R_1 = 34\,500 \text{ €} + 1\,150 \text{ €}$$

Soit

$$R_1 = 35\,650 \text{ €}$$

- **Au centre ville.**

Le soleil brille 75% du temps sur cette période. Or les prévisions de vente pour la boutique sont de 350 euros par temps ensoleillé et 300 euros sinon. La recette totale sera donc pour les 92 jours de :

$$R_2 = (92 \times 0,75) \times 350 \text{ €} + (92 \times 0,25) \times 300 \text{ €}$$

$$R_2 = 69 \times 350 \text{ €} + 23 \times 300 \text{ €}$$

$$R_2 = 24\,150 \text{ €} + 6\,900 \text{ €}$$

Soit

$$R_2 = 31\,050 \text{ €}$$

- **Bilan**

- **Sur la plage**

Avec la paillotte sur la plage, le bénéfice prévu sera de :

$$B_1 = R_1 - D_1 = 35\,650 - 7\,500 = 28\,150 \text{ €}$$

- **Au centre ville**

Avec la boutique du centre ville, le bénéfice prévu sera de :

$$B_2 = R_2 - D_2 = 31\,050 - 5\,520 = 25\,530 \text{ €}$$

- **Conclusion**

Le choix de la paillotte sur la plage s'impose donc car le bénéfice est supérieur à celui de la boutique.

**Exercice 4. Volumes dans une pyramide****6 points**

La dernière bouteille de parfum de chez Chenal a la forme d'une pyramide $SABC$ à base triangulaire de hauteur $[AS]$ telle que : ABC est un triangle rectangle et isocèle en A ; $AB = 7,5$ cm et $AS = 15$ cm.

1. Calculer le volume de la pyramide $SABC$. (On arrondira au cm^3 près.)

Le volume d'une pyramide est donné par la formule :

$$\mathcal{V}_{SABC} = \frac{1}{3} \times \text{Aire Base} \times \text{Hauteur}$$

Soit ici puisque la pyramide $SABC$ est de hauteur $[AS]$ et de base le triangle ABC , rectangle et isocèle en A :

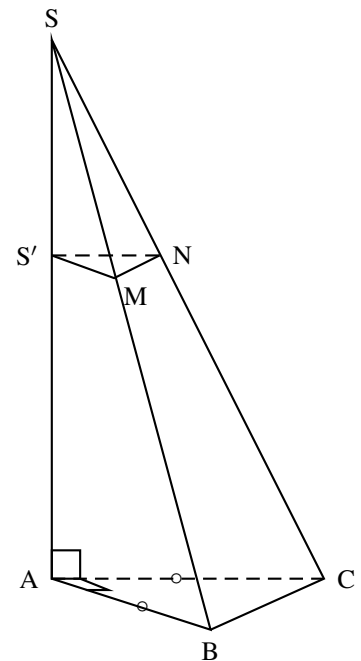
$$\mathcal{V}_{SABC} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}_{ABC} \times SA$$

Soit

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{SABC} &= \frac{1}{3} \times \frac{AB \times AC}{2} \times SA \\ \mathcal{V}_{SABC} &= \frac{1}{3} \times \frac{7,5 \times 7,5}{2} \times 15\end{aligned}$$

Soit arrondi au cm^3 près :

$$\mathcal{V}_{SABC} = 140,625 \text{ cm}^3 \approx 141 \text{ cm}^3$$

**2. Pour fabriquer son bouchon $SS'MN$, les concepteurs ont coupé cette pyramide par un plan P parallèle à sa base et passant par le point S' tel que $SS' = 6$ cm.****2. a. Quelle est la nature de la section plane $S'MN$ obtenue ?**

Le plan P étant parallèle à la base, la section de coupe, c'est à dire le triangle $S'MN$, est une réduction du triangle ABC . Une réduction conserve les propriétés géométriques de la figure initiale ABC donc :

Le triangle $S'MN$ est un triangle rectangle isocèle en S' .

2. b. Calculer la longueur $S'N$.

