Math93.com

DNB - Brevet des Collèges 2018 Métropole

28 juin 2018
Correction

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

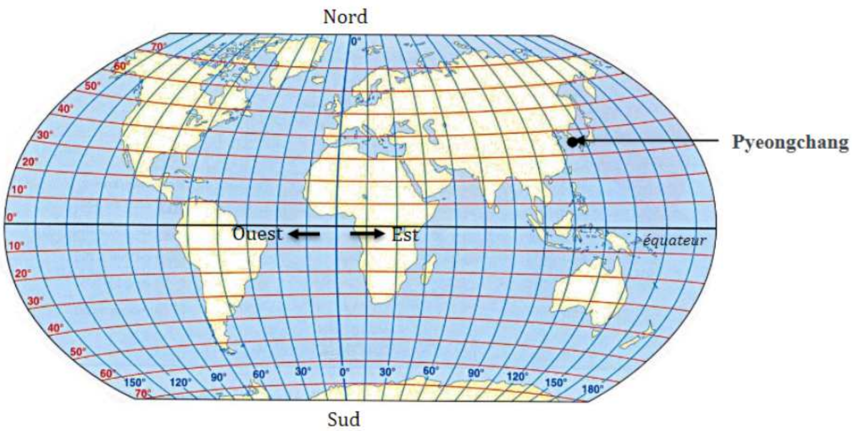
/

Remarque : *dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.*

Exercice 1. Volumes — 11 points

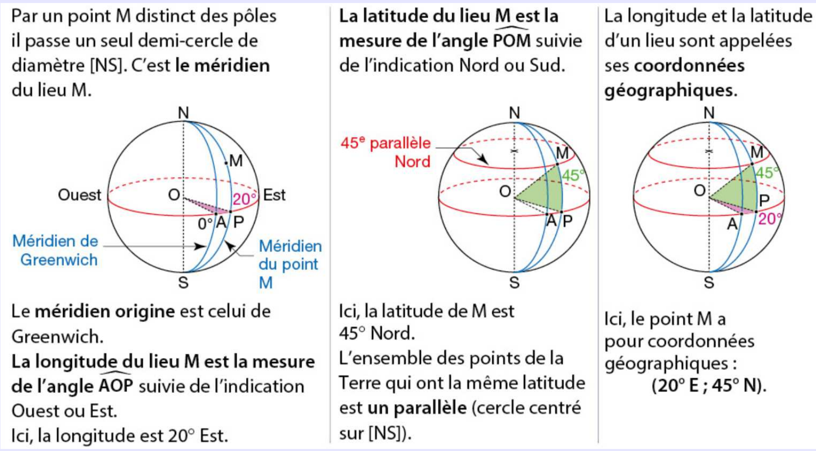
Le gros globe de cristal est un trophée attribué au vainqueur de la coupe du monde de ski. Ce trophée pèse 9 kg et mesure 46 cm de hauteur.

1. **Le biathlète français Martin Fourcade a remporté le sixième gros globe de cristal de sa carrière en 2017 à Pyeongchang en Corée du Sud. Donner approximativement la latitude et la longitude de ce lieu repéré sur la carte ci-dessous.**

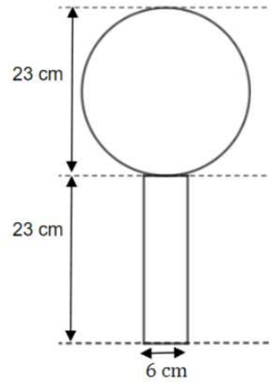


Les coordonnées sphériques de Pyeongchang sont : latitude : 35° Nord et longitude : 130 Est.

Coordonnées géographiques



2. On considère que ce globe est composé d'un cylindre en cristal de diamètre 6 cm, surmonté d'une boule de cristal. Voir schéma ci-contre. Montrer qu'une valeur approchée du volume de la boule de ce trophée est de 6 371 cm^3.



