



### I. Droites et vecteurs directeurs

#### I.1 Vecteurs directeurs d'une droite

##### Définition 1

Dire qu'un vecteur non nul  $\vec{u}$  est un **vecteur directeur** d'une droite  $d$  signifie qu'il existe deux points distincts  $A$  et  $B$  de  $d$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

On dit alors que la direction de la droite  $d$  est celle du vecteur  $\vec{u}$ .

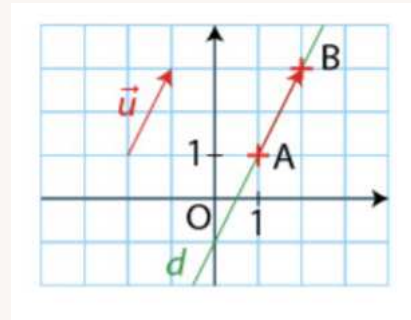


##### Exemple

Dans le repère orthonormé ci-contre, le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite  $d$ .

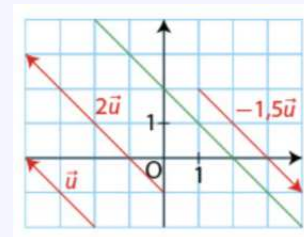
En effet, les points  $A(1; 1)$  et  $B(2; 3)$  appartiennent à  $d$  et les coordonnées du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  sont

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



##### Propriété 1

Une droite a une infinité de vecteurs directeurs : si  $\vec{u}$  est l'un d'entre-eux, tous les vecteurs colinéaires à  $\vec{u}$  sont aussi des vecteurs directeurs de cette droite.

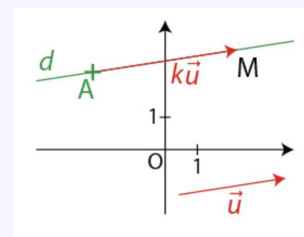


#### I.2 Droite définie par un point et un vecteur directeur

##### Propriété 2

$A$  est un point du plan et  $\vec{u}$  est un vecteur non nul.  
L'ensemble des points  $M$  du plan tels que  $\overrightarrow{AM} = k\vec{u}$ , quand  $k$  décrit  $\mathbb{R}$ , est la droite qui passe par le point  $A$  et qui a  $\vec{u}$  pour vecteur directeur.  
Si on note  $(d)$  cette droite on a :

$$(d) = \left\{ M, \overrightarrow{AM} = k\vec{u} \right\}$$



## I.3 Droites parallèles et droites sécantes

## Propriété 3

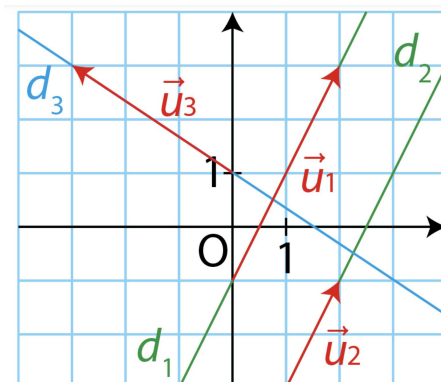
$d_1$  et  $d_2$  sont deux droites dirigées respectivement par les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$ .

- $d_1$  et  $d_2$  sont **parallèles** si et seulement si les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont **colinéaires**.
- Et donc,  $d_1$  et  $d_2$  sont **sécantes** si et seulement si les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont **ne sont pas colinéaires**.



## Exercice 1

Étudier les positions relatives des droites  $d_1$ ,  $d_2$  et  $d_3$  données ci-contre.



## Corrigé

- Par lecture graphique, les vecteurs directeurs des droites  $(d_1)$ ,  $(d_2)$  et  $(d_3)$  sont respectivement :

$$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} ; \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{u}_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

- Les vecteurs  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}_2$  sont **colinéaires** car  $\vec{u}_1 = 2\vec{u}_2$ . Donc les droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$  sont parallèles.
- Le vecteur  $\vec{u}_1$  n'est pas colinéaire au vecteur  $\vec{u}_3$  car :

$$\frac{-3}{1} \neq \frac{2}{2}$$

De ce fait les droites  $(d_1)$  et  $(d_3)$  sont sécantes.

- Et puisque les droites  $(d_1)$  et  $(d_2)$  sont parallèles et que les droites  $(d_1)$  et  $(d_3)$  sont sécantes, les droites  $(d_2)$  et  $(d_3)$  sont aussi sécantes.

## II. Équation réduite d'une droite

Le plan est muni d'un repère.

