Chapitre 1 – Géométrie affine euclidienne dans le plan – Exercices

I. Ciril, F. De Lepine, F. Duffaud, C. Peschard

Exercice 1
Soit $\mathcal{C} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ la base canonique de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. Les systèmes de vecteurs suivants sont-ils des bases de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$? Si non, en extraire une base ou la compléter pour obtenir une base.
   a) $\overrightarrow{u}_1 = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$.
   b) $\overrightarrow{v}_1 = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v}_2 = -4\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j}$.
   c) $\overrightarrow{w}_1 = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v}_2 = -2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{w}_3 = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$.
2. Déterminer les composantes relatives aux bases de la question précédente des vecteurs suivantes :

$$\overrightarrow{w} = \overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{r} = 2\overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{u}_2,\ \overrightarrow{s} = -\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{v}_2 = -2\overrightarrow{w}_1 + 3\overrightarrow{v}_2.$$

Exercice 2
Montrer que $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes et externes suivante :

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d),\ \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R},$$

est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice 3*
Déterminer si $\mathbb{R}^2$, muni des lois internes et externes suivantes, est ou n'est pas un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :

1. $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d); \lambda(a,b) = (a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.
2. $(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d); \lambda(a,b) = (\lambda^2 a, \lambda^2 b), \lambda \in \mathbb{R}$.
3. $(a,b) + (c,d) = (c,d); \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.
4. $(a,b) + (c,d) = (2a+c, a+b+2d); \lambda(a,b) = (\lambda a, 2\lambda b), \lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 4
Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien muni du repère orthonormé directe $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Les points et les vecteurs sont exprimés par leur coordonnées dans $\mathcal{R}$.

1. Calculer l'aire des parallélogrammes s'appuyants sur les deux vecteurs suivants :
   a) $\overrightarrow{u}_1(\sqrt{3}, 2)$ et $\overrightarrow{v}_1(1, 3\sqrt{3})$,
   b) $\overrightarrow{u}_2(1, \sqrt{2})$ et $\overrightarrow{v}_2(\sqrt{2}-2, \sqrt{2}+2)$.
2. Calculer les angles :
   a) entre les vecteurs $\overrightarrow{u}_1(\sqrt{3}, 2)$ et $\overrightarrow{v}_1(1, 3\sqrt{3})$,
   b) entre les vecteurs $\overrightarrow{u}_2(1, \sqrt{2})$ et $\overrightarrow{v}_2(\sqrt{2}-2, \sqrt{2}+2)$.
3. Calculer l'aire du triangle de sommets $A(-1, 0)$, $B(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$.

4. Calculer les angles du triangle de sommets $A(-1,0)$, $B(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $C(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Exercice 5

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien muni du repère orthonormé directe $\mathcal{R}=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. Les points sont exprimés par leur coordonnées dans $\mathcal{R}$. On considère les trois points de $\mathcal{P}$: $A(2,-3)$, $B(0,-1)$ et $C(-2,-5)$.

1. Dessiner le triangle ABC puis calculer son aire.
2. Calculer les coordonnées de l'orthocentre H, du centre du cercle circonscrit Ω et du centre de gravité G de ABC.
3. Vérifier que H, Ω et G sont alignés et qu'en particulier $\overrightarrow{\Omega G}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\Omega H}$.

Exercice 6

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien muni du repère orthonormé directe $\mathcal{R}=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$. On pose $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{j}$.