Le volume de la boule de diamètre 23 cm donc de rayon 11,5 cm est :

$$V = \frac{4}{3} \times 11,5^3 \times \pi = \underline{2\,027,83\pi} \approx 6\,370,626$$

Donc en arrondissant à l'unité :

$$V \approx \underline{6\,371 \text{ cm}^3}$$

3. Marie affirme que le volume de la boule de cristal représente environ 90% du volume total du trophée. A-t-elle raison ?

- Le volume du cylindre de base, de rayon 3 cm et de hauteur 23 cm est :

$$V' = \pi \times 3^2 \times 23 = 207\pi \text{ cm}^3$$

- Calcul du volume total.

$$V_T = V + V' = \underline{2234,83\pi \text{ cm}^3} \approx 7020,926$$

- Calcul du pourcentage.
  On cherche alors ce que représente V par rapport au volume total V_T soit :

$$\frac{V}{V_T} = \frac{2\,027,83\pi}{2234,83\pi} \approx 0,907376 \approx \underline{91\%}$$

  Le volume de la boule de cristal représente environ 90% du volume total du trophée.

Exercice 2. Statistiques 14 points

Parmi les nombreux polluants de l'air, les particules fines sont régulièrement surveillées. Les PM10 sont des particules fines dont le diamètre est inférieur à 0,01 mm. En janvier 2017, les villes de Lyon et Grenoble ont connu un épisode de pollution aux particules fines. Voici des données concernant la période du 16 au 25 janvier 2017 :

Données statistiques sur les concentrations journalières en PM10 du 16 au 25 janvier 2017 à Lyon.

Moyenne : 72,5 µg/m^3

Médiane : 83,5 µg/m^3

Concentration minimale: 22 µg/m^3

Concentration maximale: 107 µg/m^3

Source : http://www.air-rhonealpes.fr

Relevés des concentrations journalières en PM10 du 16 au 25 janvier 2017 à Grenoble.

Date	*Concentration PM10 en µg/m^3*
16 janvier	32
17 janvier	39
18 janvier	52
19 janvier	57
20 janvier	78
21 janvier	63
22 janvier	60
23 janvier	82
24 janvier	82
25 janvier	89

1. Laquelle de ces deux villes a eu la plus forte concentration moyenne en PM10 entre le 16 et le 25 janvier ?

- Lyon : la concentration moyenne de Lyon est $\underline{72,5\ \mu\text{g}/\ \text{m}^3}$.
- Grenoble : la concentration moyenne de Grenoble est :

$$m = \frac{32+39+\cdots+89}{10} = \frac{637}{10} = \underline{63,4\ \mu\text{g}/\ \text{m}^3} < 72,5\ \mu\text{g}/\ \text{m}^3$$

- Conclusion : Lyon a la plus forte concentration moyenne en PM10 entre le 16 et le 25 janvier .

2. Calculer l'étendue des séries des relevés en PM10 à Lyon et à Grenoble. Laquelle de ces deux villes a eu l'étendue la plus importante ? Interpréter ce dernier résultat.

- Lyon : l'étendue des concentrations de Lyon est la différence des valeurs extrêmes soit :

$$E_{Lyon} = 107 - 22 = \underline{85\ \mu\text{g}/\ \text{m}^3}$$

- Grenoble : l'étendue des concentrations de Grenoble est :

$$E_{Grenoble} = 89 - 32 = \underline{57\ \mu\text{g}/\ \text{m}^3 > 85\ \mu\text{g}/\ \text{m}^3}$$

- Conclusion : Lyon a la plus étendue de concentrations en PM10 entre le 16 et le 25 janvier . La pollution varie avec plus d'amplitude à Lyon.

3. L'affirmation suivante est-elle exacte ? Justifier votre réponse. « Du 16 au 25 janvier, le seuil d'alerte de 80 μg/ m^3 par jour a été dépassé au moins 5 fois à Lyon » .

Pour Lyon, la médiane est 83,5 μg/ m^3 donc au moins 5 valeurs sur 10 sont supérieures ou égale à la médiane, a fortiori elles sont supérieures à 80 μg/ m^3. L'affirmation est donc vraie.

Exercice 3. Probabilités 12 points

Dans son lecteur audio, Théo a téléchargé 375 morceaux de musique. Parmi eux, il y a 125 morceaux de rap. Il appuie sur la touche « lecture aléatoire » qui lui permet d'écouter un morceau choisi au hasard parmi tous les morceaux disponibles.

