Math93.com

DNB - Brevet des Collèges 2019 Métropole

1er Juillet 2019
Correction

Pour être prévenu dès la sortie des sujets et corrigés :

Like Math93 on Facebook / Follow Math93 on Twitter

/

Remarque

Dans la correction détaillée ici proposée, les questions des exercices sont presque intégralement réécrites pour faciliter la lecture et la compréhension du lecteur. Il est cependant exclu de faire cela lors de l'examen, le temps est précieux ! Il est par contre nécessaire de numéroter avec soin vos questions et de souligner ou encadrer vos résultats. Pour plus de précisions et d'astuces, consultez la page dédiée de math93.com : présenter une copie, trucs et astuces.

Exercice 1. Arithmétique — 10 points

Le capitaine d'un navire possède un trésor constitué de 69 diamants, 1 150 perles et 4 140 pièces d'or.

1. **Décomposer 69 ; 1 150 et 4 140 en produits de facteurs premiers.**

   On obtient :

   $$\boxed{69 = 3 \times 23} \text{ et } \boxed{1\,150 = 2 \times 5^2 \times 23} \text{ et } \boxed{4\,140 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 23}$$

2. **Le capitaine partage équitablement le trésor entre les marins. Combien y a t il de marins sachant que toutes les pièces, perles et diamants ont été distribués ?**

   Toutes les pièces, perles et diamants ont été distribués donc le nombre de marins est un diviseur commun de 69 ; 1 150 et 4 140. La décomposition de la question précédente nous donne montre que seuls 23 et 1 divisent à la fois 69 ; 1 150 et 4 140. On sait qu'il y a plus de 1 marin, donc l'unique solution possible est 23.

   On peut en conclure qu'il y a <u>23 marins</u>.

Exercice 2. Géométrie — 19 points

Dans cet exercice, on donnera, si nécessaire, une valeur approchée des résultats au centième près. Pour construire le décor d'une pièce de théâtre (Figure 1), Joanna dispose d'une plaque rectangulaire ABCD de 4 m sur 2 m dans laquelle elle doit découper les trois triangles du décor avant de les superposer. Elle propose un découpage de la plaque (Figure 2). Le triangle ADM respecte les conditions suivantes : Le triangle ADM est rectangle en A ; AD=2 m et $\widehat{ADM} = 60°$.

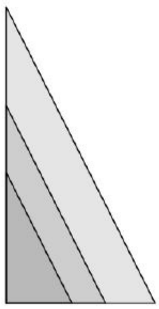


Figure 1

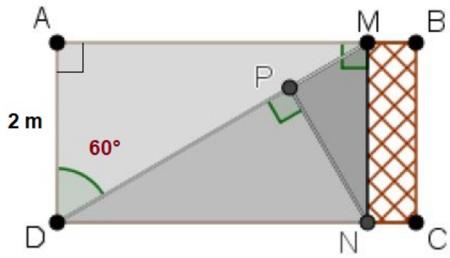


Figure 2

1. **Montrer que [AM] mesure environ 3,46 m.**

   Le triangle ADM est rectangle en A donc :

$$\tan \widehat{ADM} = \frac{AM}{AD} \iff \tan 60° = \frac{AM}{2}$$

   Donc

$$\boxed{AM = 2\tan 60° \approx 3,46 \text{ m}}$$

2. **La partie de la plaque non utilisée est représentée en quadrillé sur la figure 2. Calculer une valeur approchée au centième de la proportion de la plaque qui n'est pas utilisée.**

   La proportion de la plaque qui n'est pas utilisée est le rapport de l'aire du rectangle MBCN par celle du rectangle ABCD. Or on sait que ABCD est un rectangle de 4 m sur 2 m donc d'aire 8 m^2.

   Par ailleurs, l'aire de MBNC s'obtient en faisant la différence entre l'aire de ABCD et celle de AMND soit

$$p = \frac{Aire(MBCN)}{Aire(ABCD)} = \frac{8 - AD \times AM}{8} = \frac{8 - 4\tan 60}{8} \approx \underline{0,13}$$

3. **Pour que la superposition des triangles soit harmonieuse, Joanna veut que les trois triangles AMD, PNM et PDN soient semblables. Démontrer que c'est bien le cas.**

   - AMD triangle rectangle en A d'angles complémentaires 60° et 30°.
   - MPD triangle rectangle en P avec $\widehat{PMN}$ et $\widehat{AMD} = 30°$ complémentaires donc AMD et MPD sont semblables.
   - PDN triangle rectangle en P avec $\widehat{PDN}$ et $\widehat{ADM} = 60°$ complémentaires donc AMD et MPD sont semblables.