1. Soit M un point quelconque du plan de coordonnées (x,y). On pose :
$$d_1=\det(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}),\ d_2=\det(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO}),\ d_3=\det(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MA}).$$
   a) Calculer d_1,d_2,d_3 en fonction de x et y et prouver que :
$$d_1+d_2+d_3\neq 0.$$
   b) En déduire la relation :
$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\big(d_2\overrightarrow{OA}+d_3\overrightarrow{OB}\big). \tag{1}$$
2. Soit I le point tel que $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et a un réel strictement positif. On suppose que M est le barycentre du système de points pondérés $\{(0,a),(A,1),(B,2)\}$.
   a) Démontrer que M appartient au segment $[OI]$.
   b) Exprimer $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ et a.
   En déduire en utilisant la relation (1) que : $d_3=2d_2$ et $d_1=ad_2$.
   c) Démontrer que :
$$\text{Aire}(MAB)=a\times\text{Aire}(MOB)\quad\text{et}\quad\text{Aire}(MOA)=2\times\text{Aire}(MOB).$$

Exercice 7

Soit $ABCD$ un quadrilatère, I le milieu de $[AC]$, J le milieu de $[BD]$. Soit K le point tel que $\overrightarrow{KA}=-2\overrightarrow{KB}$, L le point tel que $\overrightarrow{LC}=-2\overrightarrow{LD}$ et M le milieu de $[LK]$.
Le but du problème est de montrer que M,I,J sont alignés et de donner la position de M sur la droite (IJ).

1. Justifier l'existence du barycentre G du système $\{(A,1),(B,2),(C,1),(D,2)\}$. Puis en regroupant les points de différentes façons, montrer que G appartient aux deux droite (KL) et (IJ).
2. Montrer que G est en M, que les points M,I,J sont alignés et donner la position de M sur la droite (IJ).
3. Faire une figure soignée où tous les points considérés seront reportés.

Exercice 8
Soit ABC un triangle tel que $a = BC, b = AC$ et $c = AB$.

1. Montrer que l'on a les trois formules suivantes :

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}});\ b^2 = a^2+c^2-2ac\cos(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}});\ c^2 = a^2+b^2-2ab\cos(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}).$$

2. Demontrer la relation suivante :

$$\frac{a}{|\sin(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})|} = \frac{b}{|\sin(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})|} = \frac{c}{|\sin(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})|} = \frac{abc}{2S},$$

où S est la surface du triangle ABC.

Exercice 9
ABC est un triangle équilatéral de côté a. On désigne par : I le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 4)$; J le barycentre des points pondérés $(A, 3)$ et $(C, 2)$.

1. Calculer les produits scalaires suivant $\langle\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AC}\rangle$ et $\langle\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AC}\rangle$.
2. Montrer que les droites (IJ) et (AC) sont orthogonales.

Exercice 10 (Lieux géométriques)

1. ABC est un triangle équilatéral de côté $4cm$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|$.
2. ABCD est un carré. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que : $\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = 3AB$.
3. Soit ABC un triangle . Déterminer de lensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.
4. Soient A, B, C les sommets d'un triangle équilatéral de coté $1cm$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2$.
5. Soit $ABDC$ un paralllogramme.
   a) Déterminer lensemble des points M du plan tels que les vecteurs $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ et $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ soient colinéaires.
   b) Déterminer lensemble des points M du plan tels que les vecteurs $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ et $2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ soient orthogonaux.
6. Soient A et B deux points du plan et α un réel. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \alpha$.
7. Soient A et B deux points du plan et k un réel strictement positif. Déterminer l'ensemble des points Mdu plan tels que : $MA = kMB$.

Exercice 11
Soient, dans le plan, trois points A, B et C distincts deux à deux. On désigne par D le barycentre des points $(A, 1), (B, -1)$ et $(C, 1)$.
Pour tout point M du plan, on pose : $f(M) = MA^2 - MB^2 + MC^2$.

1. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Montrer que pour tout point M du plan on a : $f(M) = MD^2 + DA^2 - DB^2 + DC^2$.
3. En déduire que $ABCD$ est un rectangle si et seulement si $f(M) = MD^2$.
4. Déterminer, dans ce cas, l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = BD^2$.