La pyramide $SS'MN$ est une réduction de $SABC$ de rapport

$$k = \frac{SS'}{SA} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

De ce fait, la longueur $S'N$ est une réduction de rapport k de la longueur AC soit :

$$S'N = \frac{2}{5} \times AC$$

$$S'N = \frac{2}{5} \times 7,5 = 3 \text{ cm}$$

3. Calculer le volume maximal de parfum que peut contenir cette bouteille en cm^3 .

La pyramide $SS'MN$ est une réduction de $SABC$ de rapport $k = \frac{2}{5}$, donc le volume de la pyramide réduite s'obtient en multipliant celui de la pyramide initiale par k^3 . De ce fait :

$$\mathcal{V}_{SS'MN} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \mathcal{V}_{SABC}$$

$$\mathcal{V}_{SS'MN} = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times 140,625 = 9 \text{ cm}^3$$

Le volume maximal de parfum que la bouteille peut contenir est donc de :

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_{SABC} - \mathcal{V}_{SS'MN} = 140,625 - 9 = 131,625 \text{ cm}^3$$

Remarque

L'arrondi demandé lors de la question 1. pouvait autoriser l'utilisation de 141 cm^3 comme valeur approchée de $\mathcal{V}_{SABC}$ pour tout le reste de l'exercice. Auquel cas on obtient une valeur finale d'environ 132 cm^3 pour $\mathcal{V}$.



Exercice 5. Probabilités

4 points

Un jeu télévisé propose à des candidats deux épreuves :

- Pour la première épreuve, le candidat est face à 5 portes : une seule porte donne accès à la salle du trésor alors que les 4 autres s'ouvrent sur la salle de consolation.
- Pour la deuxième épreuve, le candidat se retrouve dans une salle face à 8 enveloppes.
Dans la salle du trésor : 1 enveloppe contient 1 000 €, 5 enveloppes contiennent 200 €. Les autres contiennent 100 €.
Dans la salle de consolation : 5 enveloppes contiennent 100 € et les autres sont vides.

Il doit choisir une seule enveloppe et découvrir alors le montant qu'il a gagné.

1. Quelle est la probabilité que le candidat accède à la salle du trésor ?

Pour la première épreuve, une seule porte sur cinq donne accès à la salle du trésor donc la probabilité que le candidat accède à la salle du trésor est :

$$p_1 = \frac{1}{5}$$

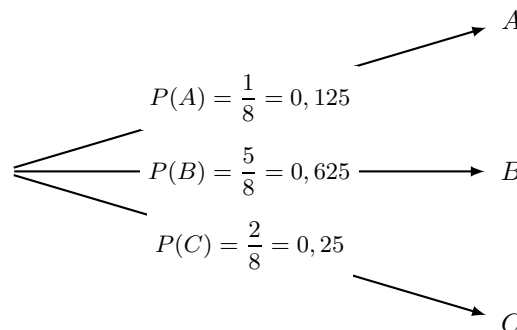
2. Un candidat se retrouve dans la salle du trésor.

2. a. Représenter par un schéma la situation.

En notant A l'évènement : « choisir une enveloppe à 1 000 euros », B l'évènement : « choisir une enveloppe à 200 euros » et C l'évènement : « choisir une enveloppe à 100 euros » on a :

- 1 enveloppe sur les 8 contient 1 000 euros donc $P(A) = \frac{1}{8} = 0,125$;
- 5 enveloppes sur les 8 contiennent 200 euros donc $P(B) = \frac{5}{8} = 0,625$;
- les autres soit 2 enveloppes sur les 8 contiennent 100 euros donc $P(C) = \frac{2}{8} = 0,25$.

De ce fait on a :



2. b. Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins 200 € ?

Les trois évènements étant incompatibles, la probabilité qu'il gagne au moins 200 euros est la somme des probabilités qu'il gagne 200 euros et celle de gagner 1 000 euros. De ce fait :

$$p_2 = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{6}{8} = 0,75$$

3. Un autre candidat se retrouve dans la salle de consolation. Quelle est la probabilité qu'il ne gagne rien ?

La salle de consolation contient 8 enveloppes dont 5 contiennent 100 euros et les 3 autres rien. Il a donc 3 possibilités sur 8 de ne rien gagner soit :

