TD n°5 : Suites - CORRECTION

Exercice 1.

Exercice 1

Étudier la nature des suites numériques définies par :

1. $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$;
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + i(1 + \frac{2n}{n^2+1})$;
3. $u_n = \frac{n}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$;
4. $u_n = \frac{\sin n^2 - \cos n^3}{n}$;
5. $u_n = \frac{n}{n+1} e^{i\frac{n\pi}{3}}$;
6. $u_n = \sqrt[n]{3 - \sin n^2}$;
7. $u_n = \frac{n^3 + 2^n}{3^n}$;
8. $u_n = (\cos n) \sin \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;
9. $u_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + \sqrt{n}}$;
10. $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$;
11. $u_n = n \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k}$;
12. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(\frac{1}{\sqrt{n+k}})$.
13. $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$;
14. $u_n = \frac{n!}{n^n}$;
15. $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$;
16. $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$;
17. $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

14°) $\boldsymbol{u_n = \frac{n!}{n^n}}$

- **<u>Démonstration 1</u> : La démonstration proposée sera utile pour l'étude des séries.**
  - **<u>Montrons que</u> la suite (u_n) converge.**

    Pour $n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\, n^n}{n!\ (n+1)^n (n+1)} = \frac{(n+1)!}{n!\ (n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1$$

La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite l avec $l \geq 0$

- <u>**On montre que**</u> **:** $\boxed{\lim_{+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1}$

Pour $n > 0$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{(n+1)}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\, n^n}{n!\ (n+1)^n (n+1)} = \frac{(n+1)!}{n!\ (n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = e^{-n\, ln\,(1+\frac{1}{n})} = e^{-\frac{ln\,(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}}$$

or $\lim_{+\infty} \frac{ln\,(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \to 0} \frac{ln\,(1+x) - ln\,(1+0)}{x-0} = ln'(1+0) = 1$

soit

$$\boxed{\lim_{+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} < 1}$$

- <u>**Montrons alors que**</u> **: la suite (u_n) tend vers 0.**

$\lim_{+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$ donc la suite étant positive

$$\exists N > 0 \text{ tel que } \forall n \geq N, \qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq k < 1$$

$$\forall n \geq N, \qquad u_{n+1} \leq k\, u_n < 1\, u_n$$

Par récurrence immédiate : $\forall n \geq N,\ 0 \leq u_n \leq k^{n-N}\, u_N$

or puisque $0 \leq k < 1$, on a $\lim_{n \to +\infty} k^{n-N} = 0$

Et donc par théorème d'encadrement, **la suite (u_n) tend vers 0.**

- <u>**Démonstration 2**</u> **bien plus rapide.**

$$0 \leq u_n = \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}{n^n} \leq \frac{1 \times 2 \times (n \times \dots \times n)}{n^n}$$

donc

$$0 \leq u_n \leq 2 \times \frac{n^{n-2}}{n^n} = \frac{2}{n^2}$$

Or $\lim_{+\infty} \frac{2}{n^2} = 0$ donc la suite (u_n) converge vers 0 (par théorème d'encadrement).

15°) $\boldsymbol{u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}}$

De façon évidente, $lim_{+\infty}\, u_n = lim_{+\infty}(-1)^n$

Or la suite $v_n = (-1)^n$ diverge car les deux suites extraites $(v_{2n})\ et\ (v_{2n+1})$ convergent vers des limites différentes 1 et -1.

Donc la suite $(\boldsymbol{u_n})$ diverge.

16°) $\boldsymbol{u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}}$

$$1 = \sqrt[n]{1} \le u_n \le \sqrt[n]{3}$$

or

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{3} = \lim_{n\to+\infty} 3^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ln 3} = 1$$

Donc par théorème d'encadrement, la suite $(\boldsymbol{u_n})$ converge vers 1.

17°) $\boldsymbol{u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}}$

$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n^2}}$$

donc

$$n^2 \times \frac{1}{\sqrt{2n^2}} \le u_n$$

or

$$\lim_{+\infty} n^2 \times \frac{1}{\sqrt{2n^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{+\infty} \frac{n^2}{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{+\infty} n = +\infty$$

La suite $(\boldsymbol{u_n})$ tend donc vers +∞