



Math93.com

DNB - Brevet des Collèges 2017 Pondichéry

2 Mai 2017

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter



Remarque : dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

Exercice 1. Calcul littéral

7 points

On considère l'expression $E = (x - 2)(2x + 3) - 3(x - 2)$.

1. Développer E .

$$E = (x - 2)(2x + 3) - 3(x - 2)$$

$$E = 2x^2 + 3x - 4x - 6 - 3x + 6$$

$$E = \underline{2x^2 - 4x}$$

2. Factoriser E et vérifier que $E = 2F$, où $F = x(x - 2)$.

$$E = (x - 2)(2x + 3) - 3(x - 2)$$

$$E = (x - 2)[(2x + 3) - 3]$$

$$E = (x - 2)(2x)$$

$$E = 2 \times \underbrace{x(x - 2)}_F$$

On a bien montré que : $E = 2F$, où $F = x(x - 2)$

3. Déterminer tous les nombres x tels que $(x - 2)(2x + 3) - 3(x - 2) = 0$.

On va utiliser la forme factorisée de l'expression :

$$(x - 2)(2x + 3) - 3(x - 2) = 0 \iff 2 \times x(x - 2) = 0$$

c'est une équation produit nul et par théorème, un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul soit

$$(x - 2)(2x + 3) - 3(x - 2) = 0 \iff (2x = 0) \text{ ou } (x - 2 = 0)$$

$$(x - 2)(2x + 3) - 3(x - 2) = 0 \iff (x = 0) \text{ ou } (x = 2)$$

Les solutions de l'équation sont : 0 et 2.

**Exercice 2. Probabilités****6 points**

Un sac contient 20 boules ayant chacune la même probabilité d'être tirée. Ces 20 boules sont numérotées de 1 à 20. On tire une boule au hasard dans le sac. Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Quelle est la probabilité de tirer la boule numérotée 13 ?

Le sac contient 20 boules ayant chacune la même probabilité d'être tirée. Ces 20 boules étant numérotées de 1 à 20, il y a une boule portant le numéro 13 sur 20 et donc la probabilité de tirer la boule numérotée 13 est : $p_1 = \frac{1}{20}$.

2. Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un numéro pair ?

Sur les 20 boules étant numérotées de 1 à 20, il y a 10 boules portant un numéro pair et donc la probabilité de tirer portant un numéro pair est : $p_1 = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$.

3. A-t-on plus de chances d'obtenir une boule portant un numéro multiple de 4 que d'obtenir une boule portant un numéro diviseur de 4 ?

- Parmi les entiers de 1 à 20, les multiples de 4 sont au nombre de 5, ce sont les entiers : 4 ; 8 ; 12 ; 16 et 20.

Donc la probabilité de cet évènement est : $p_2 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

- Parmi les entiers de 1 à 20, les diviseurs de 4 sont au nombre de 3, ce sont les entiers : 1 ; 2 et 4.

Donc la probabilité de cet évènement est : $p_3 = \frac{3}{20} < \frac{1}{4}$.

On a donc plus de chances d'obtenir une boule portant un numéro multiple de 4 , que d'obtenir une boule portant un numéro diviseur de 4 .

4. Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un numéro qui soit un nombre premier ?

Parmi les entiers de 1 à 20, les nombres premiers sont au nombre de 8, ce sont les entiers : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 et 19.

Donc la probabilité de cet évènement est :

$$p_4 = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

**Exercice 3. Programme de calcul et algorithme****7 points**

On considère le programme de calcul ci-contre dans lequel x , Étape 1, Étape 2 et Résultat sont quatre variables.



1.

1. a. Julie a fait fonctionner ce programme en choisissant le nombre 5. Vérifier que ce qui est dit à la fin est : « J'obtiens finalement 20 ».

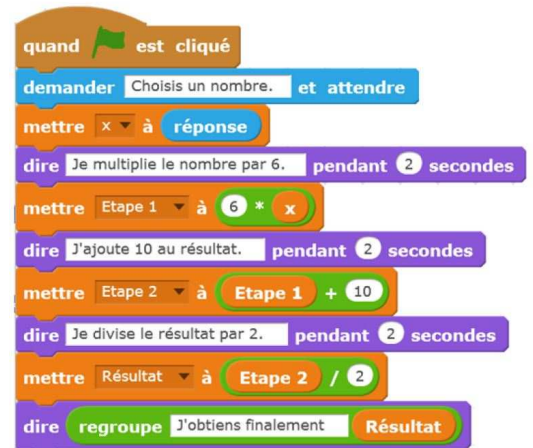
Pour $x = 5$:

- étape 1 : $6 \times 5 = 30$
- étape 2 : $30 + 10 = 40$
- résultat : $40 : 2 = 20$
- dire « J'obtiens finalement 20 ».

