Math93.com

DNB - Brevet des Collèges 2016 Asie

27 juin 2016
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. QCM — 4 points

Question 1 (Réponse b)

Dans une urne il y a 10 boules rouges et 20 noires, la probabilité de tirer une rouge est

a. $\dfrac{1}{2}$ **b.** $\dfrac{1}{3}$ **c.** $\dfrac{2}{3}$

Preuve
On suppose être en conditions d'équiprobabilité.
Il y a 10 boules rouges pour un total de 30 boules $(10+20)$ donc la probabilité de tirer un boule rouge parmi les 30 boules est :

$$p=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$$

La bonne réponse à la question 1 est la réponse b.

Question 2 (Réponse c)

$(3x+2)^2=$

a. $9x^2+4$ **b.** $3x^2+6x+4$ **c.** $4+3x(3x+4)$

Preuve

- D'une part on a en appliquant la première identité remarquable :

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2 \text{ avec } \begin{cases} a=3x \\ b=2 \end{cases}$$

$$(3x+2)^2=(3x)^2+2\times 3x\times 2+2^2=\underline{9x^2+12x+4}$$

- D'autre part par une simple distributivité :

$$4+3x(3x+4)=4+9x^2+12x=\underline{9x^2+12x+4}$$

La bonne réponse à la question 2 est la réponse c .

Question 3 (Réponse)

Une solution de l'équation $x^2 - 2x - 8 = 0$ est :

a. 0 **b.** 3 **c.** 4

Preuve

- Pour $x = 0$ on a :
$$x^2 - 2x - 8 = 0^2 - 2 \times 0 - 8 = -8 \neq 0$$
Donc 0 n'est pas solution de l'équation.
- Pour $x = 3$ on a :
$$x^2 - 2x - 8 = 3^2 - 2 \times 3 - 8 = 9 - 6 - 8 = -5 \neq 0$$
Donc 3 n'est pas solution de l'équation.
- Pour $x = 4$ on a :
$$x^2 - 2x - 8 = 4^2 - 2 \times 4 - 8 = 16 - 8 - 8 = 0$$
Donc 4 est solution de l'équation.

La bonne réponse à la question 3 est la réponse c .

Question 4 (Réponse 2)

Si on double toutes les dimensions d'un aquarium, alors son volume est multiplié par :

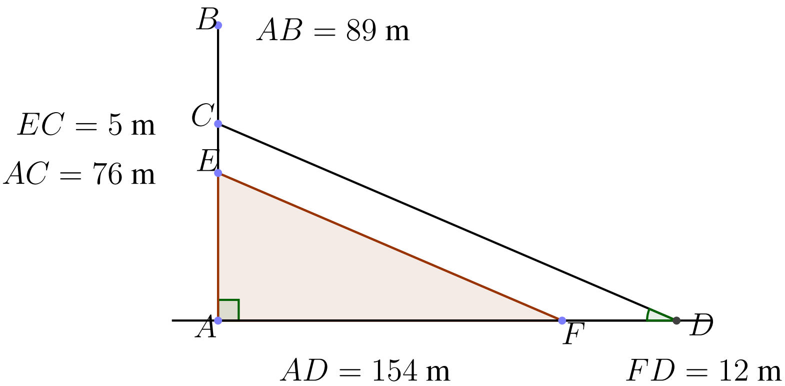
a. 2 **b.** 6 **c.** 8

Preuve
Par propriété, si on multiplie les dimensions d'un solide par un nombre positif k, son volume est multiplié par k^3 donc ici par $2^3 = 8$.

La bonne réponse à la question 4 est la réponse c .

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 2. Géométrie 6 points



1. Calculer la hauteur du hauban $[CD]$. Arrondir au mètre près.

Dans le triangle ACD rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$CD^2 = AC^2 + AD^2$$
$$CD^2 = 76^2 + 154^2$$
$$CD^2 = 5776 + 23716$$
$$CD^2 = 29492$$

Or CD est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$CD = \sqrt{29492}$$
$$CD \approx \underline{172 \text{ m}}$$

2. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{CDA}$ formé par le hauban $[CD]$ et la chaussée. Arrondir au degré près.

