Math93.com

Nombres et calculs

Seconde

I. Les ensembles de nombres

I.1 Les entiers

I.1.1 Définitions

Définition 1 (Les entiers naturels)

Un nombre **entier naturel** est un nombre (positif) qui peut s'écrire sans virgule.
L'ensemble des entiers naturels est noté $\mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3 \cdots\}$$

Définition 2 (Les entiers relatifs)

Un **entier relatif** se présente comme un entier naturel muni d'un signe positif ou négatif qui indique sa position par rapport à zéro sur un axe orienté.
L'entier zéro lui-même est donc le seul nombre à la fois positif et négatif
L'ensemble des entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - 3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ +1\ ;\ +2\ ;\ +3 \cdots\}$$

Remarque : On a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Remarque historique

Consultez la page : www.math93/.../les-symboles

- **Origine du symbole $\mathbb{N}$, pour les entiers naturels (de *naturale* en italien)**
  Le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858-1932) définit l'ensemble des entiers naturels non nuls par des axiomes qui portent aujourd'hui son nom et le note N. Il deviendra ensuite $\mathbb{N}$ pour désigner l'ensemble des nombres naturels.
- **L'expression <u>nombre naturel</u>**
  Cette expression apparaît vers 1675, à l'époque où les nombres négatifs sont enfin acceptés.
- **$\mathbb{Z}$: Origine du symbole $\mathbb{Z}$, Ensemble des nombres relatifs**.
  Cette notation viendrait en fait du groupe BOURBAKI dans Algèbre, Chapitre 1. (1969) La lettre viendrait de *Zahl* (nombre) et *zahlen* (compter) de l'allemand.

I.2 Les décimaux

I.2.1 Définitions

Définition 3 (Les décimaux)

Un **nombre décimal** est un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction décimale, c'est à dire une fraction dont le dénominateur est de la forme 10^n avec n entier naturel. L'ensemble des entiers décimaux est noté $\mathbb{D}$.

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n}, \quad a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Exemple

$$2,5 = \frac{25}{10^1} \in \mathbb{D}\ ;\ \frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$$

I.2.2 Histoire

La notation $\mathbb{D}$ est française et vient du groupe BOURBAKI en 1970

I.2.3 Une preuve que $\frac{1}{3}$ n'est pas un décimal

Preuve

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

I.3 Les rationnels

I.3.1 Définitions

Définition 4 (Les rationnels)

Un **nombre rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous forme de fraction, c'est à dire comme le quotient de deux entiers relatifs. L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b}, \quad a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \backslash \{0\} \right\}$$

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ c'est à dire l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs sauf zéro soit $\mathbb{Z} = \{\cdots - 3\ ;\ -2\ ;\ -1\ ; +1\ ;\ +2\ ;\ +3 \cdots\}$

Exemple

$$2,5 = \frac{25}{10} \in \mathbb{Q}\ ;\ \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}\ ;\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\ ;\ \pi \notin \mathbb{Q}$$

Nous allons revenir sur ces exemples.

Remarque historique

Consultez la page : www.math93/.../les-symboles

- $\mathbb{Q}$: **Origine du symbole $\mathbb{Q}$, ensemble des nombres rationnels**.
  Le mathématicien italien PEANO Giuseppe (1858-1932) aurait utilisé la lettre $\mathbb{Q}$, première lettre de quotiente mais, selon plusieurs sources, pas pour désigner l'ensemble des rationnels. Cette notation viendrait en fait du groupe BOURBAKI dans Algèbre, Chapitre 1. (1969)

- **Le mot rationnel**
  Le mot **rationnel** apparaît en mathématiques vers 1550 (en même temps que le terme irrationnel). Un nombre irrationnel est aussi appelé à l'époque nombre sourd. Il semblerait que cela vienne d'une mauvaise traduction des mots rationnel et irrationnel en arabe à l'époque du célèbre mathématicien perse KHWARIZMI Mohammed Ibn musa AL (khiva 788 - Bagdad 850).

I.4 Les réels

I.4.1 Définitions

Donner une définition rigoureuse des nombres réels est chose difficile sans le secondaire. Disons simplement que l'ensemble de tous les nombres connus en classe de seconde est appelé ensemble des réels.

Définition 5 (Les réels)

Un réel est un nombre qui peut être représenté par une *partie entière* et une *liste finie ou infinie de décimales*. Cette "définition" s'applique donc aux nombres rationnels, dont les décimales se répètent de façon périodique à partir d'un certain rang, mais aussi à d'autres nombres dits irrationnels, tels $\sqrt{2}$, π.
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$ et l'on a $\boxed{\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$.

I.4.2 Histoire

Les origines de l'utilisation de la lettre R puis $\mathbb{R}$ pour désigner l'ensemble des réels sont multiples. Contrairement à ce que l'on lit souvent, CAJORI affirme que DEDEKIND Julius Wilhelm Richard (1831-1916) utilise R pour les rationnels et le R gothique, , pour les réels dans *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (1872).