1. b. Que dit le programme en choisissant au départ 7 ?

Pour $x = 7$:

- étape 1 : $6 \times 7 = 42$
- étape 2 : $42 + 10 = 52$
- résultat = $52 : 2 = 26$
- dire « J'obtiens finalement 26 ».



2. Julie fait fonctionner le programme, et ce qui est dit est : « J'obtiens finalement 8 ». Quel nombre a-t-elle choisi ?

Pour retrouver le nombre du départ on peut « remonter » l'algorithme, d'où

- dire « J'obtiens finalement 8 ».
- résultat = $8 \implies 8 \times 2 = 16$
- étape 2 : $16 - 10 = 6$
- étape 1 : $6 \div 6 = 1$
- le nombre de départ est 1.

3. Si l'on appelle x le nombre choisi au départ, écrire en fonction de x l'expression obtenue à la fin du programme, puis réduire cette expression autant que possible.

Pour x au départ :

- étape 1 : $6 \times x = 6x$
- étape 2 : $6x + 10$
- résultat : $(6x + 10) : 2 = \underline{3x + 5}$

4. Maxime utilise le programme de calcul ci-dessous :

- | |
|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • Choisir un nombre. • Lui ajouter 2 • Multiplier le résultat par 5 |
|---|

Peut-on choisir un nombre pour lequel le résultat obtenu par Maxime est le même que celui obtenu par Julie ?

- Le programme de Maxime donne, en choisissant x comme nombre de départ :

Pour x au départ :

- étape 1 : $2 + x$
- étape 2 : $5 \times (2 + x) = \underline{10 + 5x}$

- On cherche donc x pour que les deux programmes donnent le même résultat. Cela revient à résoudre l'équation :

$$10 + 5x = 3x + 5 \iff 2x = -5$$

$$\iff x = -\frac{5}{2} = \underline{-2,5}$$

Le résultat obtenu par Maxime est le même que celui obtenu par Julie avec $-2,5$ au départ.

**Exercice 4. Problème : fonctions, statistiques et tableur****7 points**

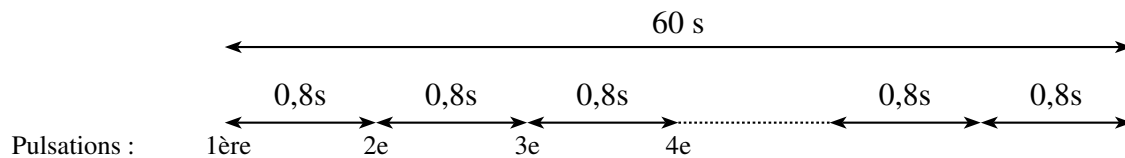
Pour ses 32 ans, Denis a acheté un vélo d'appartement afin de pouvoir s'entraîner pendant l'hiver. La fréquence cardiaque (FC) est le nombre de pulsations (ou battements) du cœur par minute.

1. Denis veut estimer sa fréquence cardiaque : en quinze secondes, il a compté 18 pulsations. À quelle fréquence cardiaque, exprimée en pulsations par minute, cela correspond-il ?

Temps en s	15 s	60 s	Soit $n = \frac{60 \times 18}{15} = 72$.
Nb pulsations	18	$n ?$	

La fréquence cardiaque correspondante est donc de : 72 pulsations par minutes.

2. Son vélo est équipé d'un cardiofréquencemètre qui lui permet d'optimiser son effort en enregistrant, dans ce cardiofréquencemètre, toutes les pulsations de son cœur. À un moment donné, le cardiofréquencemètre a mesuré un intervalle de 0,8 seconde entre deux pulsations. Calculer la fréquence cardiaque qui sera affichée par le cardiofréquencemètre.



On cherche le nombre d'intervalles de 0,8 secondes présents dans 60 secondes : $60 \div 0,8 = 75$. Il y a donc 75 intervalles de 0,8 secondes dans 60 secondes, ce qui nous donne 76 pulsations par minute.

3. Après une séance d'entraînement, le cardiofréquencemètre lui a fourni les renseignements suivants :

Nombre de pulsations enregistrées	Fréquence minimale enregistrée	Fréquence moyenne	Fréquence maximale enregistrée
3 640	65 pulsations/minute	130 pulsations/minute	182 pulsations/minute

3. a. Quelle est l'étendue des fréquences cardiaques enregistrées ?

