Math93.com

DNB - Brevet des Collèges
2021 Centres Étrangers
Juin 2021
Correction

Le sujet comporte 13 pages numérotées de 1/13 à 13/13 . Le sujet est composé de 5 exercices indépendants.

Le candidat peut les traiter dans l'ordre qui lui convient.

BARÈME (sur 100 points)			
Exercice 1	:	24	points
Exercice 2	:	21	points
Exercice 3	:	16	points
Exercice 4	:	19	points
Exercice 5	:	20	points

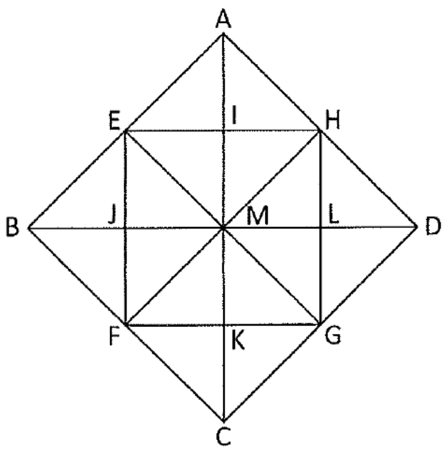
Exercice 1. 24 points

1. Décomposer 360 en facteurs premiers.

Corrigé

$$360 = 36 \times 10$$
$$360 = 6^2 \times 2 \times 5$$
$$360 = 2^2 \times 3^2 \times 2 \times 5$$
$$360 = \underline{2^3 \times 3^2 \times 5}$$

2. A partir du triangle BEJ, rectangle isocèle en J, on a obtenu par pavage la figure ci-contre.



2. a. Quelle est l'image du triangle BEJ par la symétrie d'axe (BD) ?

Corrigé

L'image du triangle BEJ par la symétrie d'axe (BD) est BJF.

2. b. Quelle est l'image du triangle AMH par la translation qui transforme le point E en B ?

Corrigé

L'image du triangle AMH par la translation qui transforme le point E en B est EMF.

2. c. Par quelle transformation passe-t-on du triangle AIH au triangle AMD ?

Corrigé

On passe du triangle AIH au triangle AMD par une homothétie de centre A et de rapport 2.

3. Calculer en détaillant : $\dfrac{7}{2} + \dfrac{15}{6} \times \dfrac{7}{25}$.

Corrigé

$$\begin{aligned}
\frac{7}{2} + \frac{15}{6} \times \frac{7}{25} = \frac{7}{2} + \frac{3 \times 5 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 5} &= \frac{7}{2} + \frac{7}{2 \times 5} \\
&= \frac{7 \times 5}{2 \times 5} + \frac{7}{2 \times 5} \\
&= \frac{35 + 7}{10} = \frac{42}{10} = \boxed{\frac{21}{5} = 4,2}
\end{aligned}$$

4. Pour cette question, on indiquera sur la copie l'unique bonne réponse.
Sachant que le diamètre de la Lune est d'environ 3 474 km, la valeur qui approche le mieux son volume est :

Corrigé

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \times (3474/2)^3 \approx 21\ 952\ 706\ 175,03\ \text{km}^3$$

Soit la réponse D :

$$\boxed{V \approx 2,2 \times 10^{10}\ \text{km}^3}$$

5. On considère un triangle RST rectangle en S. Compléter le tableau donné en ANNEXE à rendre avec la copie. On arrondira la valeur des angles à l'unité

Longueurs	**Angles**	**Périmètre du triangle RST**	**Aire du triangle RST**
RS = 10 mm	$\widehat{RST} = 90°$		
ST = 24 mm	$\widehat{STR} \approx$	$\mathcal{P} =$	$\mathcal{A} =$
RT = 26 mm	$\widehat{SRT} \approx$		

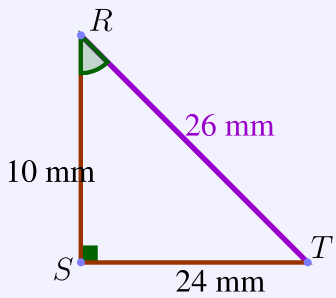
Corrigé

Dans RST rectangle en S on a :

$$\cos \widehat{STR} = \frac{ST}{RT} = \frac{24}{26}$$

soit

$$\boxed{\widehat{STR} = \arccos\left(\frac{24}{26}\right) \approx 23°}$$



et puisque les angles $\widehat{STR}$ et $\widehat{STR}$ sont complémentaires dans le triangle SRT rectangle en S :

$$\boxed{\widehat{SRT} = 90° - \widehat{STR} \approx 67°}$$

On a aussi facilement :

$$\boxed{P = 10 + 24 + 26 = 60\ \text{mm}} \text{ et } \boxed{A = \frac{RS \times ST}{2} = 10 \times 24/2 = 120\ \text{mm}^2}$$

Exercice 2. 21 points

Partie 1

Dans cette première partie, on lance un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6, puis on note le numéro de la face du dessus.

