Terminale S

BACCALAURÉAT BLANC 24/03/2016

Épreuve de Mathématiques

Durée 4 heures

Le sujet comporte $\boxed{5}$ *pages en plus de la page de garde, dont une annexe graphique à rendre avec la copie.*

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

*En particulier, t**ous les résultats doivent être justifiés**, brièvement, mais clairement.*

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Si un candidat ne sait pas répondre à une question, il pourra en admettre le résultat après l'avoir clairement indiqué sur sa copie, et l'utiliser dans les questions suivantes,

Toute prise d'initiative, toute démarche ou recherche, incomplète ou infructueuse, pourra être prise en compte dans l'appréciation de la copie.

Épreuve de Mathématiques

Durée 4 heures

Exercice 1 **5 points**

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l’ascenseur ou l’escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l’ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1$^{\text{er}}$ niveau, 75 vont au 2$^{\text{ème}}$ niveau et 100 vont au 3$^{\text{ème}}$ niveau.
- Les autres personnes utilisent l’escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2e niveau, les autres vont au 1$^{\text{er}}$ niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population. On pourra considérer les événements suivants :

- N_1 : « La personne va au premier niveau. »
- N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
- N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l’escalier. »

1. Traduire l’énoncé à l’aide d’un arbre pondéré.
2. a. Montrer que la probabilité que la personne aille au 2$^{\text{ème}}$ niveau par l’escalier est égale à $\dfrac{1}{12}$.

   b. Montrer que les événements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

   c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l’escalier sachant qu’elle va au 2$^{\text{ème}}$ niveau.
3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

   On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2$^{\text{ème}}$ niveau.

   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2e niveau.

   c. En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2e niveau ?
4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

   Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l’évènement « au moins une personne va au 2$^{\text{ème}}$ niveau »soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 2 **7 points**

1. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_n(x) = \ln x + \frac{x}{n} - 1.$$

   a. Déterminer les limites de f_n en 0 et en $+\infty$ puis étudier le sens de variations de f_n.

   b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$.

   On note α_n cette solution. Montrer qu'elle appartient à l'intervalle $[1;e]$.

   c. Déterminer le signe de $f_n(x)$ suivant les valeurs du réel x.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note (Γ) la courbe représentative de la fonction logarithme népérien. (Γ) est fournie en annexe du sujet.

   Soit n un entier naturel non nul.

   a. Déterminer une équation de la droite Δ_n passant par le point A de coordonnées $(0;1)$ et le point B_n de coordonnées $(n;0)$.

   b. Montrer que α_n est l'abscisse du point d'intersection de (Γ) avec Δ_n.

   c. Représenter sur le document fourni en annexe les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3, ainsi que les réels α_1, α_2 et α_3.

   d. Précisez la valeur de α_1 puis conjecturer le sens de variations de la suite (α_n).

3. a. Montrer que :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{-x}{n(n+1)}.$$

   b. En déduire que $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

   c. Déduire de la question précédente le sens de variations de la suite (α_n).

   d. Montrer que la suite (α_n) converge.

4. Dans cette question, n est égal à 2, et on s'intéresse au terme α_2.

   a. Montrer que $1 < \alpha_2 < 2$.

   b. On considère l'algorithme suivant :

```
Variables a, b, m
Début
   Affecter à a la valeur 1
   Affecter à b la valeur 2
   Tant que b-a>0,2 faire
      Affecter à m la valeur (a+b)/2
      Si ln(m)+m/2-1>0 alors affecter à b la valeur m
                       Sinon affecter à a la valeur m
      Fin de Si
   Fin de Tant que
   Afficher (a+b)/2
Fin
```

i. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous que l'on recopiera sur la copie.

	Étape 0	Étape 1	Étape 2	Étape 3	Affichage
a	1				
b	2				
$b-a$					
m					

ii. Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

Exercice 3 — 3 points

Pour chaque réel a, on considère la fonction f_a définie sur l'ensemble $\mathbf{R}$ des nombres réels par

$$f_a(x) = e^{x-a} - 2x + e^a .$$

1. Démontrer que pour tout réel a, la fonction f_a possède un minimum.
2. Existe-t-il une valeur de a pour laquelle ce minimum est le plus petit possible ?

Exercice 4 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

Partie A

Soit *a*, *b*, *c*, *n* quatre entiers naturels avec $n \neq 0$.

a. Démontrer que si $a \equiv b \quad [n]$, alors $ac \equiv bc \quad [n]$.

b. La réciproque est-elle vraie ? Justifier.

Partie B

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par

$$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = 5u_n - 6 \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4.

   Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n suivant les valeurs de l'entier *n* ?

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel *n*, $u_{n+2} \equiv u_n$ (modulo 4).

   b. En déduire que, pour tout entier naturel *k*, $u_{2k} \equiv 2$ (modulo 4) et $u_{2k+1} \equiv 0$ (modulo 4).

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

   b. En remarquant que $5^3 \equiv 5^2$ (modulo 100), montrer que pour tout entier naturel *n*,

   $$5^{n+2} \equiv 25 \text{ (modulo 100)}$$

   c. En déduire que, pour tout entier naturel *n*, $2u_n \equiv 28$ (modulo 100).

4. a. Déduire de la question précédente que pour tout entier naturel *n*, les deux derniers chiffres de u_n sont soit 14, soit 64.

   b. Démontrer alors la conjecture faite à la question 1.

A n n e x e d e l ' e x e r c i c e 2