Math93.com

Notion de fonction (élève)

Seconde

Remarque

Pour avoir les termes en anglais : www.math93.com

I. Notion de fonction

I.1 Approche historique

Une étude complète sur le site : www.math93.com/...histoire-de-la-notion-de-fonction

Pour résumer cependant :

Remarque historique

- Jusqu'au 17ème siècle, la notion de fonction n'est pas définie avec rigueur, le concept reste assez vague ;
- Le **terme de fonction**
  - Le terme a été introduit par le mathématicien allemand LEIBNIZ Gottfried Wilhelm (1646-1716) dans un cadre géométrique. Il désigne par ce terme des grandeurs géométriques dépendant d'autres grandeurs géométriques ;
  - C'est Leibniz (1646-1716) qui utilise le mot fonction pour la première fois en mathématiques en 1673, et J.Bernouilli (1654-1705) en donne une première définition.
- **La notation**.
  - BERNOULLI Jean (1667-1748) propose **la notation : $\boldsymbol{\Phi x}$** ;
  - Le symbole $f(x)$ pour désigner une fonction de la variable x, voit sa première utilisation avec Leonhard EULER (1707-1783) en 1734 dans *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*.
- **La définition actuelle (19e siècle)**
  Le mathématicien allemand DIRICHLET Gustav Peter Lejeune (1805-1859), en introduisant la fonction discontinue partout, caractéristique des irrationnels (qui prend la valeur 0 si x est rationnel et 1 sinon), définit explicitement la fonction comme nous la définissons aujourd'hui ;
- **Les premières "fonctions" (antiquité)**
  Cependant, l'idée de relation entre les quantités, prend naissance avec les mathématiques elles-mêmes et donc chez les mathématiciens babyloniens et grecs.
  - En acoustique, les mathématiciens de la fraternité pythagoricienne au 6ème siècle av. J.-C., recherchèrent des relations entre la hauteur des sons émis par des cordes pincées et la longueur de ces cordes ;
  - En astronomie, les mathématiciens grecs d'Alexandrie dressent des tables donnant la longueurs des cordes de cercles de rayon fixé, ces sont les fameuses premières tables de sinus que l'on peut observer dans l'Almageste de PTOLÉMÉE Claude (2ème siècle).

I.2 Définitions

Soit D une partie de $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres dits réels.

Définition 1 (Fonction (*fonction, map, mapping in english*))

Une fonction notée f, définie sur un ensemble D est une relation qui, à un nombre de l'ensemble D, associe un unique nombre noté $f(x)$, qui se lit : « f de x » (« f *of* x *in english* »).
On note ainsi :

$$\left\{\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}\right.$$

Remarque

Ne pas confondre f et $f(x)$.

$$x \xrightarrow{f} f(x)$$

- f désigne la fonction, la machine, le procédé (la notation vient du mathématicien Leonhard Euler en 1734).
- $f(x)$ est l'image de x par la fonction f, c'est un nombre.

Définition 2 (L'image (*image in english*) et Un antécédent (*pre-image in english*))

- Ensemble de définition de f : *(the domain or set of departure in english)*
  L'ensemble D est l'**ensemble de définition de** $\boldsymbol{f}$, on le note D_f.
  C'est l'ensemble des valeurs que l'on peut choisir comme nombre de départ.
- L'Image : (*image in english*)
  Le nombre $f(x)$ est **l'image** de x par f :

$$x \longmapsto f(x) = \text{Image de } x \text{ par } f$$

- UN Antécédent : (*pre-image , less frequently : counterimage or inverse image*)

$$a \xrightarrow{f} b$$

  Le nombre a est **un antécédent** (il peut y en avoir d'autres) de b par f.
- Pour résumer :

$$\boxed{\text{UN antécédent} \longmapsto \text{L'Image}}$$

Exemple

Associer à un nombre entier naturel son double c'est définir la fonction f qui a tout entier x, associe l'image $2 \times x$ soit :

$$f : \begin{cases} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ x & \longmapsto & f(x) = 2 \times x \end{cases}$$

On a alors pour $x = 5$ par exemple :

$$5 \longmapsto f(5) = 10$$

Donc on a :

- $\cdots\cdots$ est l'image de $\cdots\cdots$ par la fonction f .
- et $\cdots\cdots$ est un antécédent de $\cdots\cdots$ par la fonction f. Dans ce cas, c'est le seul antécédent de $\cdots\cdots$ par f.