1. Donner sans justification les issues possibles.

Corrigé

L'univers associé à cette expérience aléatoire est composé de six issues :

$$\boxed{\Omega = \{1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\}}$$

2. Quelle est la probabilité de l'évènement A : « On obtient 2 » ?

Corrigé

Une seule issue sur 6 réalise l'évènement A, donc en supposant qu'il y a équiprobabilité on a :

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{6}}$$

3. Quelle est la probabilité de l'évènement B : « On obtient un nombre impair » ?

Corrigé

Trois issues sur 6 réalisent l'évènement B, ce sont $1, 3$ et 5 donc on a :

$$\boxed{P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}}$$

Partie 2

Dans cette deuxième partie, on lance simultanément deux dés bien équilibrés à six faces, un rouge et un vert. On appelle « score » la somme des numéros obtenus sur chaque dé.

1. Quelle est la probabilité de l'évènement C : « le score est 13 » ? Comment appelle-t-on un tel événement ?

Corrigé

Le score 13 ne peut pas être obtenu puisque le score maximal possible avec deux dés numérotés de 1 à 6 est 12 (deux fois 6). Cet évènement est dit impossible et sa probabilité est nulle.

2. Dans le tableau à double entrée donné en ANNEXE, on remplit chaque case avec la somme des numéros obtenus sur chaque dé.

2. a. Compléter, sans justifier, le tableau donné en ANNEXE à rendre avec la copie.

Corrigé

Rouge Vert	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

2. b. Donner la liste des scores possibles.

Corrigé

Les 11 scores possibles sont : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12.

3.

3. a. Déterminer la probabilité de l'évènement D : « le score est 10 ».

Corrigé

Trois issues sur 36 réalisent l'évènement D, ce sont les issues $(4\ ;\ 6)$; $(5\ ;\ 5)$ et $(6\ ;\ 4)$ donc on a :

$$\boxed{P(D) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}}$$

3. b. Déterminer la probabilité de l'évènement E : « le score est un multiple de 4 ».

Corrigé

Parmi les 11 scores possibles, les multiples de 4 sont : 4, 8 et 12.

- Les 3 issues qui correspondent au score de 4 sont : (1,3) ; (2,2) et (3,1).
- Les 5 issues qui correspondent au score de 8 sont : (2,6) ; (3,5) ; (4,4) ; (5,3) et (6,2).
- L'issue qui correspond au score de 12 est : (6,6).

Donc l'évènement E est réalisé par 9 issues sur 36 on a :

$$\boxed{P(E) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}}$$

3. c. Démontrer que le score obtenu a autant de chance d'être un nombre premier qu'un nombre strictement plus grand que 7.

Corrigé

Parmi les 11 scores possibles, les nombres premiers sont : 2, 3, 5, 7 et 11.

- 1 issue correspond au score 2 : (1,1)
- 2 issues qui correspondent au score de 3 : (1,2) et (2,1).
- 4 issues qui correspondent au score de 5 : (1,4) ; (2,3) ; (3,2) ; (4,1).
- 6 issues qui correspondent au score de 7 : (1,6) ; (2,5) ; (3,4) ; (4,3) ; (5,2) , (6,1).
- 2 issues qui correspondent au score de 11 : (5,6) ; (6,5).

Donc au total 15 issues sur 36 correspondent à l'évènement "le score est un nombre premier".
Parmi les 11 scores possibles, les nombres strictement plus grand que 7 sont : 8, 9, 10, 11 et 12.

- 5 issues correspondent au score 8 : (2,6) ;(3,5) ;(4,4) ;(5,3) et (6,2)
- 4 issues qui correspondent au score de 9 : (3,6) ; (4,5) ; (5,4) et (6,3).
- 3 issues qui correspondent au score de 10 : (4,6) ; (5,5) ; (6,4).
- 2 issues qui correspondent au score de 11 : (5,6) ; (6,5).
- 1 issue correspond au score 12 : (6,6).