Le triangle CDA est rectangle en A donc en utilisant la tangente, ce qui évite d'introduire une valeur approchée de la longueur CD calculée lors de la question **(1.)** on a :

$$\tan \widehat{CDA} = \frac{AC}{AD} = \frac{76}{154} \Longrightarrow \boxed{\widehat{CDA} = \arctan \frac{76}{154} \approx 26^\circ}$$

3. Les haubans $[CD]$ et $[EF]$ sont parallèles ?

Méthode 1 :

- **Données**.
  Tout d'abord notons que puisque le point E appartient au segment [AC] et le point F au segment [AD] donc on a :

  $$AE = AC - EC = 76 - 5 = \underline{71 \text{ m}} \quad \text{et} \quad AF = AD - FD = 154 - 12 = \underline{142 \text{ m}}$$

  Les points A,E, C et A, F, D sont alignés dans cet ordre sur deux droites sécantes en A.
- **Le test**.

  $$\begin{cases} \dfrac{AE}{AC} = \dfrac{71}{76} \\ \dfrac{AF}{AD} = \dfrac{142}{154} = \dfrac{71}{77} \end{cases}$$
- **Conclusion**.
  On n'a donc pas égalité, $\dfrac{AE}{AC} \neq \dfrac{AF}{AD}$. De ce fait, d'après la *contraposée du théorème de Thalès*, les droites (CD) et (EF) ne sont pas parallèles.

Méthode 2

On peut aussi calculer une mesure de l'angle $\widehat{AFE}$ et montrer qu'elle est différente de celle de l'angle $\widehat{CDA}$ calculée lors de la question **(2.)**. AFE rectangle en A donc :

$$\tan \widehat{AFE} = \frac{AE}{AF} = \frac{71}{142} = \frac{1}{2} \Longrightarrow \boxed{\widehat{AFE} = \arctan \frac{1}{2} \approx 27^\circ}$$

Les angles $\widehat{AFE}$ et $\widehat{CDA}$ sont correspondants et de mesures différentes, les droites (CD) et (EF) ne sont pas parallèles.

 ©ISSN 2272-5318

Exercice 3. Mesures de qualité 6 points

Document 1 : Résultats de l'étude

Nombre de bonbons	56	57	58	59	60	61	62	63	64
Effectifs	4	36	53	79	145	82	56	38	7

Document 2 : Critères de qualité

Pour être validée par l'entreprise, la machine doit respecter trois critères de qualité :

- Le nombre moyen de bonbons dans un paquet doit être compris entre 59,9 et 60,1.
- L'étendue de la série doit être inférieure ou égale à 10.
- L'écart interquartile (c'est-à-dire la différence entre le troisième quartile et le premier quartile) doit être inférieur ou égal à 3.

La nouvelle machine respecte-t-elle les nouvelles mesures de qualité ?

- Critère de qualité n°1 : nombre moyen de bonbons.
  Le nombre moyen de bonbons est :
  $$\overline{m} = \frac{56 \times 4 + 57 \times 36 + \cdots + 63 \times 38 + 64 \times 7}{500} = \frac{30\,027}{500}$$
  $$\boxed{\overline{m} \approx 60,05 \in [59,9\,;\,60,1]}$$
  Le nombre moyen de bonbons dans un paquet est bien compris entre 59,9 et 60,1 donc le premier critère de qualité est validé.
- Critère de qualité n°2 : étendue .
  L'étendue e d'une série statistique est la différence entre sa plus grande et sa plus petite valeur soit ici :
  $$\boxed{e = 64 - 56 = 8 \leq 10}$$
  L'étendue est inférieure ou égale à 10 donc le deuxième critère de qualité est validé.
- Critère de qualité n°3 : écart interquartile .
  - Il y a 500 valeurs donc le rang correspondant au premier quartile est :
    $$500 \div 4 = 125$$
    Le premier quartile est donc la 125ième valeur soit :
    $$Q_1 = 59$$
  - Il y a 500 valeurs donc le rang correspondant au troisième quartile est :
    $$3 \times 500 \div 4 = 3 \times 125 = 375$$
    Le troisième quartile est donc la 375ième valeur soit :
    $$Q_3 = 61$$
  - l'écart interquartile est donc inférieur ou égal à 3 ce qui induit que le critère n°3 soit aussi validé :
    $$\boxed{Q_3 - Q_1 = 61 - 59 = 2 \leq 3}$$
- **Conclusion** : la machine respecte bien les 3 critères de qualité.

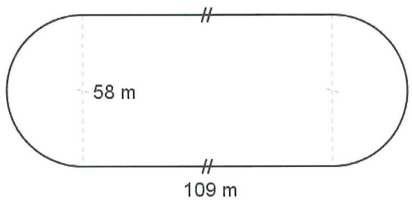
Nb de bonbons	56	57	58	59	60	61	62	63	64
Effectifs	4	36	53	79	145	82	56	38	7
ECC	4	40	93	172	317	399	455	493	500
Rangs	$1 \to 4$	$5 \to 40$	$41 \to 93$	$94 \to 172$	$173 \to 317$	$318 \to 399$	$400 \to 455$	$456 \to 493$	$494 \to 500$

Exercice 4. Indice de forme — 5 points

L'objectif est de courir la plus grande distance possible en 12 minutes.

