Terminale ES

BACCALAURÉAT BLANC 24/03/2016

Épreuve de Mathématiques

Durée 3 heures

*Le sujet comporte **6** pages en plus de la page de garde, dont une annexe graphique à rendre avec la copie.*

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*En particulier, t**ous les résultats doivent être justifiés**.*

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Si un candidat ne sait pas répondre à une question, il pourra en admettre le résultat après l'avoir clairement indiqué sur sa copie, et l'utiliser dans les questions suivantes,

Toute prise d'initiative, toute démarche ou recherche, incomplète ou infructueuse, pourra être prise en compte dans l'appréciation de la copie.

Épreuve de Mathématiques

Durée 3 heures

Exercice 1 **6 points**

Les personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est situé votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- Trois quarts personnes utilisent l'ascenseur, et parmi celles-ci, une sur dix se rend au 1er niveau, trois sur dix se rendent au 2ème niveau et les autres se rendent au 3ème niveau.
- Parmi les personnes utilisant l'escalier, un tiers se rend au 2ème niveau, les autres se rendent au 1er niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population. On pourra considérer les événements suivants :

- N_1 : « La personne se rend au premier niveau. »
- N_2 : « La personne se rend au deuxième niveau. »
- N_3 : « La personne se rend au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »
- A : « La personne emprunte ascenseur. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré. Aucune justification n'est demandée.
2. a. Montrer que la probabilité que la personne se rende au 2ème niveau par l'escalier est $\frac{1}{12}$.

   b. Montrer que la probabilité que la personne se rende au 2ème niveau est $\frac{37}{120}$.

   c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2ème niveau.
3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que l'effectif de l'entreprise est suffisamment important pour que leurs réponses soient considérées comme des tirages indépendants avec remise.

   On prend 0,31 comme valeur approchée de $P(N_2)$: tous les calculs seront faits avec cette valeur de référence.

   On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes se rendant au 2ème niveau.

   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2ème niveau.

   c. En moyenne, sur les 20 personnes, combien vont au 2ème niveau ?

4. Soit n un entier naturel strictement positif et inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que l'effectif de l'entreprise est suffisamment important pour que leurs réponses soient considérées comme des tirages indépendants avec remise.
   a. Exprimer en fonction de n la probabilité de l'événement « au moins une personne se rend au $2^{\text{ème}}$ niveau ».
   b. Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour que la probabilité de l'événement « au moins une personne va au $2^{\text{ème}}$ niveau » soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 2 **6 points**

*Les parties **A**, **B**, **C** sont indépendantes.*

Une entreprise produit et commercialise des stylos. Ses capacités de production annuelle varient de 100 000 à 800 000 stylos. On note $C_t(x)$ le coût de production exprimé en centaines de milliers d'euros, pour une production annuelle x exprimée en centaines de milliers de stylos.

On admet que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;8]$ on a $C_t(x) = x^2 - 2x\ln x + 8$. La courbe de coût est fournie en annexe de l'énoncé.

Chaque stylo est vendu 4 euros. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;8]$, on note $R(x)$ la recette exprimée en centaines de milliers d'euros, et $B(x) = R(x) - C_t(x)$ le bénéfice, également exprimé en centaines de milliers d'euros.

Partie A : lecture graphique

1. Exprimer $R(x)$ en fonction de x, et représenter graphiquement la fonction de recette dans le document fourni en annexe.
2. En déduire, avec la précision permise par le graphique, la fourchette de production dans laquelle l'entreprise devra se situer pour réaliser des bénéfices.

   Aucune justification écrite n'est requise. La réponse sera indiquée sur la copie, et on laissera apparentes sur le graphique les marques de justification graphique.

Partie B : étude du bénéfice

On note B' et B'' les dérivées première et seconde de B.

1. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;8]$, on a $B(x) = -x^2 + 2x\ln x + 4x - 8$.
2. On admet que B' est donnée par $B'(x) = -2x + 2\ln x + 6$ pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;8]$.
   a. Calculer $B''(x)$ et étudier son signe sur l'intervalle $[1;8]$.
   b. En déduire le tableau de variations complet de B' sur $[1;8]$.
3. a. En déduire que l'équation $B'(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[1;8]$. On prendra 4,50 pour valeur approchée de α à 10^{-2} près sans avoir à le justifier.
   b. Quel est le signe de $B'(x)$ dans $[1;8]$. En déduire le tableau de variations de B sur cet intervalle et calculer $B(4,5)$ au centième près.
   c. Exprimer au millier d'euros près le bénéfice maximum $B_{\max}$ que l'entreprise peut escompter, ainsi que la quantité de stylos vendus, au millier d'objets près.