1. Quelle est la probabilité qu'il écoute du rap ?

Dans son lecteur audio, Théo a téléchargé 375 morceaux de musique. Parmi eux, il y a 125 morceaux de rap donc en supposant qu'il y a équiprobabilité, la probabilité qu'il écoute du rap est :

$$p_1 = \frac{125}{375} = \frac{1}{3} \approx \underline{0,33}$$

2. La probabilité qu'il écoute du rock est égale à $\frac{7}{15}$. Combien Théo a-t-il de morceaux de rock dans son lecteur audio ?

On peut estimer que $\frac{7}{15}$ des 375 morceaux de musique sont des morceaux de rock soit :

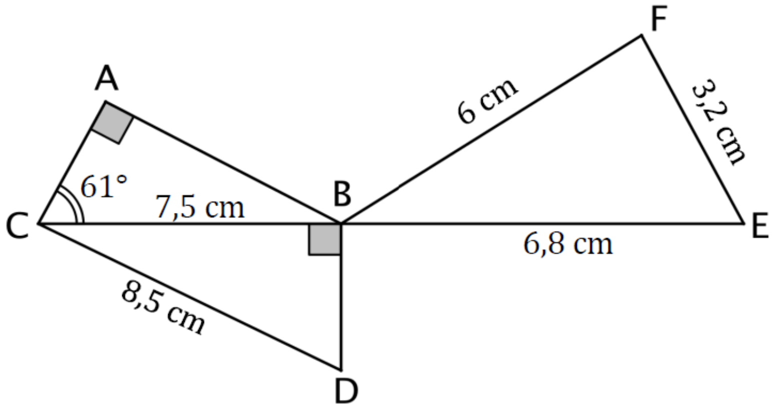
$$\frac{7}{15} \times 375 = \underline{175}$$

3. Alice possède 40% de morceaux de rock dans son lecteur audio. Si Théo et Alice appuient tous les deux sur la touche « lecture aléatoire » de leur lecteur audio, lequel a le plus de chances d'écouter un morceau de rock ?

- <u>Pour Théo</u>.
  La probabilité qu'il écoute un morceau de rock est $\frac{7}{15} \approx 0,466 \approx \underline{47\%}$.
- <u>Pour Alice</u>.
  La probabilité qu'elle écoute un morceau de rock est <u>40%</u>.
- <u>Conclusion</u> : Théo a plus de chances d'écouter un morceau de rock

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. Géométrie — 14 points



1. Montrer que la longueur BD est égale à 4 cm.

Dans le triangle BDC rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore on a :

$$\begin{aligned}
DC^2 &= BD^2 + BC^2\\
8{,}5^2 &= BD^2 + 7{,}5^2\\
BD^2 &= 8{,}5^2 - 7{,}5^2\\
BD^2 &= 72{,}25 - 56{,}25\\
BD^2 &= 16
\end{aligned}$$

Or BD est positif puisque c'est une longueur, l'unique solution possible est donc :

$$\begin{aligned}
BD &= \sqrt{16}\\
BD &= \underline{4\text{ cm}}
\end{aligned}$$

2. Montrer que les triangles CBD et BFE sont semblables.

On va faire le rapport des longueurs en les classant par ordre croissant.

$$\begin{cases}
\dfrac{BD}{FE} = \dfrac{4}{3,2} = 1,25\\[2ex]
\dfrac{BC}{FB} = \dfrac{7,5}{6} = 1,25\\[2ex]
\dfrac{CD}{BE} = \dfrac{8,5}{6,8} = 1,25
\end{cases}$$

Les trois rapports de longueurs des triangles sont égaux, donc les triangles CBD et BFE sont semblables. Le coefficient multiplicateur est $k = 1,25$ qui permet de passer de BEF à BCD.

3. Sophie affirme que l'angle $\widehat{BFE}$ est un angle droit. A-t-elle raison ?

Puisque les triangles BEF et BCD sont semblables, ils sont de même nature donc rectangle. L'hypoténuse étant le plus grand côté, c'est [BE] dans BEF et donc le triangle <u>BFE est nécessairement rectangle en F</u>.