1. Vérifier que le longueur de la piste est d'environ 400 m.

Document 2 : Plan de la piste



Cette piste est composée de deux parties rectilignes et de deux demi-cercles.

La piste est composé de deux segments de longueur 109 m et de deux demi-cercle (donc d'un cercle entier) de diamètre 58 m. La longueur totale de la piste est alors :

$$\ell = 2 \times 109 + \pi \times 58 = 218 + 58\pi \approx \underline{400,21 \text{ m}}$$

2. Adèle et Mathéo on décidé de participer au marathon uniquement si leur indice de forme est au moins au niveau moyen. Déterminer si ils y participeront.

On va pour cette question utiliser le résultat de la question **(1.)**, la longueur de la piste est donc estimée à 400 m.

- **Pour Adèle (que l'on suppose être une femme)**.

Indice de Forme	Moins de 30 ans	De 30 à 39 ans
Très faible	moins de 1 500 m	moins de 1 350 m
Faible	1 501 à 1 850 m	1 351 à 1 700 m
Moyen	1 851 à 2 150 m	1 701 à 2 000 m
Bon	2 151 à 2 650 m	2 001 à 2 500 m
Très bon	plus de 2 650 m	plus de 2 500 m

Adèle a 31 ans et a réalisé 6 tours de pistes et 150 m. Elle a donc parcourue en 12 minutes la distance de :

$$d_1 \approx 6 \times 400 \text{ m} + 150 \text{ m} \approx \underline{2\,550 \text{ m}}$$

Son indice de forme est donc « *Très bon* » (de ce fait au moins moyen), elle peut participer au marathon.

- **Pour Adèle (que l'on suppose être une femme)**.

Mathéo a lui 27 ans et a réalisé le test (courir 12 minutes) à la vitesse moyenne de 13,5 km/h.

Distance	13,5 km	?
Temps	60 min	12 min

Il a donc parcourue la distance de :

$$d_2 = \frac{12 \times 13,5}{60} = 2,7 \text{ km} = \underline{2\,700 \text{ m}}$$

Indice de Forme	Moins de 30 ans
Très faible	moins de 1 600 m
Faible	1 601 à 2 000 m
Moyen	2 001 à 2 400 m
Bon	2 401 à 2 800 m
Très bon	plus de 2 800 m

Son indice de forme est donc « *Bon* » et il peut participer au marathon.

Exercice 5. Fonctions et tableur — 6 points

On considère les fonctions f et g définies par : $f(x) = 2x + 1$ *et* $g(x) = x^2 + 4x - 5$.

B3 | f_x | =B1*B1+4*B1-5

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	f(x)	-5	-3	-1	1	3	5	7
3	g(x)	-8		-8	-5	0	7	16

1. Quelle est l'image de 3 par f ?
L'image de 3 par f est :

$$\boxed{f(3) = 2 \times 3 + 1 = 7}$$

2. Calculer le nombre qui doit apparaitre dans la cellule $C3$.
Le nombre qui doit apparaitre dans la cellule $C3$ est l'image de -2 par g soit :

$$g(-2) = (-2)^2 + 4 \times (-2) - 5 = 4 - 8 - 5 \Longrightarrow \boxed{g(-2) = -9}$$

3. Quelle formule Léa a-t-elle saisie dans la cellule $B2$?
La formule que Léa a saisie dans la cellule $B2$ est :

$$\boxed{= 2 * B1 + 1}$$

4. A l'aide de la copie d'écran et sans justifier, donner une solution de l'inéquation : $2x + 1 < x^2 + 4x - 5$.
Une solution de l'inéquation : $2x + 1 < x^2 + 4x - 5$ est :

$$\boxed{x = 2} \text{ ou } \boxed{x = 3}$$

En effet on a :

$$f(2) = 5 < g(2) = 7 \text{ et } f(3) = 7 < g(3) = 16$$

5. Déterminer un antécédent de 1 par f.
Un antécédent de 1 par f est $\underline{x = 0}$ car $f(0) = 1$.

Exercice 6. Vrai/Faux — 3 points

Affirmation 1 (Fausse)

Deux nombres impairs sont toujours premiers entre eux.

Preuve
Les entiers impairs 3 et 9 ne sont pas premiers entre eux puisque leur PGCD vaut 3.
L'affirmation 1 est fausse.