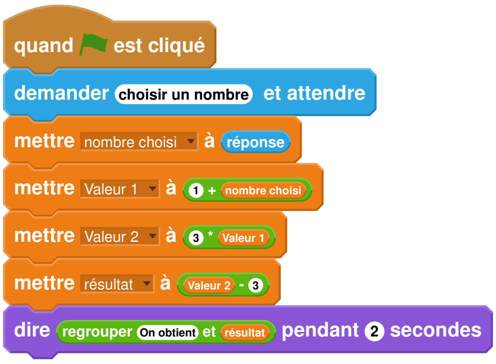
Donc au total 15 issues sur 36 correspondent à l'évènement "le score est un nombre strictement plus grand que 7".

Bilan : le score obtenu a autant de chance d'être un nombre premier qu'un nombre strictement plus grand que 7.

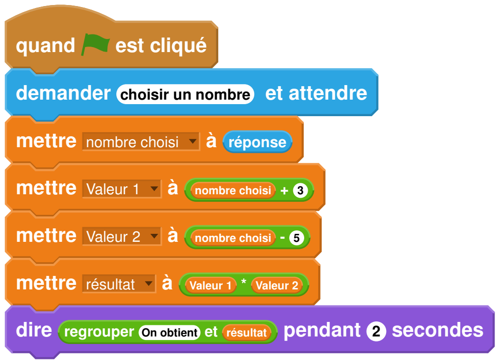
Exercice 3. 16 points

Un professeur propose à ses élèves trois programmes de calculs, dont deux sont réalisés avec un logiciel de programmation.

Programme A



Programme B



Programme C

- Choisir un nombre
- Multiplier par 7
- Ajouter 3
- Soustraire le nombre de départ

1.

1. a. Montrer que si on choisit 1 comme nombre de départ alors le programme A affiche pendant 2 secondes « On obtient 3 ».

Corrigé

On obtient successivement :

Nombre choisi	1
Valeur 1	$1+1=2$
Valeur 2 = 3× Valeur 1	$3\times 2=6$
Résultat = Valeur 2 - 3	$6-3=3$
Dire	3

1. b. Montrer que si on choisit 2 comme nombre de départ alors le programme B affiche pendant 2 secondes « On obtient -15 ».

Corrigé

On obtient successivement :

Nombre choisi	2
Valeur 1	$2+3=5$
Valeur 2	$2-5=-3$
Résultat = Valeur 1 $\times$ Valeur 2	$5\times(-3)=-15$
Dire	-15

2. Soit x le nombre de départ, quelle expression littérale obtient-on à la fin de l'exécution du programme C ?

Corrigé

Nombre choisi	x
Multiplier par 7	$7x$
Ajouter 3	$7x+3$
Soustraire le nombre de départ	$7x+3-x=6x+3$
Résultat	$6x+3$

3. Un élève affirme qu'avec un des trois programmes on obtient toujours le triple du nombre choisi. A-t-il raison ?

Corrigé

- On vient de voir que le programme C donne $6x+3$, une expression qui ne vaut pas $3x$ pour toutes les valeurs de x ;
- Le programme A donne à partir de x :

$$x \to 1+x \to 3(1+x)=3+3x \to 3+3x-3=3x$$

  On obtient bien le triple du nombre de départ x.
- Le programme B donne à partir de x :

$$x \to x+3 \to x-5 \to (x+3)(x-5)=x^2-5x+3x-15=x^2-2x-15$$

  Une expression qui ne vaut pas $3x$ pour toutes les valeurs de x ;
- Conclusion : l'élève a donc raison car avec le programme A on obtient bien le triple du nombre choisi.

4. 4. a. Résoudre l'équation $(x+3)(x-5)=0$.

Corrigé

Un produit de deux facteurs est nul si l'un des facteurs est nul, donc :

$$\begin{aligned}(x+3)(x-5)=0 &\iff \left(x+3=0\right) \text{ ou } \left(x-5=0\right)\\ &\iff \left(x=-3\right) \text{ ou } \left(x=5\right)\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est $S=\{-3\ ;\ 5\}$.

4. b. Pour quelles valeurs de départ le programme B affiche-t-il « On obtient 0 » ?

Corrigé

On a vu que le programme B donne à partir de x le produit $(x+3)(x-5)$ et dans la question précédente on a montré que seuls -3 et 5 annulaient ce produit.

