

Épreuve de Mathématiques

Durée 3 heures

*Le sujet comporte **6** pages en plus de la page de garde, dont une annexe graphique à rendre avec la copie.*

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, tous les résultats doivent être justifiés.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Si un candidat ne sait pas répondre à une question, il pourra en admettre le résultat après l'avoir clairement indiqué sur sa copie, et l'utiliser dans les questions suivantes,

<p><i>Toute prise d'initiative, toute démarche ou recherche, incomplète ou infructueuse, pourra être prise en compte dans l'appréciation de la copie.</i></p>

Épreuve de Mathématiques

Durée 3 heures

Exercice 1

6 points

Les personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est situé votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- Trois quarts personnes utilisent l'ascenseur, et parmi celles-ci, une sur dix se rend au 1^{er} niveau, trois sur dix se rendent au 2^{ème} niveau et les autres se rendent au 3^{ème} niveau.
- Parmi les personnes utilisant l'escalier, un tiers se rend au 2^{ème} niveau, les autres se rendent au 1^{er} niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population. On pourra considérer les événements suivants :

- N_1 : « La personne se rend au premier niveau. »
- N_2 : « La personne se rend au deuxième niveau. »
- N_3 : « La personne se rend au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »
- A : « La personne emprunte ascenseur. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré. Aucune justification n'est demandée.
2. a. Montrer que la probabilité que la personne se rende au 2^{ème} niveau par l'escalier est $\frac{1}{12}$.
b. Montrer que la probabilité que la personne se rende au 2^{ème} niveau est $\frac{37}{120}$.
c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2^{ème} niveau.
3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que l'effectif de l'entreprise est suffisamment important pour que leurs réponses soient considérées comme des tirages indépendants avec remise.

On prend 0,31 comme valeur approchée de $P(N_2)$: tous les calculs seront faits avec cette valeur de référence.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes se rendant au 2^{ème} niveau.

- a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X .
- b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2^{ème} niveau.
- c. En moyenne, sur les 20 personnes, combien vont au 2^{ème} niveau ?

4. Soit n un entier naturel strictement positif et inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que l'effectif de l'entreprise est suffisamment important pour que leurs réponses soient considérées comme des tirages indépendants avec remise.
- Exprimer en fonction de n la probabilité de l'événement « au moins une personne se rend au 2^{ème} niveau ».
 - Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour que la probabilité de l'événement « au moins une personne va au 2^{ème} niveau » soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 2

6 points

Les parties A, B, C sont indépendantes.

Une entreprise produit et commercialise des stylos. Ses capacités de production annuelle varient de 100 000 à 800 000 stylos. On note $C_t(x)$ le coût de production exprimé en centaines de milliers d'euros, pour une production annuelle x exprimée en centaines de milliers de stylos.

On admet que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;8]$ on a $C_t(x) = x^2 - 2x \ln x + 8$. La courbe de coût est fournie en annexe de l'énoncé.

Chaque stylo est vendu 4 euros. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;8]$, on note $R(x)$ la recette exprimée en centaines de milliers d'euros, et $B(x) = R(x) - C_t(x)$ le bénéfice, également exprimé en centaines de milliers d'euros.

Partie A : lecture graphique

- Exprimer $R(x)$ en fonction de x , et représenter graphiquement la fonction de recette dans le document fourni en annexe.
- En déduire, avec la précision permise par le graphique, la fourchette de production dans laquelle l'entreprise devra se situer pour réaliser des bénéfices.

Aucune justification écrite n'est requise. La réponse sera indiquée sur la copie, et on laissera apparentes sur le graphique les marques de justification graphique.

Partie B : étude du bénéfice

On note B' et B'' les dérivées première et seconde de B .

- Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;8]$, on a $B(x) = -x^2 + 2x \ln x + 4x - 8$.
- On admet que B' est donnée par $B'(x) = -2x + 2 \ln x + 6$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;8]$.
 - Calculer $B''(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $[1;8]$.
 - En déduire le tableau de variations complet de B' sur $[1;8]$.
- En déduire que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1;8]$. On prendra 4,50 pour valeur approchée de α à 10^{-2} près sans avoir à le justifier.
 - Quel est le signe de $B'(x)$ dans $[1;8]$. En déduire le tableau de variations de B sur cet intervalle et calculer $B(4,5)$ au centième près.
 - Exprimer au millier d'euros près le bénéfice maximum B_{\max} que l'entreprise peut escompter, ainsi que la quantité de stylos vendus, au millier d'objets près.