I.4.3 Les irrationnels

Définition 6 (Les irrationnels)

Un **nombre irrationnel** est un nombre réel qui n'est pas rationnel.

- Le nombre $\sqrt{2}$ est un irrationnel, il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ ce que l'on note : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Remarque historique

Contrairement à une idée reçue, rien n'indique avec certitude que la découverte de l'incommensurabilité provienne de l'étude de la diagonale et de l'un des côtés d'un carré. La découverte de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est parfois attribuée au mathématicien Hippase de Métaponte pour ses travaux sur la section d'extrême et de moyenne raison, maintenant appelée nombre d'or. On admet généralement qu'elle est l'ouvre d'un Pythagoricien durant la première moitié du Ve siècle av. J.-C. Cette découverte ouvrit probablement une crise profonde chez les mathématiciens et les philosophes grecs. Une légende, plusieurs fois rapportée, indique qu'un pythagoricien, parfois nommé Hippase, périt noyé pour avoir révélé aux profanes l'incommensurabilité. Cette légende indiquerait que la découverte est bien pythagoricienne et qu'elle faisait l'objet d'un tabou.

La première démonstration date d'avant -410. Le livre X des Éléments d'Euclide est consacré à une classification des grandeurs irrationnelles.

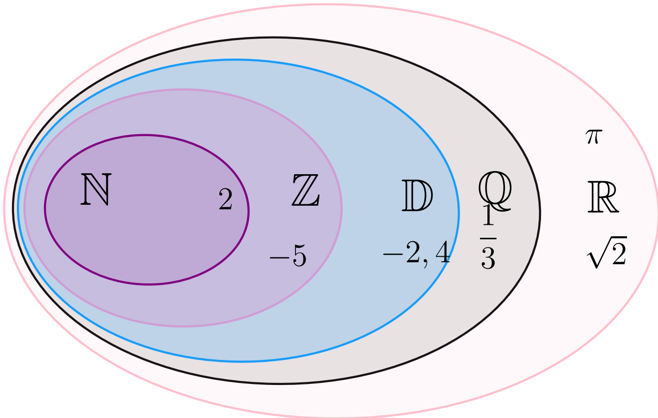
- Le nombre π est un irrationnel, il n'appartient pas à $\mathbb{Q}$ ce que l'on note : $\pi \notin \mathbb{Q}$.

Remarque historique

Le mathématicien Jean-Henri Lambert (1728-1777) démontra en 1761 que π ne pouvait être rationnel.

I.5 Diagrammes de Venn

I.5.1 Les ensembles de nombres



I.5.2 Histoire

C'est le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (Bâle 1707 - Saint-Pétersbourg 1783) qui eut le premier l'idée de représenter géométriquement les attributs (ou propriétés) sous forme de cercles.
Un siècle plus tard, John Venn (1834-1923) reprend les idées d'Euler en y apportant quelques modifications.

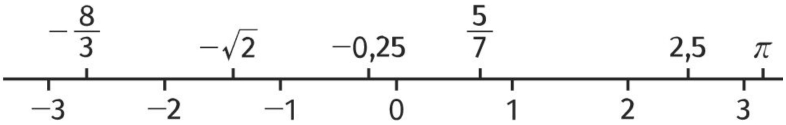
I.6 Compléments

- **Privé de zéro**.
  On a vu que l'ensemble des entiers relatifs non nul se note $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ou plus simplement $\mathbb{Z}^*$. Cette notation est valable pour tous les autres ensembles. Par exemple, l'ensemble des réels non nuls se note $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou plus simplement $\mathbb{R}^*$.
- **Positifs ou négatifs**.
  Pour indiquer que l'on considère les termes positifs (respectivement négatifs) d'un ensemble on place un signe + (respectivement -) en indice. Par exemple l'ensemble des réels positifs ou nul se note $\mathbb{R}_+$. On peut combiner les deux notations et donc l'ensemble des réels strictement négatifs se note $\mathbb{R}^*_-$

I.7 Représentation sur la droite numérique

Propriété 1

Tout nombre réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique.



II. Les intervalles

II.1 Notations des intervalles

Un intervalle de $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres réels compris entre deux réels a et b où a est inférieur ou égal à b.
Selon que l'on prenne (ou non) le nombre a, on dira que l'intervalle est fermé (ouvert) du côté de a.
Un intervalle peut se représenter à l'aide d'un segment, d'une droite ou d'une demi-droite sur un axe.

L'intervalle	Inéquation associée	Représentation	Ouvert ou fermé ?
$[a\ ;\ b]$	$a \leqslant x \leqslant b$		dit **fermé borné** ou **segment**
$]a\ ;\ b]$	$a < x \leqslant b$		dit **semi-ouvert** ou **semi-fermé**
$[a\ ;\ b[$	$a \leqslant x < b$		dit **semi-ouvert** ou **semi-fermé**
$]a\ ;\ b[$	$a < x < b$		dit **ouvert**

À ces intervalles se sont ajoutés les ensembles des réels inférieurs à une valeur, ou supérieurs à une valeur.