4. Max affirme que l'angle $\widehat{ACD}$ est un angle droit. A-t-il raison ?

Dans le triangle BCD rectangle en B on a :

$$\cos\widehat{BCD} = \frac{BC}{CD} = \frac{7,5}{8,5} \Longrightarrow \widehat{BCD} = \arccos\frac{7,5}{8,5} \approx \underline{28,07°}$$

Donc

$$\widehat{ACD} = \widehat{ACB} + \widehat{BCD} = 61° + \widehat{BCD} \approx \underline{89,07}$$

De ce fait, l'angle $\widehat{ACD}$ n'est pas droit.

Exercice 5. Programme de calcul 16 points

- Choisir un nombre
- Multiplier ce nombre par 4
- Ajouter 8
- Multiplier le résultat par 2

1. Vérifier que si on choisit le nombre -1, ce programme donne 8 comme résultat final.

- Choisir un nombre	:	-1
- Multiplier ce nombre par 4	:	$(-1) \times 4 = -4$
- Ajouter 8	:	$-4 + 8 = 4$
- Multiplier le résultat par 2	:	$4 \times 2 = 8$
Résultat	:	8

2. Le programme donne 30 comme résultat final, quel est le nombre choisi au départ ?

On va effectuer le programme à l'envers :

- Résultat	:	30
- On divise par 2	:	$30 \div 2 = 15$
- Enlever 8	:	$15 - 8 = 7$
- Diviser par 4	:	$7 \div 4 = 1,75$
Nombre de départ	:	$1,75$

Dans la suite de l'exercice, on nomme x le nombre choisi au départ.

3. L'expression $A = 2(4x+8)$ donne le résultat du programme de calcul précédent pour un nombre x donné. On pose $B = (4+x)^2 - x^2$. Prouver que les expressions A et B sont égales pour toutes les valeurs de x.

- On peut retrouver le résultat du programme mais ce n'était pas demandé :

- Choisir un nombre	:	x
- Multiplier ce nombre par 4	:	$x \times 4 = 4x$
- Ajouter 8	:	$4x + 8$
- Multiplier le résultat par 2	:	$(4x+8) \times 2$
Résultat	:	$2(4x+8)$

- On peut développer les deux expression et montrer qu'elle sont égales.
  - D'une part :
  $$A = 2(4x+8) = \underline{8x+16}$$
  - D'autre part :
  $$B = (4+x)^2 - x^2 = 16 + 8x + x^2 - x^2 = \underline{8x+16}$$
  - Les deux expression sont donc identiques.

4. Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que les réponses doivent être justifiées.

Affirmation 1 (Fausse)

Ce programme donne un résultat positif pour toutes les valeurs de x.

Preuve.
Donc par exemple par $x = -3$, le résultat du programme est :

$$8x + 16 = 8 \times (-3) + 16 = \underline{-8 < 0}$$

L'affirmation est fausse.

Affirmation 2 (Vraie)

Si le nombre x choisi est un nombre entier, le résultat obtenu est un multiple de 8.

Preuve.
On a vu que le résultat s'exprime sous la forme $8x+16$ soit en factorisant, on obtient pour x entier :

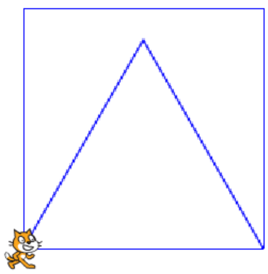
$$8x+16 = 8 \times \underbrace{(x+2)}_{k\in\mathbb{N}}$$

Le résultat obtenu est un multiple de 8 puisqu'il s'exprime sous la forme $8k$ avec k entier.

Exercice 6. Scratch — 16 points

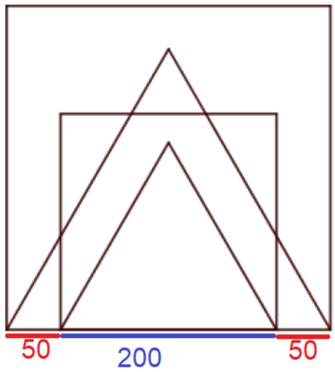
1. *On prend comme échelle 1 cm pour 50 pixels.*

1. a. Représenter sur votre copie la figure obtenue si le programme est exécuté jusqu'à la ligne 7 comprise.