Exercice 12

1. On muni le plan du r.o.d. $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j})$ et on note x et y les coordonnées dans ce repère. On considère les droites $\mathcal{D} : x+2y=5$ et $\mathcal{D}' : 3x-y=1$ et on note A l'intersection des deux droites et B le point de coordonnées $(5,2)$ dans $\mathcal{R}$.
   a) Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
   b) Donner une équation cartésienne de la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par B.
   c) Donner une équation cartésienne de la parallèle à $\mathcal{D}'$ passant par B.
   d) Soit C le point de coordonnées $(2,-7)$). Donner une équation cartésienne de la médiatrice Δ du segment $[B,C]$. Δ est-elle parallèle à $\mathcal{D}$? Et à $\mathcal{D}'$?
2. On considère les vecteurs :
$$\overrightarrow{u}=\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i}+\frac{1}{2}\overrightarrow{j},\ \overrightarrow{v}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{j}.$$
   a) Montrer que $\mathcal{R}'(B,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ définie un repère orthonormé directe dans le plan affine euclidien.
   b) On note x' et y' les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}'$. Donner les formules analytiques du changement de repère exprimant x,y en fonction de x',y' et x',y' en fonction de x,y.
   c) Donner dans le repère $\mathcal{R}'$ les équations cartésiennes des droites : (AB), de la perpendiculaire à $\mathcal{D}$ passant par B, de la parallèle à $\mathcal{D}'$ passant par B et de Δ.

Exercice 13

1. On considère la famille des droites $D_\lambda : x+\lambda y+1=0$, où $\lambda\in\mathbb{R}$.
   (a) Vérifier que ces droites passent toutes par un même point A dont on donnera les coordonnées.
   (b) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est verticale ? Si oui donner une équation de cette droite.
   (c) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il une qui est horizontale ? Si oui donner une équation de cette droite.
   (d) Parmi toutes ces droites, y en a-t-il qui sont parallèles, confondues ou perpendiculaires à la droite Δ d'équation $2x-3y+1=0$? Si oui donner des équations de ces droites.
2. On considère la famille de droites $D_m : (2m-1)x+(3-m)y+m+1=0$, $m\in\mathbb{R}$. Parmi toutes ces droites y en a-t-il une perpendiculaire à $(\Delta) : x+y-1=0$? Si oui, laquelle ?

Exercice 14

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, G le barycentre de $(A,2)(B,1)$ et H le barycentre de $(C,2)(D,1)$.

1. Montrer que les droites $(AC),(BD)$ et (GH) sont concourantes.
2. Soit E le barycentre de $(G,3)(D,1)$. Montrer que E est le milieu de $[AO]$.

Exercice 15

On considère le triangle ABC dont les côtés ont pour équations $(AB) : x+2y=3, (AC) : x+y=2, (BC) : 2x+3y=4$.

1. Donner les coordonnées des points A, B, C.
2. Donner les coordonnées des milieux A', B', C' de $(BC), (AC)$ et (AB) respectivement.
3. Donner une équation de chaque médiane et vérifier qu'elles sont concourantes.

Exercice 16

On considère dans P trois points A, B et C.

1. Déterminer dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ des équations pour les médianes du triangle ABC.
2. En déduire que les médianes d'un triangle sont concourantes.

Exercice 17

Soit ABC un tringle isocèle en A, D le milieu de $[BC]$, E le pied de la perpindiculaire menée de D à (AC), F le milieu de $[DE]$. Montrer que : $(AF) \perp (BE)$.

Exercice 18*

Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine. Déterminer l'ensemble des points ayant mêmes coordonnées dans les repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Exercice 19

Les questions sont indépendantes

1. On considère dans le plan les deux droites $(D : 3x+y=5)$ et $(D' : x-2y+3=0)$. Quel est l'angle entre ces deux droites ?
2. Calculer la distance du point $A(4,7)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x+4y=1$.
3. Déterminer les valeurs de $k \in \mathbb{R}$ telles que la distance du point $A(-2,3)$ à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $7x-24y=k$ est égale à 3.
4. Trouver le point I de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x+y=-4$ équidistant aux deux points $A(-5,6)$ et $B(3,2)$.
5. Trouver l'équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point d'intersection des deux droites d'équations $3x-2y=6$ et $x+3y=13$ et dont la distance de l'origine est égale à 5. Donner l'équation polaire de la droite $\mathcal{D}$.
6. Trouver les équations cartésiennes des bissectrices des deux angles formés par les deux droites d'équations $3x+4y=2$ et $5x-12y=7$. Donner les équations polaires des bissectrices.
7. Pour quelles conditions sur a, b et c, la droite déquation $ax+by=c$ forme-t-elle, avec les deux axes, un triangle isocèle ?