Exemple

Associer à un nombre quelconque (donc un réel) son carré moins 1 c'est définir la fonction g qui a tout entier x, associe l'image $x^2 - 1$ soit :

$$g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) = x^2 - 1 \end{cases}$$

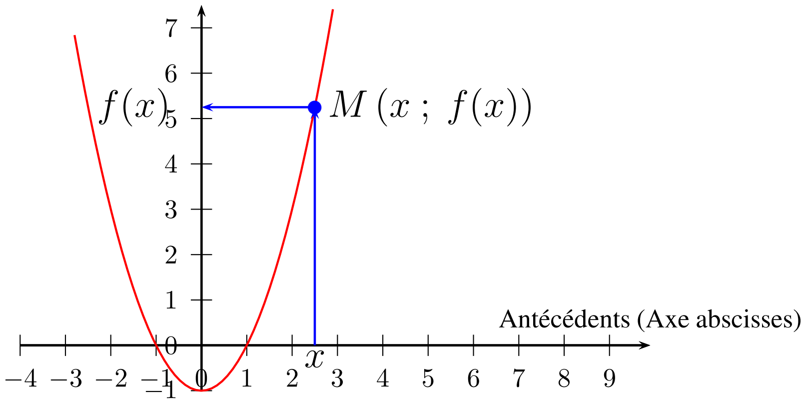
On a alors pour $x = 5$ par exemple on a $g(5) = \cdots\cdots\cdots$ soit :

$$5 \longmapsto g(5) = \cdots\cdots$$

- ....
- ....
- ....
  ....
  ....

II. Plusieurs façons de définir une fonction

II.1 Exemple de fonction définie graphiquement

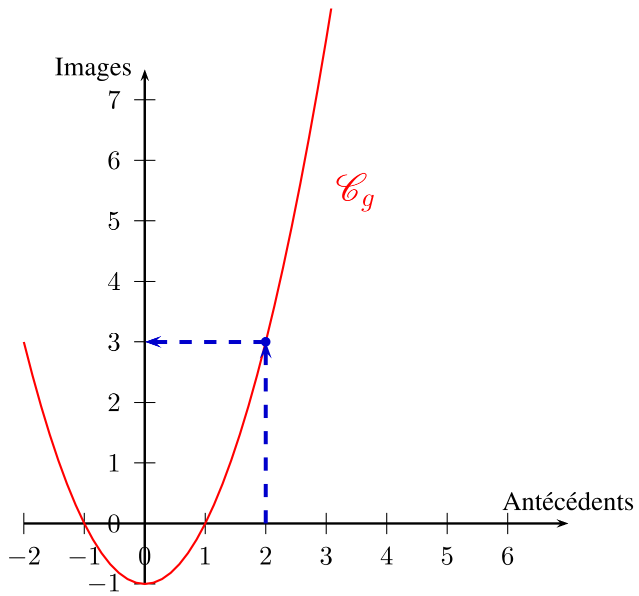


Définition 3 (Courbe représentative)

Soit un repère du plan.
On appelle courbe représentative de la fonction f, l'ensemble des points M de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$.

$$\mathscr{C}_f = \{M\ (x\ ;\ f(x))\ , x \in D_f\}$$

Lecture d'une image

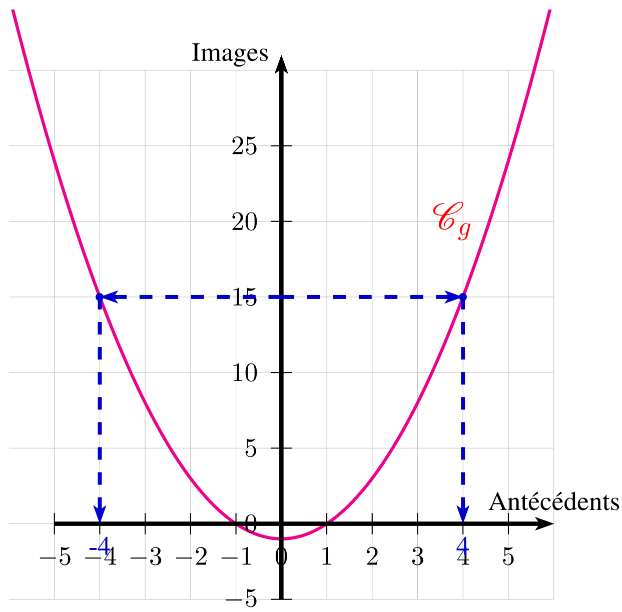


L'image de 2 par la fonction g est 3.

