

Chapitre 4 – Suites numériques – Exercices

I. CIRIL, F. DE LEPINE, F. DUFFAUD, C. PESCHARD

Exercice 1

Étudier la nature des suites numériques définies par :

1. $u_n = n - \sqrt{n^2 - n}$;
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + i\left(1 + \frac{2n}{n^2+1}\right)$;
3. $u_n = \frac{n}{2} \sin \frac{n\pi}{2}$;
4. $u_n = \frac{\sin n^2 - \cos n^3}{n}$;
5. $u_n = \frac{n}{n+1} e^{i\frac{n\pi}{3}}$;
6. $u_n = \sqrt[n]{3 - \sin n^2}$;
7. $u_n = \frac{n^3+2^n}{3^n}$;
8. $u_n = (\cos n) \sin \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$;
9. $u_n = \frac{n^2+(-1)^n}{n^2+\sqrt{n}}$;
10. $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$;
11. $u_n = n \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n^2+k}$;
12. $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{n+k}}\right)$.
13. $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$;
14. $u_n = \frac{n!}{n^n}$;
15. $u_n = (-1)^n \frac{n+1}{n}$;
16. $u_n = \sqrt[n]{2 + (-1)^n}$;
17. $u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Exercice 2

Montrer que (u_n) converge ssi $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent (leurs limites n'étant pas nécessairement égales).

Exercice 3

Les noncs suivants sont-ils vrais ou faux ?

1. Si une suite positive est non majorée, elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite d'entiers converge, elle est stationnaire.
3. Si une suite a un nombre fini de valeurs, elle converge si et seulement si elle est stationnaire.
4. Une suite est convergente si et seulement si elle est bornée.
5. Si une suite n'est pas majorée, elle est minorée.

Exercice 4

1. Déterminer les trois termes consécutifs x, y et z d'une suite arithmétique tels que :

$$x + y + z = 12 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 120.$$

2. Déterminer les trois termes consécutifs x, y et z d'une suite géométrique tels que :

$$x + y + z = \frac{49}{5} \quad \text{et} \quad xyz = 27.$$

Exercice 5

Soit la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

1. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle arithmétique, géométrique ?
2. Justifier que si quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 1$, il en est de même de u_{n+1} . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}.$$

3. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique.
4. En déduire u_n en fonction de n .

Exercice 6

Soit la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 6 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

On définit une suite réelle $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir de la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$v_n = u_n - 3.$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0 .
2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n .
3. En déduire $\lim_n v_n$ et $\lim_n u_n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$S_n = \sum_{k=0}^n v_k \quad \text{et} \quad \Sigma_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Donner l'expression de S_n et Σ_n en fonction de n .

5. On constate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est strictement positif et on pose :

$$w_n = \ln(v_n).$$

Montrer que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme w_0 .

6. Exprimer w_n en fonction de n .

7. Pour quelle valeur de n a-t-on : $w_n = -\ln(27^3) - \ln 9$?

Exercice 7

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad u_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}, \quad v_n = S_n - 2\sqrt{n}.$$

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leq \sqrt{n} + \sqrt{n-1}.$$

2. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2\sqrt{n+1} - 2 \leq S_n.$$

3. En déduire que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent.

Exercice 8

Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 2}$ et $(v_n)_{n \geq 2}$ définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2(k+1)^2} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{3n^2},$$

sont adjacentes.

Exercice 9

Soient a_0 et b_0 deux réels fixés. On définit par récurrence les suites (a_n) et (b_n) par $a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}$ et $b_{n+1} = \frac{a_n + 2b_n}{3}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.

2. En calculant $a_n + b_n$, montrer qu'elles convergent vers $\frac{a_0 + b_0}{2}$.