Dans une série statistique, l'étendue est la différence entre les valeurs extrêmes soit ici : $e = 182 - 65 = \underline{117}$.

3. b. Denis n'a pas chronométré la durée de son entraînement. Quelle a été cette durée ?

Le nombre de pulsations enregistrées est 3 640 avec une moyenne de 130 pulsations par minutes soit :

Temps en s	1 min	$t ?$	Soit $t = \frac{1 \times 3\,640}{130} = 28$ min.
Nb pulsations	130	3 640	

La durée de son entraînement a été de 28 minutes.

4. Denis souhaite connaître sa fréquence cardiaque maximale conseillée (FCMC) afin de ne pas la dépasser et ainsi de ménager son cœur. La FCMC d'un individu dépend de son âge a , exprimé en années, elle peut s'obtenir grâce à la formule suivante établie par Astrand et Ryhming : « Fréquence cardiaque maximale conseillée = $220 - \text{âge}$. » On note $f(a)$ la FCMC en fonction de l'âge a , on a donc $f(a) = 220 - a$.

4. a. Vérifier que la FCMC de Denis est égale à 188 pulsations/minute.

La FCMC de Denis qui a 32 ans est égale à :

$$f(32) = 220 - 32 = \underline{188 \text{ pulsations/minute}}$$

4. b. Comparer la FCMC de Denis avec la FCMC d'une personne de 15 ans.

La FCMC d'une personne de 15 ans est supérieure à celle de Denis en effet elle est égale à :

$$f(15) = 220 - 15 = \underline{205 \text{ pulsations/minute}} > 188.$$



5. Après quelques recherches, Denis trouve une autre formule permettant d'obtenir sa FCMC de façon plus précise. Si a désigne l'âge d'un individu, sa FCMC peut être calculée à l'aide de la formule de Gellish :
« Fréquence cardiaque maximale conseillée = $191,5 - 0,007 \times \hat{a}ge^2$ ».
On note $g(a)$ la FCMC en fonction de l'âge a , on a donc $g(a) = 191,5 - 0,007 \times a^2$. Denis utilise un tableur pour comparer les résultats obtenus à l'aide des deux formules :

B2		=220-A2	
	A	B	C
1	Âge a	FCMC $f(a)$ (Astrand et Ryhming)	FCMC $g(a)$ (Gellish)
2	30	190	185,2
3	31	189	184,773
4	32	188	184,332
5	33	187	183,877

Quelle formule faut-il insérer dans la cellule C2 puis recopier vers le bas, pour pouvoir compléter la colonne « FCMC $g(a)$ (Gellish) » ?

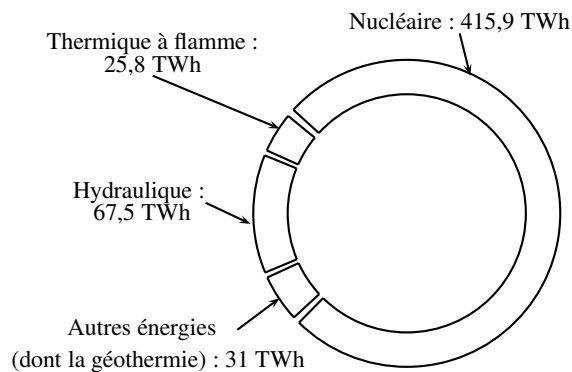
La formule est :

$$= 191,5 - 0,007 * A2 * A2 \quad \text{ou} \quad = 191,5 - 0,007 * A2 \wedge 2$$

Exercice 5. Problème : statistiques, volumes de solides

8 points

Un TeraWattheure est noté : 1 TWh. La géothermie permet la production d'énergie électrique grâce à la chaleur des nappes d'eau souterraines. Le graphique ci-contre représente les productions d'électricité par différentes sources d'énergie en France en 2014.



Statistiques de l'électricité en France 2014 RTE - chiffres de production 2014 - EDF

1.

1. a. Calculer la production totale d'électricité en France en 2014.

La production totale d'électricité en France en 2014 est : $P = 25,8 + 67,5 + 31 + 415,9 = 540,2$ TWh.

1. b. Montrer que la prop. d'électricité produite par les « Autres énergies (dont la géothermie) » est environ égale à 5,7 %.

La production d'électricité produite par les « Autres énergies (dont la géothermie) » est de 31 TWh sur un total de 540,2 TWh ce qui représente une proportion de :

$$\frac{31}{540,2} \approx 5,7\%$$



2. Ce tableau présente les productions d'électricité par les différentes sources d'énergie, en France, en 2013 et en 2014.

