

∞ Baccalauréat Blanc ES/L Duruy ∞
7 février 2019

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Les employés d'une entreprise ont été interrogés afin de connaître leur point de vue sur le télétravail et le temps de travail.

L'enquête révèle que 55% des employés souhaitent faire du télétravail et parmi ceux qui souhaitent faire du télétravail, 95% souhaitent faire un temps partiel.

Parmi ceux qui ne veulent pas faire de télétravail, seulement 10% souhaitent faire un temps partiel.

On choisit un employé au hasard dans l'entreprise. On considère les événements suivants :

- L : l'employé choisi souhaite faire du télétravail;
- C : l'employé choisi souhaite faire un temps partiel.

1. Construire un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer $P(L \cap C)$, la probabilité de l'évènement $L \cap C$.
3. Montrer que $P(C) = 0,5675$.
4. Calculer $P_C(L)$, la probabilité de l'évènement L sachant l'évènement C réalisé. En donner une valeur arrondie à 10^{-4} . Interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.
5. On interroge successivement et de façon indépendante quatre employés pris au hasard parmi les employés de l'entreprise. Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre d'employés qui souhaitent faire un temps partiel. Le nombre d'employés étant suffisamment grand, on assimilera l'expérience aléatoire à un tirage avec remise.
 - a. Quelle est la loi suivie par X ? Préciser les paramètres de cette loi.
 - b. Calculer la probabilité qu'aucun des quatre employés interrogés ne souhaite faire un temps partiel. En donner une valeur arrondie à 10^{-4} .
 - c. Calculer la probabilité qu'au moins deux employés souhaitent faire un temps partiel.

EXERCICE 2**5 points****Commun à tous les candidats**

MANAZONE, une entreprise de vente de livres fondée par une ancienne élève de terminale du fameux Lycée Victor Duruy. En banlieue parisienne, le hangar de stockage de MANAZONE est devenu trop petit. La présidente-directrice générale a alors décidé de vendre ce hangar et d'ouvrir dans Paris même un nouvel entrepôt qui pourra contenir 100 000 ouvrages au total.

Pour l'ouverture prévue le 1^{er} janvier 2020, la société dispose du stock de 35 000 ouvrages de l'ancien hangar augmenté de 7 000 ouvrages supplémentaires neufs offerts par de généreux donateurs.

Partie A

À partir de 2020, la responsable de l'entrepôt parisien sera chargée de supprimer 5 % des ouvrages, trop vieux ou abîmés, et d'acheter 6 000 ouvrages neufs.

On appelle u_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année $(2020 + n)$.

On donne $u_0 = 42$.

- Justifier que, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n \times 0,95 + 6$.
- On propose, ci-dessous, un algorithme, en langage naturel.
Expliquer ce que permet de calculer cet algorithme.

<pre> U ← 42 N ← 0 Tant que U < 100 Faire U ← 0,95 × U + 6 N ← N + 1 Fin Tant que Afficher N </pre>
--

- À l'aide de votre calculatrice, déterminer le résultat obtenu grâce à cet algorithme et interpréter le résultat.

Partie B

La responsable de l'entrepôt parisien doit finalement revoir ses dépenses à la baisse, elle ne pourra financer que 4 000 nouveaux ouvrages par an au lieu des 6 000 prévus.

On appelle v_n le nombre, en milliers, d'ouvrages disponibles le 1^{er} janvier de l'année $(2020 + n)$.

- Identifier et écrire la ligne qu'il faut modifier dans l'algorithme pour prendre en compte ce changement.
- On admet que $v_{n+1} = v_n \times 0,95 + 4$ avec $v_0 = 42$.
On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier n , par $w_n = v_n - 80$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,95$ et préciser son premier terme w_0 .
- Exprimer (w_n) puis (v_n) en fonction de n .
- Déterminer la limite de (w_n) .
 - En déduire la limite de (v_n) .
 - Interpréter ce résultat.

EXERCICE 3**5 points Commun à tous les candidats**

Une fonction est dite de « *contentement* » lorsqu'elle est dérivable et prend ses valeurs entre 0 et 100. Si la fonction « *contentement* » atteint la valeur 100, on dit qu'il y a « *plénitude* ».