Exercice 20

1. Montrer que la distance entre les deux droites parallèles d'équations $ax+by=c_1$ et $ax+by=c_2$ est $\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
2. Soit les deux droites parallèles $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations $3x+4y=2$ et $6x+8y=1$.
   a) Trouver la distance entre les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.
   b) Trouver l'équation cartésienne et une équation polaire de la droite médiane, située entre les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

3. Trouver les équations cartésiennes et polaires des droites parallèles à la droite $\mathcal{D}$ d'équation $3x + 4y = 7$ et situées à une distance égale à 4 de $\mathcal{D}$.

Exercice 21

Les questions sont indépendantes

1. Trouver le centre et le rayon du cercle passant par le point $P(1, 1)$ et tangent à la droite d'équation $y = 2x - 3$ au point $Q(3, 3)$, puis en déduire l'équation cartésienne et une représentation paramétrique de ce cercle.
2. Trouver l'équation cartésienne et une représentation paramétrique donnant tous les cercles passant par les deux points $P(1, -1)$ et $Q(3, 1)$ et tangentes à la droite d'équation $y = -3x$.
3. Trouver les équations cartésiennes et les représentations paramétriques des cercles passant par le point $(2, 3)$ et tangents aux deux droites $3x - 4y = -1$ et $4x + 3y = 7$.
4. Trouver les équations cartésiennes et les représentations paramétriques de toutes les droites passant par le point $(4, 10)$ et tangeantes au cercle d'équation $x^2+y^2-4y-36 = 0$
5. Trouver les équations cartésiennes et les représentations paramétriques des cercles dont le centre appartient à la droite $5x-2y = -21$ et tangents aux deux axes de coordonnées.
6. Trouver la plus grande et la plus petite distance du point $(7, 12)$ au cercle $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 15 = 0$.

Exercice 22

1. Soient $\mathcal{C}$ un cercle de centre A et de rayon $R > 0$ et $\mathcal{D}$ une droite.
   a) Montrer que :
      (i) Si $d(A, \mathcal{D}) < R$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont exactement deux points d'intersection distincts.
      (ii) Si $d(A, \mathcal{D}) = R$, alors $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont un unique point d'intersection H qui est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$.
      (iii) Si $d(A, \mathcal{D}) > R$, alors $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.
   b) Déterminer l'intersection entre une droite et un cercle dans les cas suivants :
      (i) $x^2 + y^2 - 2x = 0$ et $y = x + 1$.
      (ii) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$ et $x - 2y - 1 = 0$.
      (iii) $x^2 + y^2 = 1$ et $x + y - \sqrt{2} = 0$.
2. Soient deux cercles non concentriques $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres respectifs A et A' ($A \neq A'$) et de rayons respectifs R et R'.
   a) Montrer que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ possèdent $0, 1$ ou 2 points d'intersections distincts.
   b) Montrer l'équivalence suvante :
   $$\mathcal{C}\,\text{et}\,\mathcal{C}'\ \text{ont au moins un points d'intersection} \Leftrightarrow |R' - R| \leq AA' \leq R + R'.$$
   c) Déterminer l'intersection entre deux cercles dans les cas suivants :
      (i) $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 2$ et $x^2 + y^2 + 2x + 2y = 9$.
      (ii) $x^2 + y^2 + 8y - 64 = 0$ et $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$.
      (iii) $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$ et $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 15$.
3. Démontrer que si deux cercles d'équations $x^2 + y^2 + A_1x + B_1y + C_1 = 0$ et $x^2 + y^2 + A_2x + B_2y + C_2 = 0$ se coupent en deux points, alors la droite passant par ces points d'intersection est perpindiculaire à la droite passant par leur centres.