	Thermique à flamme	Hydraulique	Autres énergies (dont la géothermie)	Nucléaire
Production en 2013 (en TWh)	43,5	75,1	28,1	403,8
Production en 2014 (en TWh)	25,8	67,5	31	415,9
Variation de production entre 2013 et 2014 en %	-40,7 %	-10,1 %	<u>+10,3 %</u>	+3 %
Variation de production entre 2013 et 2014 en TWh	$25,8 - 43,5 = -17,7$	$67,5 - 75,1 = -7,6$	$31 - 28,1 = 2,9$	$415,9 - 403,8 =$ <u>12,1</u>

Alice et Tom ont discuté pour savoir quelle est la source d'énergie qui a le plus augmenté sa production d'électricité. Tom pense qu'il s'agit des « Autres énergies (dont la géothermie) » et Alice pense qu'il s'agit du « Nucléaire ». Quel est le raisonnement tenu par chacun d'entre eux ?

- Tom a regardé le pourcentage d'augmentation de 2013 à 2014 : +10,3%.
- Alice a regardé la variation de production de 2013 à 2014, exprimée en TWh que nous avons calculé dans la dernière ligne du tableau. C'est dans ce cas effectivement le nucléaire qui a le plus augmenté sa production d'électricité.

3. La centrale géothermique de Rittershoffen (Bas Rhin) a été inaugurée le 7 juin 2016. On y a creusé un puits pour capter de l'eau chaude sous pression, à 2 500 m de profondeur, à une température de 170 degrés Celsius.

Ce puits a la forme du tronc de cône représenté ci-contre. Les proportions ne sont pas respectées. On calcule le volume d'un tronc de cône grâce à la formule suivante :

$$V = \frac{\pi}{3} \times h \times (R^2 + R \times r + r^2)$$

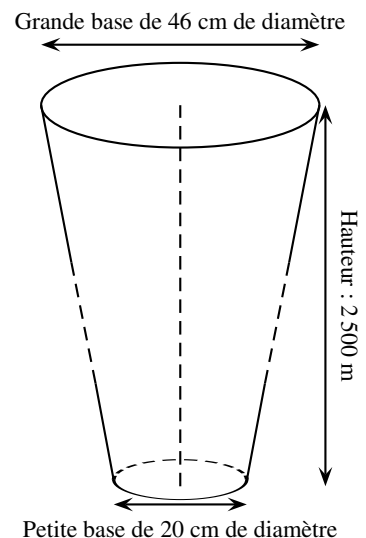
où h désigne la hauteur du tronc de cône, R le rayon de la grande base et r le rayon de la petite base.

a. Vérifier que le volume du puits est environ égal à 225 m³.

On applique la formule en uniformisant les unités en mètres afin d'avoir le volume en m³ :

$$\begin{cases} h = 2\,500 \text{ m} \\ R = 46 \text{ cm} \div 2 = 23 \text{ cm} = 0,23 \text{ m} \\ r = 20 \text{ cm} \div 2 = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi}{3} \times 2\,500 \times (0,23^2 + 0,23 \times 0,1 + 0,1^2) \\ &= \frac{\pi}{3} \times 2\,500 \times 0,0859 \\ &= \frac{214,75\pi}{3} \\ V &\approx \underline{\underline{225 \text{ m}^3}} \end{aligned}$$



b. La terre est tassée quand elle est dans le sol. Quand on l'extrait, elle n'est plus tassée et son volume augmente de 30 %. Calculer le volume final de terre à stocker après le forage du puits.

Faire une augmentation de 30%, c'est multiplier par $1 + 30\% = 1,3$ donc le volume de terre V' est :

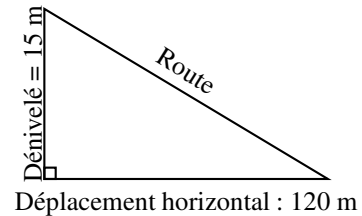
$$\begin{aligned} V' &= 1,3 \times V \\ V' &\approx \underline{\underline{292,5 \text{ m}^3}} \end{aligned}$$

**Exercice 6. Pythagore et trigonométrie****7 points**

On obtient la pente d'une route en calculant le quotient du dénivelé (c'est-à-dire du déplacement vertical) par le déplacement horizontal correspondant. Une pente s'exprime sous forme d'un pourcentage.

Sur l'exemple ci-contre, la pente de la route est :

$$\frac{\text{dénivelé}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{15}{120} = 0,125 = 12,5\%$$



Classer les pentes suivantes dans l'ordre décroissant, c'est-à-dire de la pente la plus forte à la pente la moins forte.