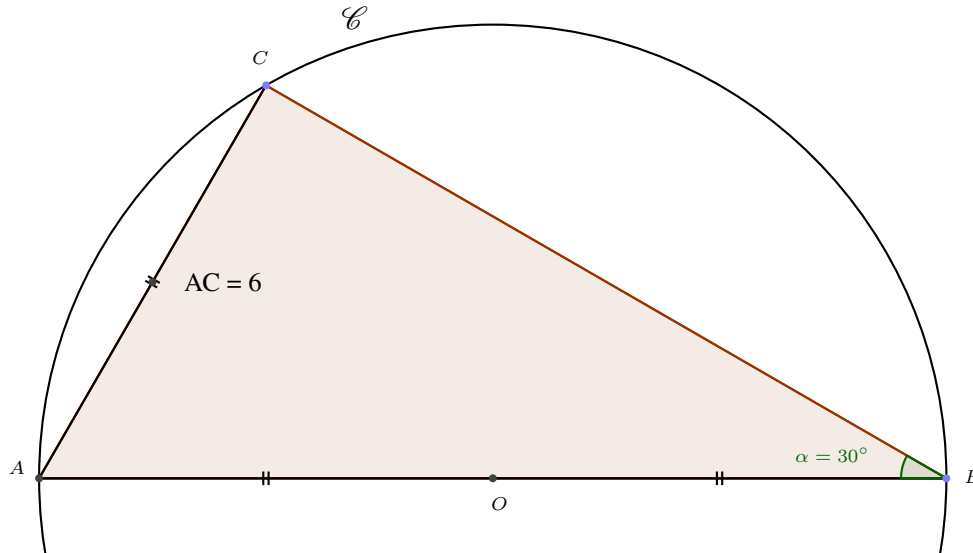
$$p_3 = \frac{3}{8} = 0,375$$

Exercice 6. Géométrie**7 points**

$[AB]$ est un segment de milieu O tel que $AB = 12$ cm. Le point C appartient au cercle de centre O passant par A . De plus $AC = 6$ cm. L'angle $\widehat{ABC}$ mesure 30° .

Remarque : l'énoncé original comportait une erreur sur l'angle $\widehat{ABC}$ qui était supposé mesurer 60° ce qui est impossible. Le corrigé ci-dessous est réalisé à partir de la valeur correcte de cet angle, soit 30° .

1. Construire la figure en vraie grandeur.



2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

2. a. Le triangle ABC est rectangle : Affirmation **VRAIE**.

Le point C appartient au cercle de diamètre $[AB]$, en étant distinct des points A et B , de ce fait le triangle ABC est rectangle en C .

2. b. Le segment $[BC]$ mesure 10 cm : Affirmation **FAUSSE**.

Plusieurs possibilités pour calculer BC dans le triangle rectangle ABC , avec la trigonométrie (c'est toujours plus rapide), et avec le théorème de Pythagore.

- Avec la trigonométrie : 2 méthodes, avec $\tan$ ou avec $\cos$

Le triangle ABC est rectangle en C donc

$$\tan \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC} \text{ soit } \tan 30^\circ = \frac{6}{BC}$$

Et donc

$$BC = \frac{6}{\tan 30^\circ} \approx 10,4 \text{ cm} \neq 10 \text{ cm}$$

Le triangle ABC est rectangle en C donc

$$\cos \widehat{ABC} = \frac{BC}{AB} \text{ soit } \cos 30^\circ = \frac{BC}{12}$$

Et donc

$$BC = 12 \times \cos 30^\circ \approx 10,4 \text{ cm} \neq 10 \text{ cm}$$

- Avec Pythagore

Le triangle ABC est rectangle en C donc d'après le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

$$12^2 = 6^2 + CB^2$$

$$BC^2 = 12^2 - 6^2$$

$$BC^2 = 108$$

Or BC est positif car c'est une longueur, la seule solution positive est alors :

$$BC = \sqrt{108} \approx 10,4 \text{ cm} \neq 10 \text{ cm}$$

L'affirmation est donc bien **fausse**.



2. c. L'angle $\widehat{AOC}$ mesure 60° : Affirmation VRAIE.

L'angle au centre $\widehat{AOC}$ intercepte le même arc $\widehat{AC}$ que l'angle inscrit $\widehat{ABC}$. Or on sait par théorème que la mesure de l'angle au centre est le double de celle de l'angle inscrit intersectant le même arc, de ce fait :

$$\widehat{AOC} = 2 \times \widehat{ABC} = 60^\circ$$

2. d. L'aire du triangle ABC est $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$: Affirmation VRAIE.