Donc le programme B donne à partir de -3 et à partir de 5 le nombre 0.

5. Pour quelle(s) valeur(s) de départ le programme C affiche-t-il le même résultat que le programme A ?

Corrigé

Il faut trouver x tel que $6x+3=3x$ soit :

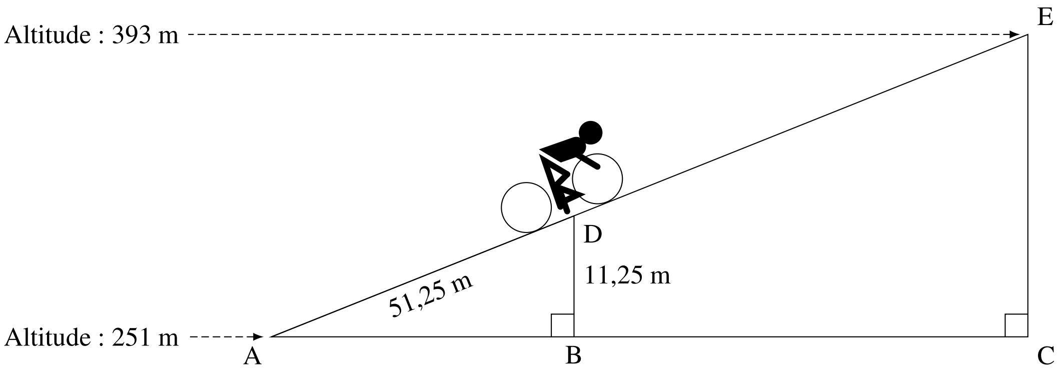
$$\begin{aligned} 6x+3=3x &\iff 3x=-3 \\ &\iff x=-1 \end{aligned}$$

Le nombre -1 donne par A ou C le même résultat -3.

©ISSN 2272-5318

Exercice 4. 19 points

Aurélie fait du vélo en Angleterre au col de Hardknott. Elle est partie d'une altitude de 251 mètres et arrivera au sommet à une altitude de 393 mètres. Sur le schéma ci-dessous, qui n'est pas en vraie grandeur, le point de départ est représenté par le point A et le sommet par le point E. Aurélie est actuellement au point D.



Les droites (AB) et (DB) sont perpendiculaires. Les droites (AC) et (CE) sont perpendiculaires. Les points A, D et E sont alignés. Les points A, B et C sont alignés. AD = 51,25 m et DB = 11,25 m.

1. Justifier que le dénivelé qu'Aurélie aura effectué, c'est-à-dire la hauteur EC, est égal à 142 m.

Corrigé

On a $\text{CE} = 393 - 251 = 142$ (m).

2. **2. a.** Prouver que les droites (DB) et (EC) sont parallèles.

Corrigé

Les droites (DB) et (EC) étant toutes les deux perpendiculaires à la droite (AC) sont parallèles.

2. b. Montrer que la distance qu'Aurélie doit encore parcourir, c'est-à-dire la longueur DE, est d'environ 596 m.

Corrigé

- Les points A, D, E sont alignés et A, B et C sont alignés.
- Les droites (DB) et (EC) sont parallèles : on est donc une situation où l'on peut appliquer le théorème de Thalès, soit :

$$\frac{\text{BD}}{\text{EC}} = \frac{\text{AD}}{\text{AE}} \iff \frac{11,25}{142} = \frac{51,25}{\text{AE}}$$

On en déduit

$$\text{AE} = \frac{142 \times 51,25}{11,25} \approx 646,8$$

Donc puisque le point D appartient au segment [AE]

$$\boxed{DE = \text{AE} - \text{AD} \approx 646,8 - 51,25 \approx 596 \text{ m}}$$

3. On utilisera pour la longueur DE la valeur 596 m.

Sachant qu'Aurélie roule à une vitesse moyenne de 8 km/h, si elle part à 9 h 55 du point D, à quelle heure arrivera-t-elle au point E ? Arrondir à la minute.

Corrigé

Aurélie parcourt donc 8 000 m en 60 minutes, on cherche le temps pour parcourir 596 m.

d	8 000 m	596 m
t	60 m (1h)	?

Elle mettra donc pour parcourir 596 (m) un temps t tel que :

$$t = \frac{3 \times 596}{400} = 4,47\,\text{min}$$

Donc $t \approx 4$ min : elle arrivera donc à <u>9 h 59 min à la minute près</u>.