- Route descendant du château des Adhémar, à Montélimar.

La pente p_1 est de $p_1 = 24\%$.



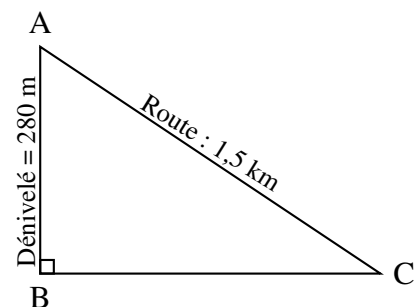
- Tronçon d'une route descendant du col du Grand Colombier (Ain).

Dans le triangle BCA rectangle en B , d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned} CA^2 &= BC^2 + BA^2 \\ 1500^2 &= BC^2 + 280^2 \\ BC^2 &= 1500^2 - 280^2 \\ BC^2 &= 2250000 - 78400 \\ BC^2 &= 2171600 \end{aligned}$$

Or BC est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{2171600} \\ BC &\approx \underline{\underline{1473,63 \text{ m}}} \end{aligned}$$



La pente p_2 est de :

$$p_2 = \frac{\text{dénivelé}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{AB}{BC} = \frac{280}{\sqrt{2171600}} \approx 19\%$$

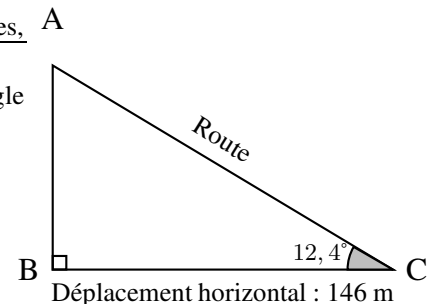
- Tronçon d'une route descendant de l'Alto de l'Angliru (région des Asturies, Espagne).

La pente p_3 est donnée par la tangente de l'angle \widehat{ACB} en effet, dans le triangle ABC rectangle en C on a :

$$\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{\text{dénivelé}}{\text{déplacement horizontal}}$$

Soit

$$p_3 = \tan 12,4^\circ \approx \underline{\underline{22\%}}$$



- Donc on a dans l'ordre $p_1 > p_3 > p_2$ soit :

- Route descendant du château des Adhémar, à Montélimar
- Tronçon d'une route descendant de l'Alto de l'Angliru (région des Asturies, Espagne)
- Tronçon d'une route descendant du col du Grand Colombier (Ain).

**Exercice 7. Tâche complexe****5 points**

Alban souhaite proposer sa candidature pour un emploi dans une entreprise. Il doit envoyer dans une seule enveloppe : 2 copies de sa lettre de motivation et 2 copies de son Curriculum Vitae (CV). Chaque copie est rédigée sur une feuille au format A4.

1. Il souhaite faire partir son courrier en lettre prioritaire. Pour déterminer le prix du timbre, il obtient sur internet la grille de tarif d'affranchissement suivante :

Lettre prioritaire	
Masse jusqu'à	Tarifs nets
20 g	0,80 €
100 g	1,60 €
250 g	3,20 €
500 g	4,80 €
3 kg	6,40 €

Le tarif d'affranchissement est-il proportionnel à la masse d'une lettre ?

On a :

$$\frac{100}{20} = 5 \neq \frac{1,60}{0,8} = 2$$

Le tarif d'affranchissement n'est donc pas proportionnel à la masse d'une lettre.

2. Afin de choisir le bon tarif d'affranchissement, il réunit les informations suivantes :

- Masse de son paquet de 50 enveloppes : 175 g.
- Dimensions d'une feuille A4 : 21 cm de largeur et 29,7 cm de longueur.
- Grammage d'une feuille A4 est de 80 g/m² (le grammage est la masse par m² de feuille).

Quel tarif d'affranchissement doit-il choisir ?

- Une enveloppe pèse : $175 \div 50 = 3,5$ g
- La surface d'une feuille A4 est :

$$21 \text{ cm} \times 29,7 \text{ cm} = 623,7 \text{ cm}^2 = 0,06237 \text{ m}^2$$

- Le Grammage d'une feuille A4 est de 80 g/m² donc la masse d'une feuille A4 est :

$$80 \times 0,06237 = 4,9896 \text{ g}$$

- La masse du courrier d'Alban, enveloppe plus les 4 feuilles est :

$$3,5 \text{ g} + 4,9896 \text{ g} \times 4 = 23,4584 \text{ g}$$

- Il devra donc payer 1,60 € pour affranchir ce courrier puisque sa masse est comprise entre 20 g (exclu) et 100 g.

↩ **Fin du devoir** ↪