Avec la fonction g de l'exemple 2, on retrouve ce résultat puisque si la fonction g est définie par $g(x) = x^2 - 1$ alors on a :

$$g(2) = 2^2 - 1 = 3$$

Lecture d'antécédents éventuels



Par lecture graphique, les antécédents de 15 par la fonction g sont les nombres -4 et 4.

Avec la fonction g de l'exemple 2, on retrouve ce résultat puisque si la fonction g est définie par $g(x) = x^2 - 1$ alors on a :

$$\begin{cases} g(4) = 4^2 - 1 = 15 \\ g(-4) = (-4)^2 - 1 = 15 \end{cases}$$

II.2 Exemple de fonction définie algébriquement

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x^2 - 1$$

Programme de calcul

- Choisir un nombre ;
- le mettre au carré ;
- soustraire 1 au résultat ;

On peut alors obtenir un tableau de valeurs :

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Image $g(x) = x^2 - 1$	3	1.25	0	-0.75	-1	-0.75	0	1.25	3	5.25	8

II.3 Exemple de fonction définie par un tableau de valeurs

x	-5	-4.5	-4	-3.5	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Image $g(x)$	24	19.25	15	11.25	8	5.25	3	1.25	0	-0.75	-1	-0.75	0	1.25	3	5.25	8

On peut donc lire que :

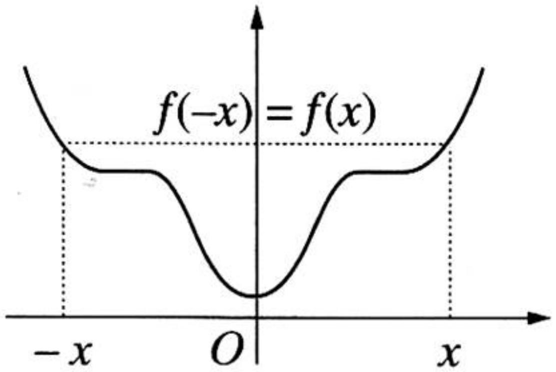
- $g(-4) = 15$ donc l'image de (-4) par g est 15.
- 0 a (au moins) deux antécédents par g qui sont (-1) et 1.

III. Parité (*Even and odd functions*)

III.1 Parité : définitions générales

Définition 4 (Fonctions paires)

1. **Définition** :
Un fonction f définie sur I est **paire** si :
   - Pour tout réel x et I, alors $(-x) \in I$;
   - et $f(-x) = f(x)$
2. **Propriété** :
Si on se place dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative d'une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées**.



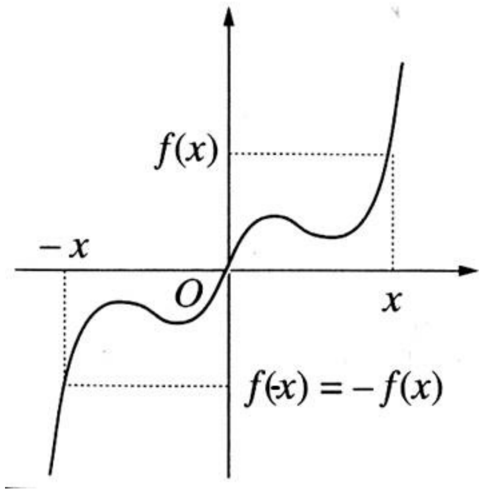
Définition 5 (Fonctions impaires)

1. **Définition** :
Un fonction f définie sur I est **impaire** si :
   - Pour tout réel x et I, alors $(-x) \in I$;
   - et $f(-x) = -f(x)$
2. **Propriété** :
Si on se place dans un repère orthogonal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, la courbe représentative d'une fonction impaire est **symétrique par rapport à l'origine O**.