4. Determiner l'équation cartesienne et une représentation paramétrique du cercle passant par le point $(-3, 1)$ et par les points communs des deux cercles d'équation $x^2+y^2+5x = 1$ et $x^2 + y^2 + y = 7$.

Exercice 23
Dans le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}\,(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, soit $\mathcal{C}$ la conique de foyer $F(1, -1)$ de directrice $\mathcal{D}$ d'équation cartésienne $x = 5$ et d'excentricité $e = \frac{1}{3}$.

1. Déterminer la nature de $\mathcal{C}$ (ellipse, hyperbole), l'axe focal, les coordonnées dans $\mathcal{R}$ des sommets principaux A et A', secondaires B et B', du centre Ω, du second foyer F' et l'équation cartésienne de la seconde directrice $\mathcal{D}'$.
2. Préciser l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$ et les coordonnées des points d'intersection avec les axes.

Exercice 24 (Parabole de paramètre p)
On considère dans le plan euclidien un point F et une droite $\mathcal{D}$ telle que $F \notin \mathcal{D}$. Soit le lieu de point suivant :

$$\mathcal{P}(\mathcal{D}, F) = \{M \in \mathcal{P} \,|\, MF = MH\},$$

où H désigne la projection orthogonale de M sur $\mathcal{D}$.

1. Soit I la projection orthogonale de F sur $\mathcal{D}$ et $p = IF$. On définit le r.o.d. $\mathcal{R}_I(I, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (on suppose que les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires et de même sens).
   (a) Donner l'équation cartésienne de $\mathcal{P}(\mathcal{D}, F)$ dans $\mathcal{R}_I$.
   (b) On considère le point O de coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$ dans $\mathcal{R}_I$. Montrer que l'équation cartésienne de $\mathcal{P}(\mathcal{D}, F)$ dans le repère $\mathcal{R}_O(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est de la forme :
   $$y^2 = 2px.$$
   (c) Construire la courbe représentative de $\mathcal{P}(\mathcal{D}, F)$ qui est appelé **parabole de foyer F, de directrice (associée) $\boldsymbol{\Delta}$** ou encore **parabole de paramètre p**.
2. Soit M un point de $\mathcal{P}(\mathcal{D}, F)$ distinct du point O. Montrer que la normale en M à $\mathcal{P}(\mathcal{D}, F)$ recoupe $\mathcal{P}(\mathcal{D}, F)$ en un autre point N. Calculer le minimum de la distance MN lorsque M décrit $\mathcal{P}(\mathcal{D}, F)$. Construire les points qui réalisent le minimum.

Exercice 25
Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé directe $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon) \in \mathbb{R}^5$, on considère :

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \,|\, \alpha x^2 + \beta y^2 + 2\gamma x + 2\delta y + \epsilon = 0\}.$$

1. On se propose d'étudier la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$ en fonction des paramètres $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon)$.
   (a) On suppose que $\alpha = \beta = 0$. Montrer que :
   – si $(\gamma, \delta) \neq (0, 0)$ alors $\mathcal{C}$ est une droite ;
   – si $\epsilon \neq 0$ et $(\gamma, \delta) = (0, 0)$ alors $\mathcal{C} = \emptyset$;
   – si $\gamma = \delta = \epsilon = 0$ alors $\mathcal{C} = \mathcal{P}$.
   (b) On suppose que $\alpha = 0$ et $\beta \neq 0$ (le cas $\alpha \neq 0$ et $\beta = 0$ est l'analogue en échangeant les rôles des coordonnées).
      i. Montrer que si $\gamma \neq 0$ alors $\mathcal{C}$ est une parabole de sommet le point Ω de coordonnées $(\frac{\delta^2}{2\delta\gamma} - \frac{\epsilon}{2\gamma}, -\frac{\delta}{2\beta})$, d'axe $(\Omega, \overrightarrow{i})$ et de paramètre $-\frac{\gamma}{\beta}$ (ou $|\frac{\gamma}{\beta}|$ suivant la définition choisie pour le paramètre).