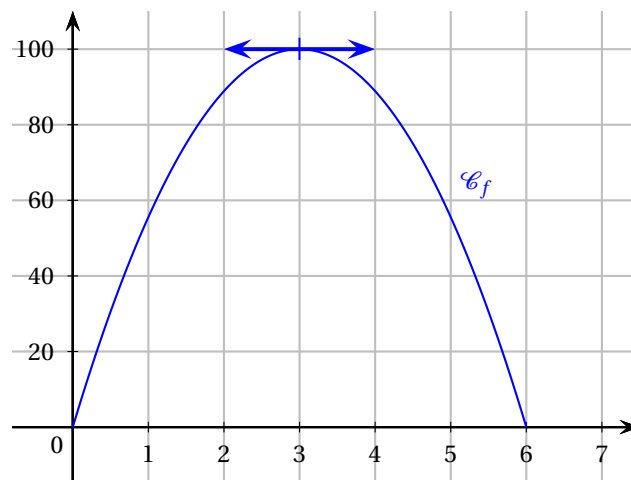
La fonction « *désir* » est la fonction dérivée de la fonction « *contentement* ». On dira qu'il y a « *voeu* » lorsque la fonction « *désir* » est positive ou nulle et qu'il y a « *refus* » lorsque la fonction « *désir* » est strictement négative.

Dans chaque partie, on teste un modèle de fonction « *contentement* » différent.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 heures par jour. Il modélise son contentement en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « *contentement* » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessous (x est exprimé en heures).



Par lecture graphique, répondre aux questions suivantes.

1. Lire la durée de travail quotidien menant à « *plénitude* ».
2. Déterminer à partir de quelle durée de travail il y a « *refus* ».

Partie B

La directrice d'une agence de voyage modélise le contentement de ses clients en fonction de la durée de leur séjour. On admet que la fonction « *contentement* » g est définie sur l'intervalle $[0; 35]$ pour x est exprimé en jour par :

$$g(x) = 20x e^{-0,2x+1}$$

1. Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0; 35]$,

$$g'(x) = (20 - 4x) e^{-0,2x+1}.$$

2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur l'intervalle $[0; 35]$ puis dresser le tableau des variations de g sur cet intervalle.
3. Á quelle durée de séjour correspond l'effet « *plénitude* »?

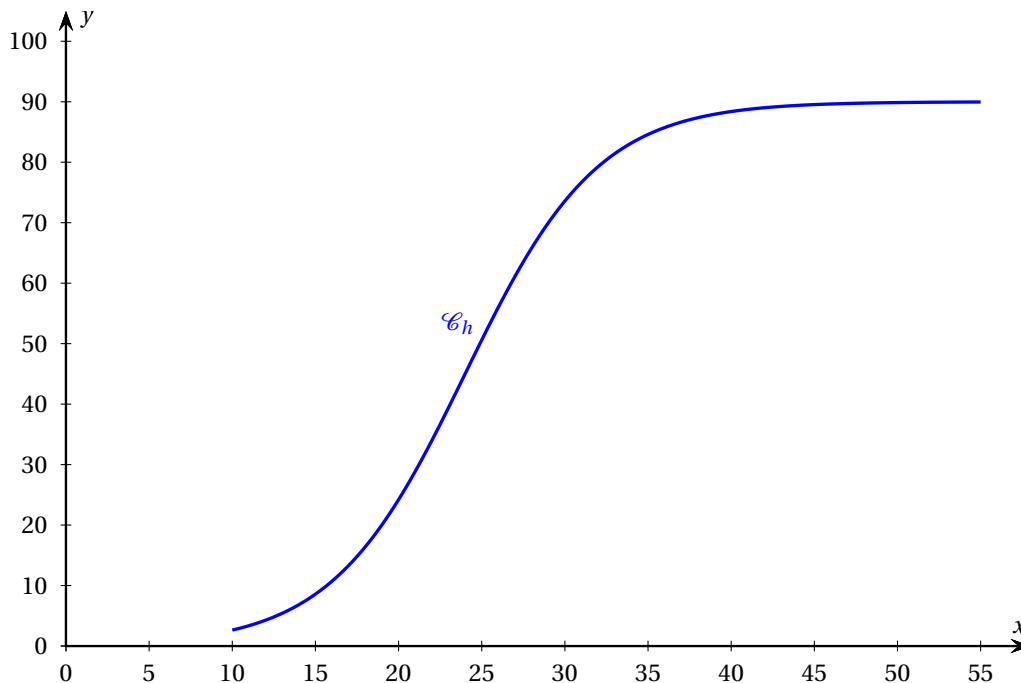
Partie C

La DRH, directrice des ressources humaines de l'entreprise MANAZONE modélise le contentement d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction « contentement » h , est définie sur l'intervalle $[10 ; 55]$ par

