Chapitre 3 – Les polynômes – Exercices

I. Ciril, F. De Lepine, F. Duffaud, C. Peschard

Exercice 1
Dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$, décomposer les polynômes suivants en facteurs irréductibles.

1. $P(X) = X^3 - 3$.
2. $P(X) = X^{12} - 1$.
3. $P(X) = X^6 + 1$.
4. $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$.
5. $P(X) = X^4 + 5X^3 + 10X^2 + 12X + 8$ sachant que -2 est racine double de P.
6. $P(X) = X^9 + X^6 + X^3 + 1$.
7. $P(X) = (1 - X^2)^3 + 8X{\cdot}3$

Exercice 2
Soit $P = (X^2 - X + 1)^2 + 1$.

1. Vérifier que i est racine de P.
2. En déduire alors la décomposition en produit de facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{R}[X]$
3. Factoriser sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants en produit de polynômes irréductibles :
   (a) $P = X^4 + X^2 + 1$.
   (b) $Q = X^{2n} + 1$.
   (c) $R = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 + X^2 - X + 1$.
   (d) $S = X^5 - 13X^4 + 67X^3 - 171X^2 + 216X - 108$ (on cherchera les racines doubles de S).

Exercice 3
Soit le polynôme $P = X^8 + 2X^6 + 3X^4 + 2X^2 + 1$.

1. Montrer que j est racine de ce polynôme. Déterminer son ordre de multiplicité.
2. Quelle conséquence peut-on tirer de la parité de P ?
3. Décomposer P en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4
Soit P le polynôme $X^4 + 2X^2 + 1$. Déterminer les multiplicités des racines i et $-i$, de deux façons différentes : soit en décomposant P dans $\mathbb{C}[X]$, soit en utilisant le polynôme dérivé de P.

Exercice 5
Pour quelles valeurs de a le polynôme $(X+1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Exercice 6*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P(X) = (X+1)^n - (X-1)^n$.

1. Quel est le degré de P ?
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^* \ \prod_{k=1}^{p} \operatorname{cotan}(\frac{k\pi}{2p+1}) = \frac{1}{\sqrt{2p+1}}$.