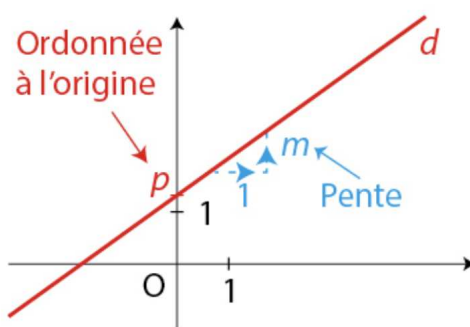
### II.1 Droites non parallèles à l'axe des ordonnées

**Propriété 4** (Équation réduite d'une droite :  $y = mx + p$ )

1. Toute droite ( $d$ ), sauf celles qui sont parallèles à l'axe des ordonnées, est la courbe représentative d'une fonction affine  $f$  définie par  $f(x) = mx + p$ .
2. Donc toute droite ( $d$ ), sauf celles qui sont parallèles à l'axe des ordonnées, est l'ensemble des points  $M(x ; y)$  du plan vérifiant  $y = mx + p$ , où  $m$  est le coefficient directeur ou pente (*slope*) de la fonction affine et  $p$  son ordonnée à l'origine (*y-intercept*).

$$(d) = \{M(x ; y) , y = mx + p\}$$

3. Pour toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées, l'égalité  $y = mx + p$  s'appelle l'**équation réduite** de la droite



#### Remarque

- Soit la droite ( $d$ ) d'équation réduite  $y = mx + p$ .
- Le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite ( $d$ ).
- Et si  $A(x_A ; y_A)$  et  $B(x_B ; y_B)$  sont deux points distincts de la droite ( $d$ ), alors le coefficient directeur est :

$$\begin{cases} A(x_A ; y_A) \\ B(x_B ; y_B) \end{cases} \implies m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\text{écart des } y}{\text{écart des } x}$$

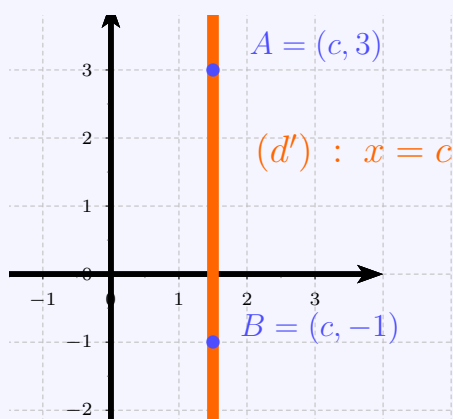
### II.2 Droites parallèles à l'axe des ordonnées

**Propriété 5**

- Toute droite ( $d'$ ) parallèle à l'axe des ordonnées est l'ensemble des points  $M(x ; y)$  vérifiant l'égalité  $x = c$  où  $c$  est l'abscisse commune à tous les points de la droite.

$$(d') = \{M(x ; y) , x = c\}$$

- Pour toute droite parallèle à l'axe des ordonnées, l'égalité  $x = c$  s'appelle l'**équation réduite** de la droite.
- Une telle droite n'a ni pente (ou une pente infinie !), ni ordonnée à l'origine.





A large rectangular area with a light blue background, a vertical blue line on the left side, and a grid of small dots for writing.

### IV. Positions relatives : Le lien avec les systèmes linéaires

On suppose que  $(a ; b) \neq (0 ; 0)$  et  $(a' ; b') \neq (0 ; 0)$  et on s'intéresse au système  $(S) \begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

Dans un repère orthonormé,  $ax + by + c = 0$  est une **équation cartésienne** d'une droite  $d$  et  $a'x + b'y + c' = 0$  est une **équation cartésienne** d'une droite  $d'$ .

Résoudre ce système, c'est donc déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de ces deux droites.

$\vec{u}(-b ; a)$  et  $\vec{v}(-b' ; a')$  sont les vecteurs directeurs respectifs de  $d$  et  $d'$ .

Le déterminant du vecteur  $\vec{u}$  et du vecteur  $\vec{v}$  est  $(-b)a' - (-b')a = ab' - a'b$ .

Il y a trois cas possibles pour l'ensemble  $\mathcal{S}$  des couples solutions du système  $(S)$ . Les voici.

$ab' - a'b \neq 0$	$ab' - a'b = 0$	
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.	
$d$ et $d'$ sont sécantes en un point $A(x_0 ; y_0)$ .	$d$ et $d'$ sont strictement parallèles.	$d$ et $d'$ sont confondues.
Le système $(S)$ a un seul couple solution : $(x_0 ; y_0)$ . $\mathcal{S} = \{(x_0 ; y_0)\}$	Le système $(S)$ n'a pas de couple solution. $\mathcal{S} = \emptyset$	Le système $(S)$ a une infinité de couples solutions. $\mathcal{S} = \left\{ \left( x ; -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \right) \right\}$ (avec $x \in \mathbb{R}$ )

**Propriété 8**

Deux droites du plan sont parallèles (ou confondues) si, et seulement si, leurs coefficients directeurs sont égaux.  
Remarque : Deux droites confondues sont parallèles.