Le triangle ABC est rectangle C donc son aire est la moitié du produit des deux côtés de l'angle droit. En utilisant le résultat de la question **2b.** résolue avec le théorème de Pythagore, on a $CB = \sqrt{108}$ soit :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABC} &= \frac{CA \times CB}{2} \\ \mathcal{A}_{ABC} &= \frac{6 \times \sqrt{108}}{2} \\ \mathcal{A}_{ABC} &= 3 \times \sqrt{108} \\ \mathcal{A}_{ABC} &= 3 \times \sqrt{36 \times 3} \\ \mathcal{A}_{ABC} &= 3 \times \sqrt{36} \times \sqrt{3} \\ \mathcal{A}_{ABC} &= 3 \times 6 \times \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = 18\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

L'affirmation est donc **vraie**.

Remarque : Un élève ayant utilisé la trigonométrie pour résoudre la question **2b.** pouvait ici être pénalisé. Il serait intéressant de connaître les consignes des correcteurs.

2. e. L'angle $\widehat{BOC}$ mesure 31° : Affirmation FAUSSE.

Les angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOC}$ sont adjacents et supplémentaires donc la somme de leur mesure fait 180° . On a donc en utilisant le résultat de la question **2c.**, on a $\widehat{AOC} = 60^\circ$ soit :

$$\widehat{BOC} = 180^\circ - \widehat{AOC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

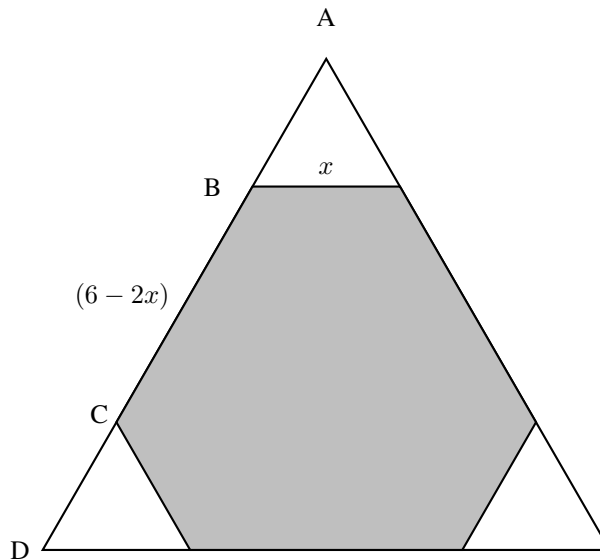
L'affirmation est donc **fausse**.



Exercice 7.

4 points

Trois triangles équilatéraux identiques sont découpés dans les coins d'un triangle équilatéral de côté 6 cm. La somme des périmètres des trois petits triangles est égale au périmètre de l'hexagone gris restant. Quelle est la mesure du côté des petits triangles ?



- **Périmètre $\mathcal{P}_1$ des trois triangles**

On appelle x la longueur des côtés des petits triangles équilatéraux. Le périmètre $\mathcal{P}_1$ de ces trois triangles est donc de :

$$\mathcal{P}_1 = 3 \times 3x = 9x$$

- **Périmètre $\mathcal{P}_2$ de l'hexagone**

L'hexagone est composé :

- de 3 des côtés des petits triangles équilatéraux, donc chacun de longueur x ;
- de 3 côtés dont chacun mesure la longueur d'un côté du grand triangle (soit 6 cm) moins deux fois celui des petits triangles équilatéraux soit :

$$BC = AD - 2AB = 6 - 2x$$

- Le périmètre de l'hexagone est donc de :

$$\mathcal{P}_2 = 3x + 3 \times (6 - 2x) = 18 - 3x$$

- **Égalité**

On veut donc que $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}_2$ soit

$$9x = 18 - 3x$$

d'où

$$12x = 18$$

et donc

$$x = \frac{18}{12} = 1,5 \text{ cm}$$

- **Conclusion**

La mesure du côté des petits triangles est donc de 1,5 cm.

- Fin du devoir -