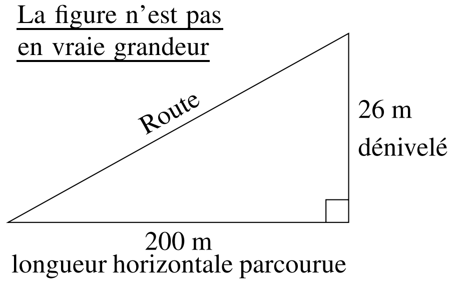
4. La pente d'une route est obtenue par le calcul suivant :

$$\text{pente} = \frac{\text{dénivelé}}{\text{longueur horizontale parcourue}}$$

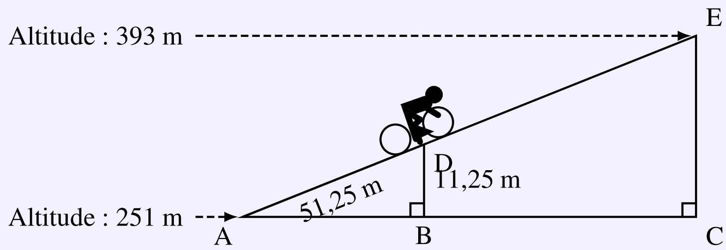
La pente s'exprime en pourcentage.
Démontrer que la pente de la route parcourue par Aurélie est de 22,5 %.

Exemple d'une pente à 13 %

<u>La figure n'est pas en vraie grandeur</u>



Corrigé



On a par définition dans le triangle rectangle ABD :

$$\sin \widehat{\text{CAE}} = \frac{\text{BD}}{\text{AD}} = \frac{11,25}{51,25}$$

La calculatrice donne

$$\widehat{\text{CAE}} \approx 12,68°$$

Dans le triangle ABC on a

$$\tan \widehat{\text{CAE}} = \frac{\text{CE}}{\text{AC}}$$

d'où

$$AC = \frac{\text{CE}}{\tan \widehat{\text{CAE}}} \approx \frac{142}{0,225} \approx 631,1\text{ m}$$

Finalement la pente est

$$p = \frac{EC}{AC} \approx \frac{142}{631,1} \approx 0,225 \Longrightarrow \boxed{p \approx \frac{22,5}{100} = 22,5\,\%}$$

Exercice 5. 20 points

Une station de ski propose à ses clients trois formules pour la saison d'hiver :

- Formule A : on paie 36,50 € par journée de ski.
- Formule B : on paie 90 € pour un abonnement « SkiPlus » pour la saison, puis 18,50 € par journée de ski.
- Formule C : on paie 448,50 € pour un abonnement « SkiTotal » qui permet ensuite un accès gratuit à la station pendant toute la saison.

1. Marin se demande quelle formule choisir cet hiver. Il réalise un tableau pour calculer le montant à payer pour chacune des formules en fonction du nombre de journées de ski. Compléter, sans justifier, le tableau fourni en ANNEXE à rendre avec la copie.

Corrigé

Nombre de journées de ski	2	6	10
Formule A	73 €	219 €	365 €
Formule B	127 €	201 €	275 €
Formule C	448,50 €	448,50 €	448,50 €

2. Dans cette question, x désigne le nombre de journées de ski.
On considère les trois fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = 90 + 18,5x \qquad g(x) = 448,5 \qquad h(x) = 36,5x$$

2. a. Laquelle de ces trois fonctions représente une situation de proportionnalité ?

Corrigé

Seule la fonction h représente une situation de proportionnalité.
En effet h est une fonction linéaire car de la forme $h(x) = ax$ avec $a = 36,5$.

2. b. Associer, sans justifier, chacune de ces fonctions à la formule A, B ou C correspondante.

Corrigé

Formule A : fonction h ;
Formule B : fonction f ;
Formule C : fonction g.

2. c. Calculer le nombre de journées de ski pour lequel le montant à payer avec les formules A et B est identique.

Corrigé

Il faut donc résoudre l'équation : $h(x) = f(x)$, soit

$$\begin{aligned} h(x) = f(x) &\iff 36,5x = 90 + 18,5x \\ &\iff 18x = 90 \\ &\iff x = 5 \end{aligned}$$

On a effectivement :

$$\begin{cases} h(5) = 182,5 \\ f(5) = 90 + 18,5 \times 5 = 90 + 92,5 = 182,5 \end{cases}$$

On paiera avec les formules A et B, 182,50 €.

