

Chapitre 7 – Fonctions usuelles – Exercices

I. CIRIL, F. DE LEPINE, F. DUFFAUD, C. PESCHARD

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes :

1. $\arctan(2x) + \arctan x = \frac{\pi}{4}$.
2. $\arcsin(2x) - \arcsin(x\sqrt{3}) = \arcsin(x)$.
3. $\arctan(x) + \arctan(\sqrt{3}x) = \frac{7\pi}{12}$.

Exercice 2

Soient les fonctions $f : x \mapsto \arcsin(\sin x)$ et $g : x \mapsto \arctan \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

1. Simplifier les expressions de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Construire les graphes de f et g .

Exercice 3

Étudier la fonction :

$$\phi : x \rightarrow \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} + \arccos \frac{2x}{1+x^2}.$$

Exercice 4

Donner une expression plus simple de :

$$y = \operatorname{argch} \sqrt{\frac{1+\operatorname{ch} x}{2}}; \quad y = \operatorname{argsh}(2x\sqrt{1+x^2}); \quad y = \operatorname{argth} \frac{x^2-1}{x^2+1};$$

$$y = \operatorname{Argth} \frac{x^2-1}{x^2+1}.$$

Exercice 5

Calculer pour $(n, a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}^2$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}(a+bk), \quad \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(a+bk).$$

Exercice 6

Soit $a \in]1; +1[$. On considère la fonction f donnée par :

$$f(x) = \ln(\cosh(x)) - ax.$$

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

1. Déterminer le domaine de définition D_f ; de continuité C_f et de dérivabilité Der_f de f .

2. Étudier les variations de f .
3. Démontrer que \mathcal{C}_f possède une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$; asymptote dont on précisera la position par rapport à la courbe \mathcal{C}_f .
4. Étudier la convexité de f .
5. Tracer la courbe de f pour $a = 2$.

Exercice 7

On pose pour tout x réel :

$$f(x) = \operatorname{argth} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right).$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f ; de dérivabilité Der_f de f ; puis calculer f' .
2. En déduire une expression "simple" de f . Puis tracer la courbe de f .

Exercice 8

Étudier la fonction f donnée par :

$$f(x) = \arcsin (\operatorname{argsinh}(x)).$$