1. b. Quelles sont les coordonnées du stylo après l'exécution de la ligne 8 ?
Après l'exécution de la ligne 7, le stylo est revenu en position initiale donc en (0 ; 0). Après l'exécution de la ligne 8, le stylo a avancé de $Longueur/6 = 300/6 = 50$ vers la droite donc ses coordonnées sont (50 ; 0).

2. On exécute le programme complet et on obtient la figure ci-dessous qui possède un axe de symétrie vertical. Recopier et compléter la ligne 9 du programme pour obtenir cette figure.



D'après la question précédente, le stylo est en (50 ; 0). Á partir de la on doit donc tracer un carré et un triangle plus petit que les précédents. On a avancé de 50, par symétrie donc la dimension du petit carré est égale à celle du grand moins deux fois 50 soit :

$$300 - 2 \times 50 = 200$$

Il suffit donc d'affecter la valeur 200 à la variable longueur.

Remarque

On peut généraliser dans le cas où la valeur de la variable Longueur n'est pas fixée. Dans ce cas on doit affecter à Longueur la valeur

$$Longueur - 2 \times \frac{Longueur}{6} = Longueur \times \frac{2}{3}$$

3.

3. a. Parmi les transformations suivantes, translation, homothétie, rotation, symétrie axiale, quelle est la transformation géométrique qui permet d'obtenir le petit carré à partir du grand carré ? Préciser le rapport de réduction.

Une homothétie de rapport $k = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$ permet d'obtenir le petit carré à partir du grand carré .

3. b. Quel est le rapport des aires entre les deux carrés dessinés ?

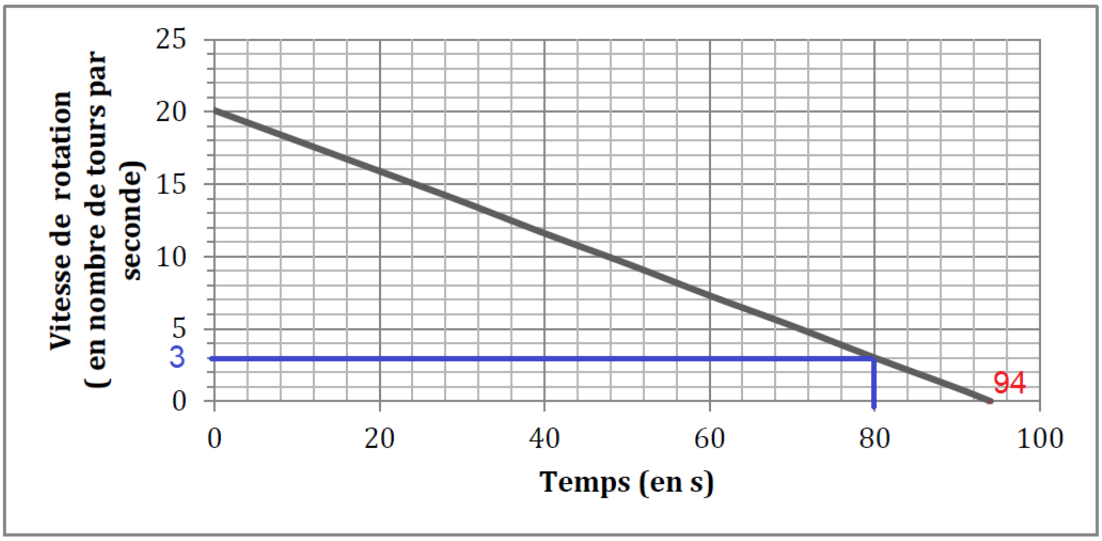
Agrandissement/réduction

Quand on multiplie les distances par un réel strictement positif k, les aires le sont par k^2 et les volumes par k^3.