Remarque
Pour toute fonction impaire f, on a

$$f(0) = 0$$

et donc la courbe représentative passe par l'origine du repère.
(*à démontrer en exercice*)



III.2 Intervalle centré en 0

Définition 6 (Intervalle centré en 0)

Un intervalle I est dit centré en 0 si pour tout réel x de I, le réel opposé $(-x)$ appartient aussi à I.
Une fonction paire ou impaire est toujours définie sur un tel intervalle.

Exemple
- ....
....
- ....
....

IV. Suite (*sequence*)

Définition 7 (Suite)

Une suite numérique est une fonction dont le domaine de définition est $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$, par exemple $\mathbb{N}^*$.

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) = u_n \end{array}\right.$$

Par convention, on note souvent l'image de l'entier n par la suite u simplement u_n au lieu de $u(n)$.

V. Résolution graphique d'équations

V.1 Un peu d'histoire

Remarque historique

Des équations du premier et du second degré (où les coefficients sont des nombres donnés) sont déjà résolues avec une méthode générale par les Babyloniens vers 1700 av. J.C et peut être même plus tôt.
Pour les équations du 3ème degré, il faut attendre 1515 avec l'italien Scipio del Ferro (1465-1526) dont les papiers sont cependant perdus.
Puis ses compatriotes Tartaglia et Gérolamo Cardan (1501-1576) poursuivent ses travaux.
Pour celles du 4ème degré, c'est Ludovico Ferrari (Bologne 1522-1565, en 1540), un élève de Cardan, a qui on doit une méthode habile de résolution.
Au delà, il n'y a pas de méthode générale ce qui prouve le génial Evariste Galois.

=> Compléments sur la page : http://www.math93.com/...les équations

V.2 Définition et notation

Définition 8 (Résoudre une équation sur I)

Résoudre une équation donnée, dans un ensemble de nombres I (réels ou pas),
c'est trouver <u>tous les nombres de l'ensemble I</u> qui vérifient l'égalité.

Exemple

L'équation (E_1) définie par $x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $I = \mathbb{Q}$ mais elle en a deux dans $I' = \mathbb{R}$ qui sont $-\sqrt{2}$; ; $\sqrt{2}$.
On note souvent S l'ensemble des solutions soit ici

$$S_{(E_1)} = \left\{-\sqrt{2}\,;\,;\sqrt{2}\right\}$$

On peut aussi rencontrer une autre notation indicée qui rend compte de l'ensemble sur lequel l'équation est résolue :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\sqrt{2}\,;\,;\sqrt{2}\right\}$$

V.3 Résolution graphique

On ne prétend pas résoudre une équation par cette méthode, on reste au stade de la conjecture.

V.3.1 Méthode

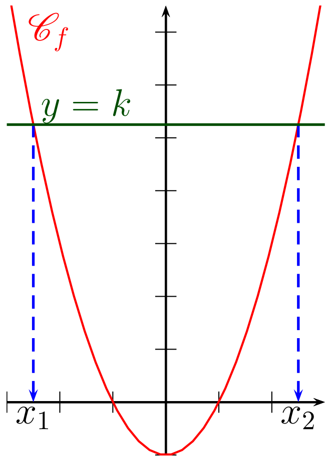
Soit k un réel quelconque, f et g sont des fonctions définies sur I.

Définition 9 (L'équation (E_1) définie par $f(x) = k$)

Résoudre graphiquement sur l'ensemble I l'équation (E_1) définie par

$$f(x) = k$$

- C'est trouver (si elles existent) les **abscisses des points d'intersection** de la courbe représentative de la fonction f avec la droite horizontale d'équation $y = k$.
- C'est aussi trouver graphiquement les **antécédents par f** du réel k.
- C'est aussi trouver graphiquement les **abscisses de tous les points** de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui ont une ordonnée égale à k.



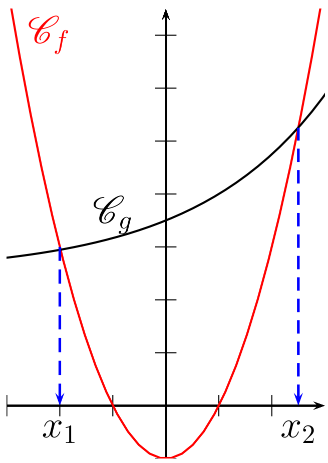
Ici par exemple, $S = \{x_1 \ ; \ x_2\}$ mais si il n'y a pas de solution, on peut noter $S = \varnothing$ (ensemble vide).