$$h(x) = \frac{90}{1 + e^{-0,25x+6}}$$

(x est exprimé en millier d'euros).

La courbe \mathcal{C}_h de la fonction h est représentée ci-dessous :



Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

1	Dériver($90/(1 + \exp(-0.25 * x + 6))$) $\frac{22,5e^{-0,25x+6}}{(1 + e^{-0,25x+6})^2}$
2	Dériver($22.5 * \exp(-0,25 * x + 6)/(1 + \exp(-0,25 * x + 6))^2$) $\frac{5,625e^{-0,25x+6}(e^{-0,25x+6} - 1)}{(1 + e^{-0,25x+6})^3}$

1. Donner sans justification une expression de $h''(x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[10 ; 55]$ l'inéquation $e^{-0,25x+6} - 1 > 0$.
3. Étudier la convexité de la fonction h sur l'intervalle $[10 ; 55]$. Donner les points d'inflexion éventuels.
4. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « désir » décroît? Justifier.
5. Montrer que l'équation $h(x) = 80$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[10 ; 55]$.
Déterminer une valeur approchée de α au millième.
Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

EXERCICE 4 : OBLIGATOIRE**5 points****Pour les candidats de ES n'ayant pas suivi la spécialité mathématiques ou pour les candidats de L.**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier chaque réponse.

1. Proposition 1 :Pour tout réel x ,

$$\frac{2}{1+e^x} = 2 - \frac{2}{1+e^{-x}}$$

2. Proposition 2 :Soit la fonction h définie sur \mathbf{R} par :

$$k(x) = x + e^{2x-2}$$

L'équation de la tangente à la courbe représentative de k au point d'abscisse 1 est :

$$y = 3x - 1$$

3. Proposition 3 :

D'après une étude, le nombre d'objets connectés à Internet à travers le monde est passé de 4 milliards en 2010 à 15 milliards en 2017. L'arrondi au dixième de pourcent du taux d'évolution annuel moyen est de 39,3%.

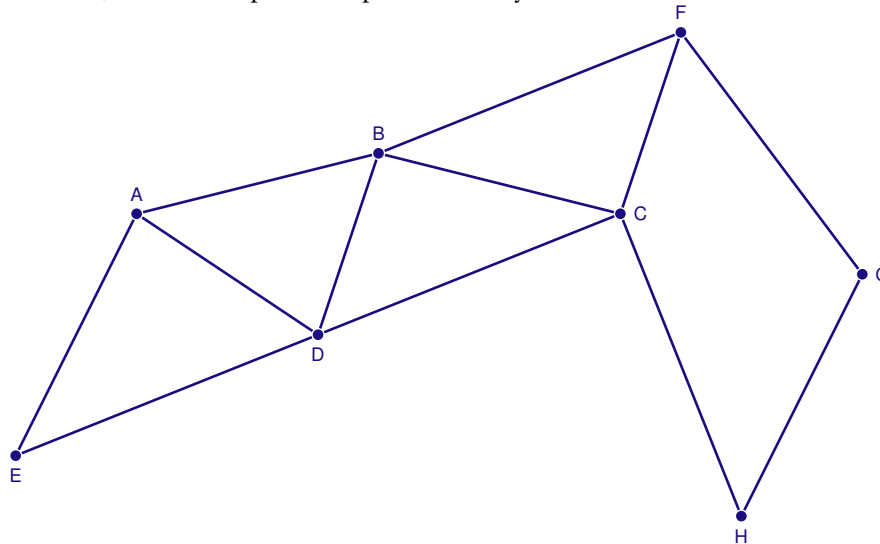
4. Proposition 4 :La fonction définie sur \mathbf{R} par $f(x) = e^{-2x}$ est convexe sur \mathbf{R} .**5. Proposition 5 :**

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_1 = 2$ et de raison 1,2.
Alors tous les termes de la suite (u_n) sont plus petits que 10^5 .