Affirmation 2 (Fausse)

Pour tout nombre positif a et b on a $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Preuve
En prenant $a = b = 1$ on a :

$$\begin{cases} \sqrt{a+b} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{1} + \sqrt{1} = 2 \neq \sqrt{2} \end{cases}$$

L'affirmation 2 est fausse.

Affirmation 3 (Vraie)

Si on augmente le prix d'un article de 20% puis de 30%, alors, au total, le prix a augmenté de 56%.

Preuve
Augmenter de $x\%$ c'est multiplier par $(1 + x\%)$ donc augmenter de 20% puis de 30%, c'est multiplier le prix initial par :

$$(1 + 20\%) \times (1 + 30\%) = 1,56 = 1 + 0,56 = \underline{1 + 56\%}$$

Ce qui correspond bien a une augmentation de 56%. L'affirmation 3 est vraie.
Compléments :

Propriété 1

Soit x un nombre strictement positif, $x \in \mathbb{R}_+^* =]0\ ;\ +\infty[$.

1. Augmenter une quantité V de $x\ \%$ c'est la multiplier par $k = (1 + x\ \%)$.

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[r, bend left, "\times(1+x\ \%)"] & v_f \arrow[l, bend left, "\div(1+x\ \%)"] \end{tikzcd}$$

2. Diminuer une quantité V de $x\ \%$ c'est la multiplier par $k = (1 - x\ \%)$.

$$\begin{tikzcd} v_i \arrow[r, bend left, "\times(1-x\ \%)"] & v_f \arrow[l, bend left, "\div(1-x\ \%)"] \end{tikzcd}$$

Démonstration. **1.** Augmenter une quantité V de $x\ \%$ c'est lui ajouter $x\ \%$ de V. Elle passe donc d'une valeur initiale $V = v_i$ à une valeur finale $v_f = v_i + v_i \times x\ \%$. Or après factorisation on obtient :

$$v_f = v_i + v_i \times x\ \% = v_i \times \left(1 + x\ \%\right) = v_i \times \left(1 + \frac{x}{100}\right) = v_i \times \frac{100 + x}{100}$$

2. Diminuer une quantité V de $x\ \%$ c'est lui soustraire $x\ \%$ de V. Elle passe donc d'une valeur initiale $V = v_i$ à une valeur finale $v_f = v_i - v_i \times x\ \%$. Or après factorisation on obtient :

$$v_f = v_i - v_i \times x\ \% = v_i \times \left(1 - x\ \%\right) = v_i \times \left(1 - \frac{x}{100}\right) = v_i \times \frac{100 - x}{100}$$

□

©ISSN 2272-5318

Exercice 7. Volume — 6 points

Document 1 : Recette du cocktail

Ingrédients pour 6 personnes :

- 60 cl de jus de mangue
- 30 cl de jus de poire
- 12 cl de jus de citron vert
- 12 cl de sirop de cassis

Préparation :

Verser les différents ingrédients dans un récipient et remuer.
Garder au frais pendant au moins 4h.

Document 2 : Récipient de Romane

On considère qu'il a la forme d'une demi-sphère de diamètre 26 cm.

Rappels :

- Volume d'une sphère : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- $1\,L = 1\,dm^3 = 1\,000\,cm^3$

Le récipient est-il assez grand pour préparer le cocktail pour 20 personnes ?
On peut utiliser un tableau de proportionnalité :

Nombre de personnes	6	20
Jus de mangue	60 cl	200 cl
Jus de poire	30 cl	100 cl
Jus de citron vert	12 cl	40 cl
Sirop de cassis	12 cl	40 cl

$\div 2$ $\quad \times 10$ $\quad \times 2$ $\quad \times \frac{20}{6}$

- **Calcul du volume des ingrédients**.
Pour 20 personnes, il faudra donc au total 200 cl de jus de mangue, 100 cl de jus de poire, 40 cl de jus de citron et de cassis soit :
$$c = 200 + 100 + 40 + 40 = 380 \text{ cl} = 3,8 \text{ L}$$

- **Calcul du volume du récipient**.
Le volume d'une demi-sphère de rayon $r = 13$ cm est :
$$V = \frac{1}{2} \times \left(\frac{4}{3}\,\pi\, r^3\right) = \frac{2}{3} \times \pi \times 13^3 \approx 4\,601,386 \text{ cm}^3$$
Or on a : $1 \text{ L} = 1\,000 \text{ cm}^3$ donc :
$$V \approx 4,6 \text{ L} > c = 3,8 \text{ L}$$

- **Conclusion**
Le récipient choisi par Romane est donc assez grand pour préparer le cocktail pour 20 personnes.

- Fin du devoir -