Partie C : étude du coût moyen de production

Le coût moyen de production est la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1;8]$ par $C_m(x) = \frac{C_t(x)}{x}$. On note C'_m la dérivée de C_m .

1. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;8]$, on a $C'_m(x) = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2}$.
2. En déduire le signe de $C'_m(x)$ et dresser le tableau de variations de C_m sur $[1;8]$.
3. En déduire le volume de production qui permet d'avoir un coût moyen minimal, et déterminer le coût moyen minimal unitaire C_{\min} au centime d'euro près.

Exercice 3

3 points

Soit f la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2 - 2x$. On a tracé ci-dessous la droite D_f , représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

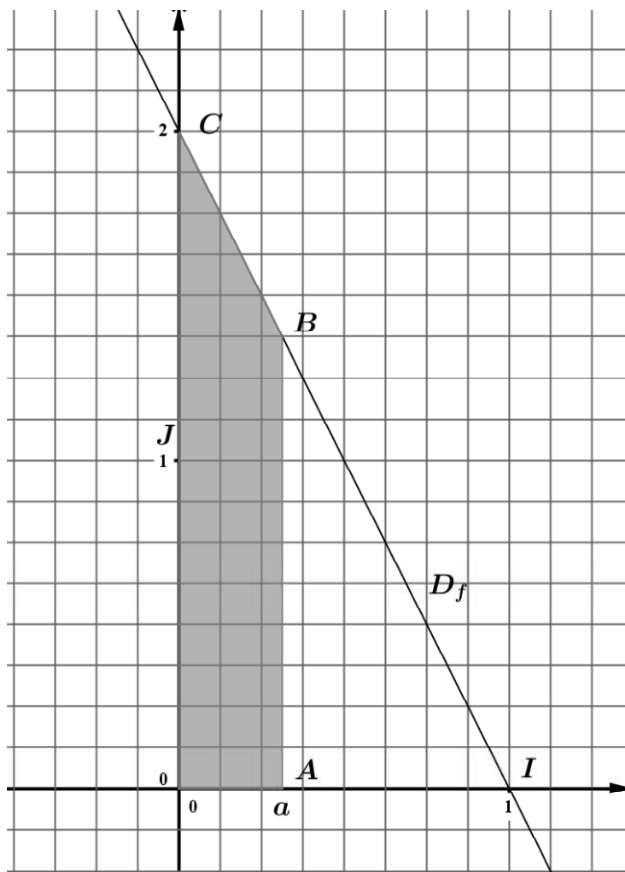
Le point C a pour coordonnées $(0, 2)$.

Δ est la partie du plan intérieure au triangle OIC .

Soit a un nombre réel compris entre 0 et 1. On note A le point de coordonnées $(a, 0)$ et B le point de D_f de coordonnées $(a, f(a))$, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

Le but de cet exercice est de trouver la valeur de a , telle que le segment $[AB]$ partage Δ en deux parties de même aire.

Déterminer la valeur exacte de a , puis une valeur approchée au centième.



Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Le but de l'exercice est d'étudier, pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

PARTIE A

On effectue à l'instant 0 une injection de 10mL de médicament. On estime que 20% du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité de médicament, exprimée en mL, encore présente dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

1. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
2. Pour tout entier naturel n , donner l'expression de u_n en fonction de n .
3. Quelle quantité de produit est encore présente dans le sang au bout de dix minutes ?

PARTIE B

On programme une machine de façon que :

- À l'instant 0 elle injecte 10mL de médicament ;
- Toutes les minutes elle injecte 1mL de médicament.

On estime que 20% du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n , on note v_n la quantité de médicament, exprimée en mL, encore présente dans le sang du patient au bout de n minutes. Ainsi $v_0 = 10$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 0,8v_n + 1$.
2. Recopier et compléter les lignes (L 4), (L 5) et (L 6) de l'algorithme suivant pour qu'il calcule et affiche la quantité restante de médicament minute par minute pendant 15 minutes.

VARIABLES	k est un entier	(L 1)
	v est un nombre réel	(L 2)
INITIALISATION	Affecter à v la valeur 10	(L 3)
TRAITEMENT	Pour k allant de --- à --- faire	(L 4)
	Affecter à v la valeur ---	(L 5)
	Afficher ---	(L 6)
	Fin de Pour	(L 7)
FIN		(L 8)

3. Pour tout entier naturel n , on pose $w_n = v_n - 5$.

Démontrer que (w_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

4. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $v_n = 5 \times 0,8^n + 5$.

5. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

6. Déterminer la limite de la suite (v_n) . Interpréter ce résultat.

Annexe de l'exercice 2