3. On a représenté graphiquement les trois fonctions dans le graphique ci dessous.
Sans justifier et à l'aide du graphique :

3. a. Associer chaque représentation graphique (d_1), (d_2) et (d_3) à la fonction f, g ou h correspondante.

Corrigé

– (d_1) correspond à la fonction constante g définie par $g(x) = 448,5$;
– (d_2) correspond à la fonction linéaire h définie par $h(x) = 36,5x$;
– (d_3) correspond à la fonction f définie par $f(x) = 90 + 18,5x$.

3. b. Déterminer le nombre maximum de journées pendant lesquelles Marin peut skier avec un budget de 320 €, en choisissant la formule la plus avantageuse.

Corrigé

- Marin ne peut bien sûr pas se payer le forfait à 448,50 €.
- Avec la formule A l'équation

$$36,5x = 320 \iff x = \frac{320}{36,5} \approx 8,8$$

  Il peut donc skier 8 jours.
- Avec la formule B l'équation

$$90 + 18,5x = 320 \iff 18,5x = 230 \iff x = \frac{230}{18,5} \approx 12,4$$

  soit 12 journées de ski, soit le nombre maximal de journées de ski qu'il peut se payer (il paiera en fait $90 + 18,5 \times 12 = 312$ €).

3. c. Déterminer à partir de combien de journées de ski il devient avantageux de choisir la formule C.

Corrigé

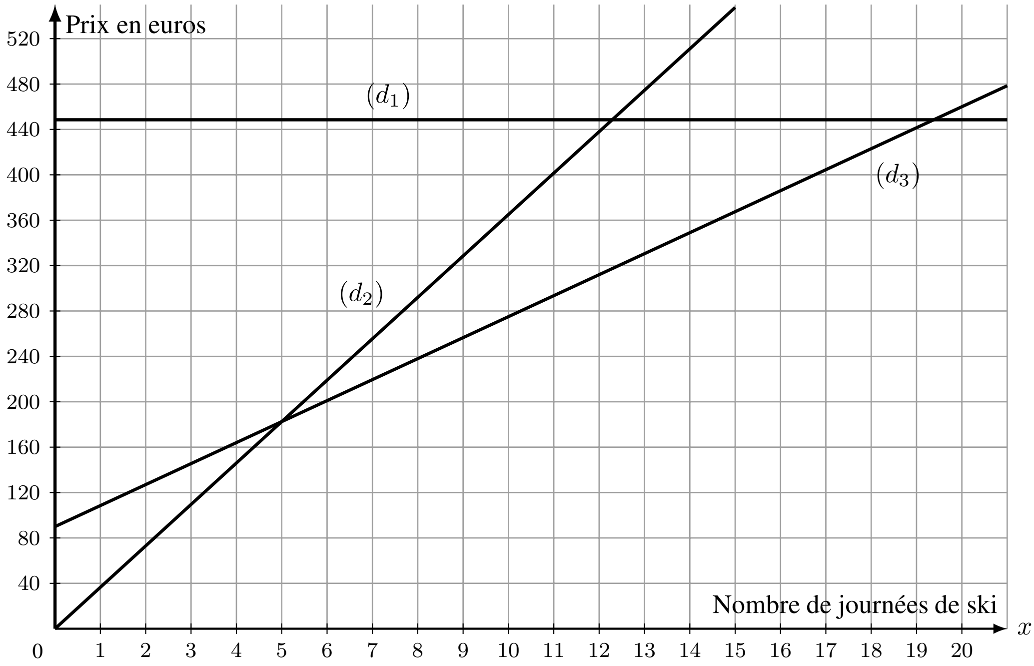
- La formule A est la plus onéreuse. Il faut donc comparer les formules B et C. On cherche l'abscisse du point d'intersection des deux droite ou, le nombre de jour pour lequel les deux tarifs sont égaux. On sait graphiquement que c'est à partir de ce nombre que le tarif c deviendra plus intéressant.

$$448,5 = 90 + 18,5x \iff 358,5 = 18,5x \iff \frac{358,5}{18,5} = x$$

- Or $\frac{358,5}{18,5} \approx 19,4$, donc le forfait C est intéressant à partir de 20 journées de ski dans l'année.

Remarque : on pouvait aussi résoudre les deux dernières questions graphiquement.

©ISSN 2272-5318



Fin du devoir