Une homothétie de rapport $k = \frac{2}{3}$ permet d'obtenir le petit carré à partir du grand carré donc les distances sont multipliées par k et les aires par $k^2 = \frac{4}{9}$.

Exercice 7. Fonctions — 17 points

Le hand-spinner est une sorte de toupie plate qui tourne sur elle-même. On donne au hand-spinner une vitesse de rotation initiale au temps t = 0, puis, au cours du temps, sa vitesse de rotation diminue jusqu'à l'arrêt complet du hand-spinner. Sa vitesse de rotation est alors égale à 0. Grâce à un appareil de mesure, on a relevé la vitesse de rotation exprimée en nombre de tours par seconde. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté cette vitesse en fonction du temps exprimé en seconde.



1. Le temps et la vitesse de rotation du hand-spinner sont-ils proportionnels ? Justifier.

La courbe représentative de la vitesse en fonction du temps est une droite mais elle ne passe pas par l'origine du repère. Donc le temps et la vitesse de rotation du hand-spinner ne sont pas proportionnels .

2. *Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes :*

2. a. Quelle est la vitesse de rotation initiale du hand-spinner ?

La vitesse de rotation initiale du hand-spinner est de <u>20 tours/seconde</u>.

2. b. Quelle est la vitesse de rotation du hand-spinner au bout d'1 minute et 20 secondes ?

Au bout d'1 minute et 20 secondes soit après 80 secondes, la vitesse de rotation du hand-spinner est d'environ <u>3 tours/seconde</u>.

2. c. Au bout de combien de temps, le hand-spinner va-t-il s'arrêter ?

La droite coupe l'axe des abscisses pour $t \approx 94 s$. Le hand-spinner va s'arrêter au bout de <u>94 secondes</u> environ.

3. *Pour calculer la vitesse de rotation du hand-spinner en fonction du temps t, notée $V(t)$, on utilise la fonction suivante :*

$$V(t) = -0,214 \times t + V_{initiale}$$

3. a. On lance le hand-spinner à une vitesse initiale de 20 tours par seconde. Sa vitesse de rotation est donc donnée par la formule : $V(t) = -0,214 \times t + 20$. Calculer sa vitesse de rotation au bout de 30 s.

Sa vitesse de rotation au bout de 30 s est :

$$V(30) = -0,214 \times 30 + 20 = \underline{13,58 \text{ tours/secondes}}$$

3. b. Au bout de combien de temps le hand-spinner va-t-il s'arrêter ? Justifier par un calcul.

Le hand-spinner va s'arrêter quand sa vitesse de rotation sera nulle soit pour t vérifiant :

$$\begin{aligned} V(t) = 0 &\iff -0,214 \times t + 20 = 0 \\ &\iff -0,214 \times t = -20 \\ &\iff t = \frac{-20}{-0,214} \approx \underline{93,46 \text{ s}} \end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat approchée lu lors de la question (2.c.)

3. c. Est-il vrai que, d'une manière générale, si l'on fait tourner le hand-spinner deux fois plus vite au départ, il tournera deux fois plus longtemps ? Justifier.

On va comparer les valeurs qui annulent

$$\begin{cases} V_1(t) = -0,214 \times t + V_{initiale} \\ V_2(t) = -0,214 \times t + 2 \times V_{initiale} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V_1(t) = 0 &\iff -0,214 \times t_1 + V_{initiale} = 0 \\ &\iff -0,214 \times t_1 = -V_{initiale} \\ V_1(t) = 0 &\iff \boxed{t_1 = \frac{V_{initiale}}{0,214}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2(t) = 0 &\iff -0,214 \times t_2 + 2 \times V_{initiale} = 0 \\ &\iff -0,214 \times t_2 = -2 \times V_{initiale} \\ V_2(t) = 0 &\iff \boxed{t_2 = 2 \times \frac{V_{initiale}}{0,214} = \underline{2 \times t_1}} \end{aligned}$$

On obtient alors un temps d'arrêt pour V_2 égal au double du temps d'arrêt pour V_1.
D'une manière générale, si l'on fait tourner le hand-spinner deux fois plus vite au départ, il tournera deux fois plus longtemps .

Fin du devoir

©ISSN 2272-5318