Exercice 4
Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité

5 points

Le graphe ci-dessous modélise le plan d'un parc d'attractions. Les sommets représentent les différentes attractions et les arêtes, les chemins pédestres permettant d'y accéder.

**PARTIE A**

1. Est-il possible de planifier un parcours pour qu'un visiteur du parc passe par tous les chemins pédestres une et une seule fois? Si oui, indiquer un tel parcours; si non expliquer pourquoi.
2. On note M la matrice d'adjacence associée à ce graphe (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).

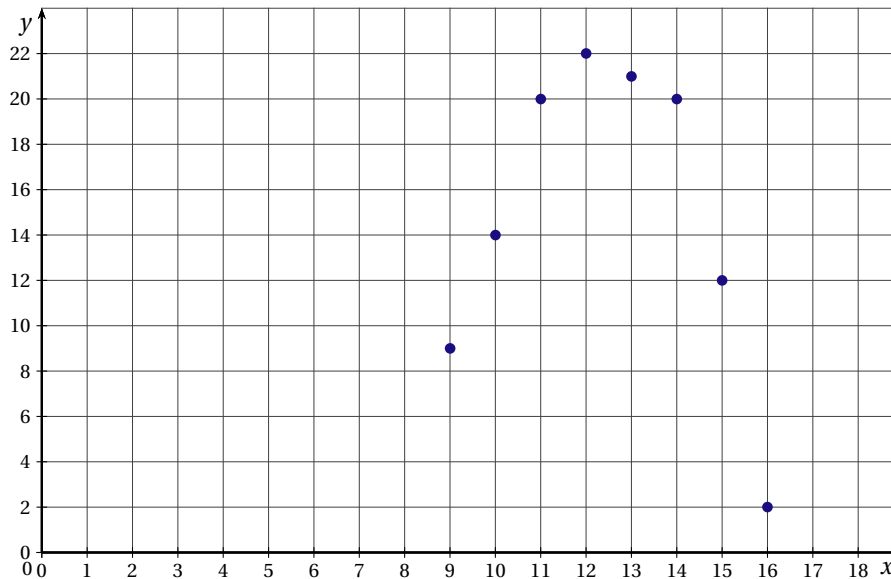
On donne la matrice

$$M^A = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 20 & 21 & 11 & 13 & 5 & 5 \\ 18 & 32 & 25 & 25 & 17 & 16 & 10 & 10 \\ 20 & 25 & 31 & 19 & 13 & 13 & 14 & 5 \\ 21 & 25 & 19 & 31 & 13 & 21 & 4 & 12 \\ 11 & 17 & 13 & 13 & 11 & 6 & 4 & 3 \\ 13 & 16 & 13 & 21 & 6 & 20 & 3 & 13 \\ 5 & 10 & 14 & 4 & 4 & 3 & 9 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 12 & 3 & 13 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Déterminer le nombre de parcours allant de E à G en 4 chemins pédestres. Les citer tous.

PARTIE B

Une enquête a permis de relever la durée moyenne d'attente en minutes à l'entrée du parc en fonction de l'heure. Ce relevé a eu lieu chaque heure de 9 h à 16 h. Le graphique ci-dessous présente les résultats de cette étude.



Le point de coordonnées (10; 14) indique qu'à 10 h, le temps d'attente est de 14 min. Le temps d'attente est alors modélisé par une fonction f définie sur $[9; 16]$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a , b , c sont des réels (a non nul) telle que les trois points (9 ; 9), (11 ; 20) et (16 ; 2) appartiennent à la représentation graphique de f . La variable x désigne l'heure et $f(x)$ exprime le temps d'attente en minutes.

1. Traduire cette situation par un système de trois équations d'inconnues a , b et c .
2. Résoudre matriciellement ce système et en déduire les trois réels a , b et c .
3. En déduire avec ce modèle, à quelles heures le temps d'attente est inférieur à dix minutes.