L'intervalle	Inéquation associée	Représentation	Ouvert ou fermé ?
$[a\ ;\ +\infty[$	$a \leqslant x$		**intervalle fermé**
$]a\ ;\ +\infty[$	$a < x$		**intervalle ouvert**
$]-\infty\ ;\ b[$	$x < b$		**intervalle ouvert**
$]-\infty\ ;\ b]$	$x \leqslant b$		**intervalle fermé**

Se sont ajoutés les intervalles particuliers :

- L'ensemble vide $\varnothing$ (à la fois ouvert et fermé), qui correspond au cas où $a = b$ dans $]a\ ;\ b[$;
- $\{a\} = [a; a]$ (fermé et non ouvert) , qui correspond au cas où $a = b$ dans $[a\ ;\ b]$;
- $\mathbb{R} =]-\infty\ ;\ +\infty[$ (à la fois ouvert et fermé).

On définit donc dans $\mathbb{R}$ neuf types d'intervalles.

Remarque historique

Le symbole ∞ pour représenter l'infini a été introduit par le mathématicien anglais John Wallis en 1655.

II.2 Intersection et réunion

Définition 7

Soient A et B deux ensembles.
L'intersection de A et B, notée $A \cap B$, est l'ensemble de tous les éléments appartenant à la fois à A et B.
La réunion de A et B, notée $A \cup B$, est l'ensemble de tous les éléments appartenant à A ou à B.

Exemple

On note A l'ensemble des réels supérieurs ou égaux à 3 et B l'intervalle $[-5\,;\,10[$.

$$A = \{x \in \mathbb{R}\,,\; x \geqslant 3\} = [3\,;\,+\infty[\quad \text{et} \quad B = [-5\,;\,10[$$

Déterminer $A \cap B$ et $A \cup B$.

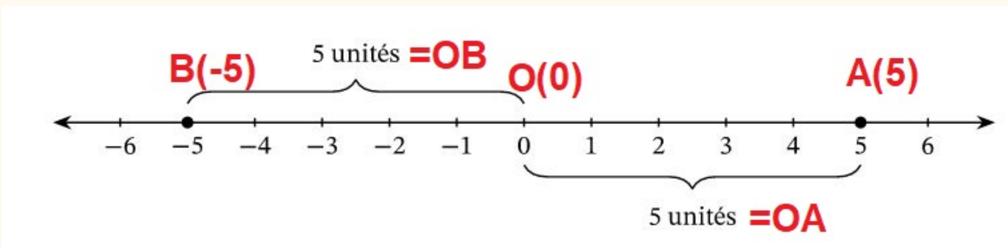
III. La valeur absolue (ou distance à zéro)

Définition 8

On considère, sur une droite graduée d'origine O, le point M d'abscisse x. On appelle **valeur absolue** de x et on note $|x|$ la distance OM.

Exemple

$$|5| = OA = 5 \quad \text{et} \quad |-5| = OB = 5$$



Propriété 2

Soit x un nombre réel.

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{, si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{, si} \quad x < 0 \end{cases}}$$

Exemple

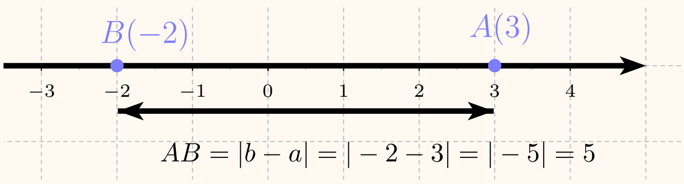
Comment écrire sans le symbole valeur absolue ? :

- $|1-\pi| =$ ....
- $|1,415-\sqrt{2}| =$ ....

Définition 9

Soit a et b deux réels d'images respectives A et B sur une droite graduée.
La distance entre a et b est la distance $AB = |b-a|$.

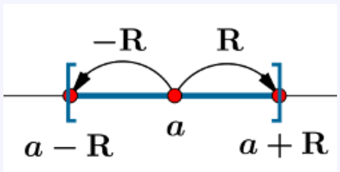
Exemple



Propriété 3

Soit a un nombre réel et R un réel strictement positif.
Dire que x appartient à l'intervalle $[a-R\,;\,a+R]$ équivaut à dire que $|x-a| \leqslant R$.

$$\boxed{x \in [a-R\,;\,a+R] \iff |x-a| \leqslant R \iff a-R \leqslant x \leqslant a+R \iff -R \leqslant x-a \leqslant +R}$$



On dit que a est le centre de l'intervalle $[a-r; a+r]$ et que r en est le rayon.

Définition 10

Soit x, a et b trois réels.
$a \leqslant x \leqslant b$ s'appelle un **encadrement** du réel x. L'**amplitude** de cet encadrement est $b-a$.

Exemple

....
....
....
....
....

Définition 11

Soit x et a deux réels et n un entier naturel.
Dire que a est une **valeur approchée** de x à 10^{-n} signifie que $|x-a| \leqslant 10^{-n}$.

Fin du cours