Partie C : étude du coût moyen de production

Le coût moyen de production est la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1;8]$ par $C_m(x)=\dfrac{C_t(x)}{x}$. On note C'_m la dérivée de C_m.

1. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;8]$, on a $C'_m(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x^2}$.
2. En déduire le signe de $C'_m(x)$ et dresser le tableau de variations de C_m sur $[1;8]$.
3. En déduire le volume de production qui permet d'avoir un coût moyen minimal, et déterminer le coût moyen minimal unitaire $C_{\min}$ au centime d'euro près.

Exercice 3 **3 points**

Soit *f* la fonction définie sur $[0;1]$ par $f(x)=2-2x$. On a tracé ci-dessous la droite D_f, représentation graphique de la fonction *f* dans un repère orthonormé (O, I, J) du plan.

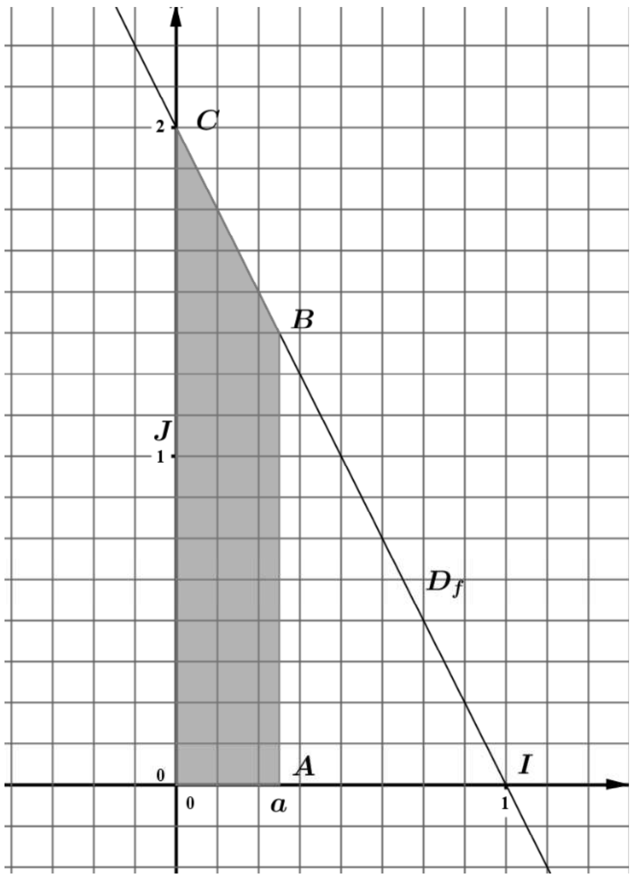
Le point *C* a pour coordonnées $(0, 2)$.

Δ est la partie du plan intérieure au triangle *OIC*.

Soit *a* un nombre réel compris entre 0 et 1. On note *A* le point de coordonnées $(a, 0)$ et *B* le point de D_f de coordonnées $(a,\ f(a))$, comme indiqué sur la figure ci-dessous.

Le but de cet exercice est de trouver la valeur de *a*, telle que le segment $[AB]$ partage Δ en deux parties de même aire.

Déterminer la valeur exacte de *a*, puis une valeur approchée au centième.

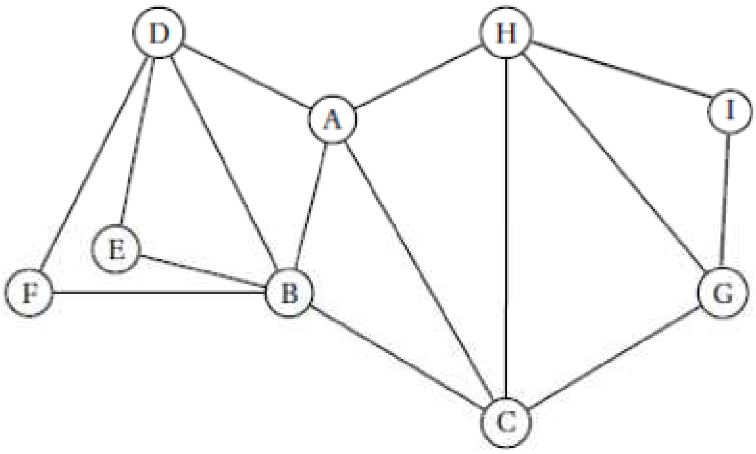


Exercice 4 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A : Étude d'un graphe

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous.