4. **Joanna aimerait que le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle PDN au triangle AMD soit plus petit que 1,5. Est ce le cas ? Justifier.**

   Le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle PDN au triangle AMD est :

$$k = \frac{DM}{DN} = \frac{DM}{AM}$$

   Or ADM rectangle en A donc

$$\cos \widehat{ADM} = \frac{AD}{DM} \iff \cos 60° = \frac{2}{DM} \implies DM = \frac{2}{\cos 60}$$

Donc
$$k = \frac{DM}{AM} = \frac{\frac{2}{\cos 60}}{2\tan 60} \approx \underline{1,15}$$
Le coefficient d'agrandissement pour passer du triangle PDN au triangle AMD est plus petit que 1,5.

Exercice 3. 17 points

1.

1. a. Le diamètre de C_2 est $1,5$ cm. Son rayon est donc $\frac{1,5}{2} = 0,75$ cm.
L'aire B de sa base est $\pi \times r^2 = \pi \times 0,75^2$.
Son volume est $V = B \times h = \pi \times 0,752 \times 4,2$.
Le volume de sable est $\frac{2}{3} \times \pi \times 0,75^2 \times 4,2$, soit environ $4,95$ cm^3.
L'aire d'un disque de rayon r est $\pi \times r^2$.

1. b. On a : volume = vitesse d'écoulement $\times$ temps.
Donc le temps d'écoulement est
$$\frac{\text{volume}}{\text{vitesse d'écoulement}} = \frac{4,95}{1,98} = 2,5$$
Le temps d'écoulement est $2,5$ minutes, soit <u>2 minutes 30 secondes</u>.

2.

2. a. On a : $1+1+2+6+3+7+6+3+1+2+3+2+3 = 40$.
On a effectué 40 tests.

2. b. • La plus grande valeur est 2 min 38 s et le plus petite est 2 min 22 s.
La différence (étendue de la série) est de 16 secondes, inférieure à 20 s.
• La médiane est la moyenne entre la 20e valeur de la série ordonnée et la 21e valeur.
Or, on a $1+1+2+6+3+7 = 20$, donc la 20e valeur est 2 min 29 s et la 21e est 2 min 30.
La médiane est bien comprise entre 2 min 29 s et 2 min 31 s.
• Comme tous les temps commencent par 2 min, il suffit de faire la moyenne des secondes en faisant :
$$\frac{1\times 22 + 1\times 24 + \ldots + 2\times 35 + 3\times 38}{40} = \frac{1\,204}{40} = 30,1$$
– Le temps moyen d'écoulement est 2 min 30,1 s.
– La moyenne est entre 2 min 28 s et 2 min 32 s.
– Le sablier testé ne sera pas rejeté.

Exercice 4. 19 points

1. Le script carré trace un carré en traçant 4 fois deux demi-côtés de 5 pixels, donc chaque côté du carré correspond à 10 pixels, donc à 5 cm.

2. Le script 1 dessine 23 fois un carré suivi d'un tiret, donc le dessin B.
Le script 2 dessine 46 fois de manière aléatoire un carré ou un tiret, donc le dessin A.

3. **3. a.** En exécutant le script 2, le premier élément tracé est un carré si le nombre aléatoire prend l'un des deux valeurs possible. La probabilité est $0,5$.

   3. b. Pour les deux premiers éléments dessinés, il y a 4 possibilités équiprobables :

   carré - carré ; carré - tiret ; tiret - carré ; tiret - tiret.

   La probabilité que les deux premiers éléments dessinés soient des carrés est $\frac{1}{4}$, soit $0,25$.

4. Au niveau de la ligne 7 du script 2, on peut insérer :
si nombre aléatoire entre 1 et 2 = 1 alors mettre la couleur du stylo à rouge sinon
mettre la couleur du stylo à noir.

Exercice 5. 18 points

1.

1. a. Le rectangle ③ est l'image du rectangle ④ par la translation qui transforme C en E.

1. b. Le rectangle ③ est l'image du rectangle ① par la rotation de centre F et d'angle 90° dans le sens des aiguilles d'une montre.