ii. Montrer que si $\gamma = 0$, alors :
- si $\delta^2 - \beta\epsilon < 0$ on a $\mathcal{C} = \emptyset$;
- si $\delta^2 - \beta\epsilon > 0$, $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites parallèles distinctes ;
- si $\delta^2 - \beta\epsilon = 0$, $\mathcal{C}$ est une droite.

(c) On suppose que $\alpha \neq 0$ et $\beta \neq 0$. On considère un point O' de coordonnées $(-\frac{\gamma}{\alpha}, -\frac{\delta}{\beta})$ dans $\mathcal{R}$.

i. Montrer que si $\frac{\gamma^2}{\alpha} + \frac{\delta^2}{\beta} - \epsilon = 0$, alors :
- si $\alpha\beta > 0$, $\mathcal{C} = \{O'\}$;
- si $\alpha\beta < 0$, $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites distinctes et passant par O'.

ii. On note $\lambda = \frac{\gamma^2}{\alpha} + \frac{\delta^2}{\beta} - \epsilon$. Montrer que si $\frac{\gamma^2}{\alpha} + \frac{\delta^2}{\beta} - \epsilon \neq 0$, alors :
- si $\frac{\alpha}{\lambda} < 0$ et $\frac{\beta}{\lambda} < 0$, on a $\mathcal{C} = \emptyset$;
- si $\frac{\alpha}{\lambda} > 0$ et $\frac{\beta}{\lambda} > 0$, alors $\mathcal{C}$ est une ellipse, d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, où $a = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}$ et $b = \sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}$ (on peut avoir $a \leq b$.) ;
- si $\alpha\beta < 0$, alors $\mathcal{C}$ est une hyperbole, d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ou $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, où $a = \sqrt{|\frac{\lambda}{\alpha}|}$ et $b = \sqrt{|\frac{\lambda}{\beta}|}$.

2. Applications :
   (a) $4x^2 - 3y^2 + 8x + 12y - 4 = 0$;
   (b) $5x^2 + y^2 - 20x + 6y + 25 = 0$;
   (c) $x^2 - 6x - 4y + 5 = 0$;
   (d) $2x^2 + y^2 - 4x + 4y + 6 = 0$;
   (e) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$;
   (f) $4x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$;

Exercice 26

Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Pour tout $t \neq \{a, b\}$ on considère la courbe $\mathcal{C}_t$ d'équation :

$$\frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} = 1.$$

1. Quelle est la nature de $\mathcal{C}_t$?
2. Montrer que si $\mathcal{C}_t$ est une conique,ces foyers ne dépendent pas de t.
3. Montrer que si $\mathcal{C}_t$ et $\mathcal{C}_u$ se coupe en M, alors elles sont orthogonales (i.e. les tangeantes en M à $\mathcal{C}_t$ et à $\mathcal{C}_u$ sont orthogonales).

Exercice 27 (Equation polaire d'une conique ayant un foyer à l'origine)

Le plan affine euclidien $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé directe $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. On considère une conique $\mathcal{C}$ admettant O pour foyer et de directrice une droite Δ tel que :
- on note H la projection orthogonale de O sur la droite Δ avec $d = \mathrm{d}(O, \Delta) = OH$;
- on note $\mathcal{R}'(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ un autre r.o.d. où $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{I}}) = \varphi\,[2\pi]$;
- la droite δ admet l'équation cartésienne $x = d$ dans $\mathcal{R}'$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MH}$ dans $\mathcal{R}'$.
2. Donner l'équation polaire de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}'$.
3. En déduire l'équation polaire de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{R}$.