1. a. Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ est complet.

   b. Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ est connexe.

2. a. Donner le degré de chacun des sommets du graphe $\mathcal{G}$.

   b. Déterminer en justifiant si le graphe $\mathcal{G}$ admet un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne.

3. a. Donner la matrice M associée au graphe $\mathcal{G}$ (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

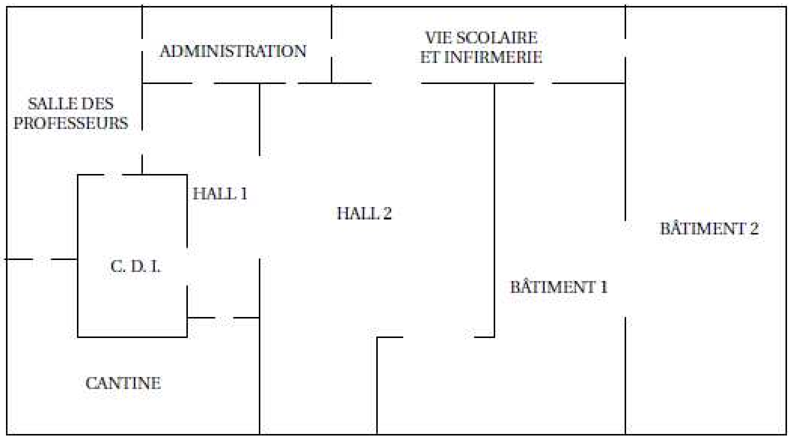
   b. On donne la matrice $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique.

   Montrer par un calcul matriciel détaillé que le coefficient de la septième ligne et quatrième colonne de la matrice M^3 est égal à 3.

Partie B : Applications

Dans cette partie, on pourra justifier les réponses en s'aidant de la partie ***A****.*

On donne ci-dessous le plan simplifié d'un lycée.



1. Le graphe $\mathcal{G}$ donné en partie ***A*** modélise cette situation.

Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommet de $\mathcal{G}$	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Lieu correspondant dans le lycée	Administration								

2. Un élève a cours de mathématiques dans le bâtiment 1. À la fin du cours, il doit rejoindre la salle des professeurs pour un rendez vous avec ses parents.

   Déterminer le nombre de chemins en trois étapes permettant à l'élève de rejoindre ses parents puis indiquer quels sont ces chemins.

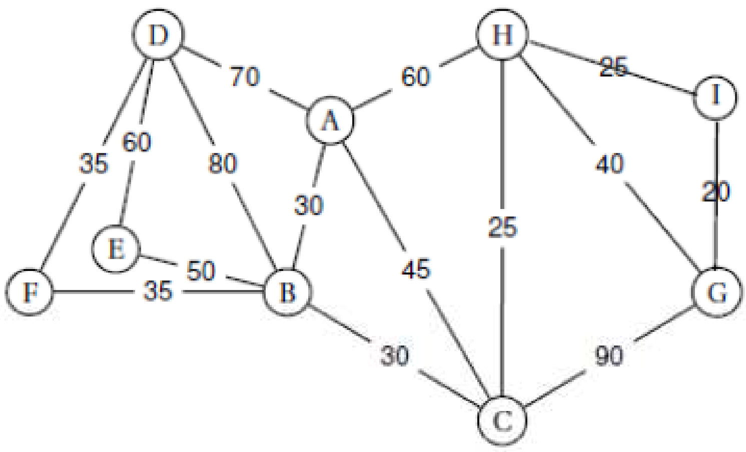
3. Le lycée organise une journée portes-ouvertes.

   a. Déterminer, en justifiant, s'il est possible de visiter le lycée en empruntant une seule fois chaque passage entre les différents lieux.

   b. Sur les arêtes du graphe $\mathcal{G}$ sont indiqués les temps de parcours exprimés en seconde entre deux endroits du lycée.

      i. Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant de relier le sommet $\mathcal{G}$ au sommet D en un temps minimal.

      ii. Déterminer ce temps minimal, exprimé en seconde.



Annexe de l'exercice 2