1. c. Le rectangle ABCD est l'image du rectangle ② par l'homothétie de centre D et de rapport 3,
ou bien, le rectangle ABCD est l'image du rectangle ③ par l'homothétie de centre B et de rapport 3,
ou bien, le rectangle ABCD est l'image du rectangle ④ par l'homothétie de centre C et de rapport 3.

2. Un petit rectangle est donc une réduction du grand rectangle de rapport $\dfrac{1}{3}$.

Son aire est : aire du grand $\times \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = 1,215 \times \dfrac{1}{9} = 0,135 \text{ m}^2$.

Dans une réduction de rapport k, les aires sont multipliées par k^2.

3. Soit ℓ la largeur et L la longueur du rectangle ABCD.
Le ratio longueur : largeur étant égal à 3 : 2, on a $2L = 3\ell$, soit $L = 1,5\ell$.
On veut $\ell \times L = 1,215$, soit successivement :

$$\ell \times 1,5\ell = 1,215 \iff 1,5\ell^2 = 1,215 \iff \ell^2 = \frac{1,215}{1,5} = 0,81$$

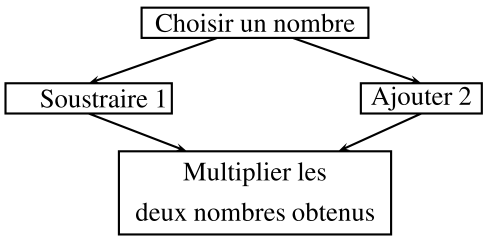
d'où puisque ℓ est positif, $\underline{\ell = 0,9}$.
On a alors $L = 1,5 \times 0,9 = 1,35$. Le rectangle ABCD mesure 0,9 m sur 1,35 m.

Exercice 6. Programme de calcul 17 points

Programme 1

Choisir un nombre
Le multiplier par 3
Ajouter 1

Programme 2



1. On part de 5 dans les deux programmes.

- Avec le programme 1, on a :

Choix du nombre	5
Le multiplier par 3	$3 \times 5 = 15$
Ajouter 1	$15 + 1 = 16$

$$5 \to 3 \times 5 = 15 \to 15 + 1 = \underline{16}$$

Le résultat du programme 1 vaut 16.

- Avec le programme 2, on a :

Choix du nombre	5
Soustraire 1	$5 - 1 = 4$
Ajouter 2 au nombre de départ	$5 + 2 = 7$
Multiplier les 2 nombres	$4 \times 4 = 28$

Le résultat du programme 2 vaut 28.

2.

2. a. Pour le programme 1, on a :

$$x \to 3x \to 3x+1$$

Donc on a $\boxed{A(x) = 3x+1}$.

2. b. On cherche x pour que $A(x) = 0$, ce qui donne successivement :

$$\begin{aligned} A(x) = 0 &\iff 3x+1 = 0 \\ &\iff 3x = 0-1 \\ &\iff 3x = -1 \\ &\iff x = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

On doit choisir $-\dfrac{1}{3}$ au départ pour obtenir 0 comme résultat du programme 1.

3. Développement

$$\begin{aligned} B(x) &= (x-1)(x+2) \\ &= x^2 + 2x - x - 2 \\ &= \underline{x^2 + x - 2} \end{aligned}$$

4.

4. a. On a :

$$\begin{aligned} B(x) - A(x) &= x^2 + x - 2 - (3x+1) \\ &= x^2 + x - 2 - 3x - 1 \\ &= \underline{x^2 - 2x - 3} \end{aligned}$$

et

$$(x+1)(x-3) = x^2 - 3x + x - 3 = \underline{x^2 - 2x - 3}$$

On a bien

$$\boxed{B(x) - A(x) = (x+1)(x-3)}$$

4. b. On cherche x pour que : $B(x) = A(x)$, soit $B(x) - A(x) = 0$

$$\begin{aligned} B(x) - A(x) = 0 &\iff (x+1)(x-3) = 0 \ \text{ c'est une équation produit nul (EPN)} \\ &\iff (x+1) = 0 \quad \text{ou} \quad x-3 = 0 \\ &\iff \underline{x = -1 \quad \text{ou} \quad x = 3} \end{aligned}$$

Il faut choisir -1 ou 3 au départ pour que le programme 1 et le programme 2 donnent le même résultat.

Fin du devoir