Définition 10 (L'équation (E_2) définie par $f(x) = g(x)$)

Résoudre graphiquement sur l'ensemble I l'équation (E_2) définie par

$$f(x) = g(x)$$

- C'est trouver (si elles existent) les **abscisses des points d'intersection** de $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f avec $\mathscr{C}_g$, celle de g.



V.3.2 Utilisation de la calculatrice

La calculatrice ou plus généralement, tout logiciel traceur de courbes (comme Géogébra), permet facilement d'avoir **une approximation** des éventuelles solutions d'une équation.
On ne prétend pas résoudre une équation par cette méthode, on reste au stade de la conjecture.

=> Voir pour cela la **fiche méthode** disponible sur la page http://www.math93.com.

VI. Fonction définie par morceaux (*piecewise-defined function*)

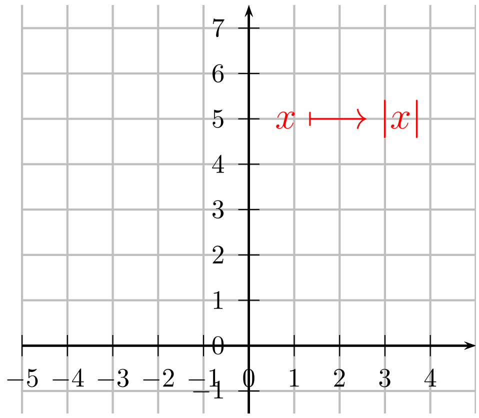
VI.1 Une fonction définie par morceaux et Géogébra

Exercice 1

La fonction valeur absolue est une fonction définie par morceau. On rappelle que :

$$|x| = \begin{cases} x \ , \ \text{si } \ x \leqslant 0 \\ -x \ , \ \text{si } \ x < 0 \end{cases}$$

On peut donc facilement construire sa courbe représentative dans le repère ci-contre :



Exercice 2

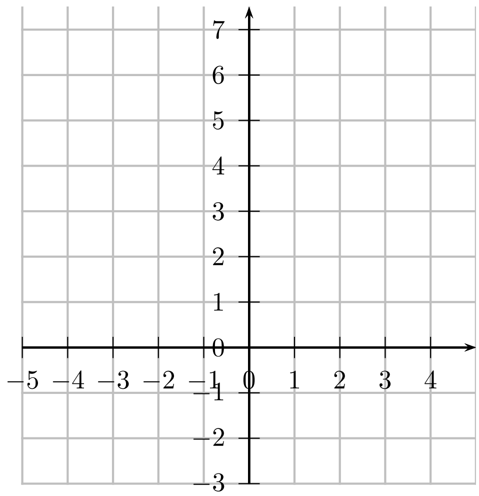
1. Écrire un programme utilisant une fonction qui permet de calculer l'image d'une valeur demandée, par la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_{20} : x \longmapsto f_{20}(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } \ x < 0 \\ x^2 & \text{si } \ x \geqslant 0 \end{cases}$$

```
def f20(x):
    if ...
        return ...
    else:
        return ...
```

2. Compléter alors la tableau de valeurs suivant et tracer $\mathscr{C}_f$ dans le repère ci-contre.

x	-3	-1	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$
$f_{20}(x)$								



VI.2 Des photocopies

Exercice 3

Un magasin de reprographie propose un tarif dégressif. Les 20 premières photocopies sont facturées à 10 centimes et les suivantes à 8 centimes.

1. Calculer à la main le coût de 15 puis de 30 photocopies.

2. Écrire un algorithme utilisant une fonction qui renvoie le montant de la facture en euros pour un nombre de photocopies donné.

3. Écrire l'expression de cette fonction en fonction des valeurs de x.

$$facture : n \longmapsto facture(n) = \begin{cases} \dots\dots\dots\dots & \text{si } \ \dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots & \text{si } \ \dots\dots \end{cases}$$

Fin du cours