Math93.com

Étude de fonctions

Seconde

1 Fonctions polynôme du second degré

1.1 Définition

Définition 1

On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction, définie sur $\mathbb{R}$ de la forme :

$$f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = \boxed{f(x) = ax^2 + bx + c} \end{array} \right.$$

où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

1.2 Propriété

Propriété 1

Pour toute fonction polynôme de degré 2 de la forme $f : \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) = f(x) = ax^2 + bx + c \end{array} \right.$, il existe des réels α et β uniques tels que, pour tout réel x :

$$\boxed{f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{-b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) \end{array} \right.$$

Exemple

$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$	$f(x) = -3(x+1)^2 - 5$	$f(x) = (x+7)^2 - 10$	$f(x) = \dfrac{1}{3}x^2$
$\left\{ \begin{array}{l} a = 2 \\ \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} a = -3 \\ \alpha = -1 \\ \beta = -5 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ \alpha = -7 \\ \beta = -10 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} a = \dfrac{1}{3} \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array} \right.$

1.3 Propriété

Propriété 2

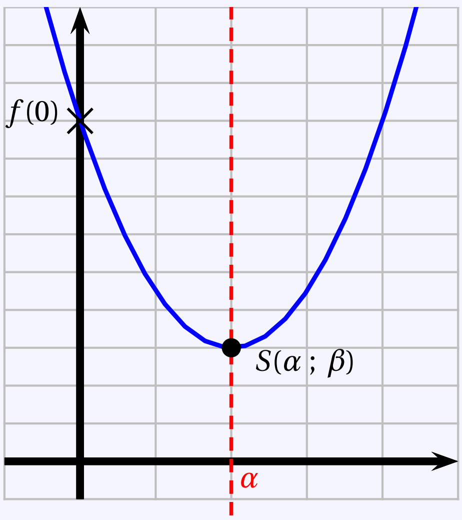
Les variations sur $\mathbb{R}$ d'une fonction polynôme de degré 2 sont de deux types selon le signe de a :

$$\boxed{f\ :\ x \longmapsto f(x) = ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)^2 + \beta} \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{-b}{2a} \\ \beta = f(\alpha) \end{cases}$$

Si $a > 0$

- f est décroissante puis croissante ;
- f atteint son **minimum β pour $x = \alpha = \dfrac{-b}{2a}$**.

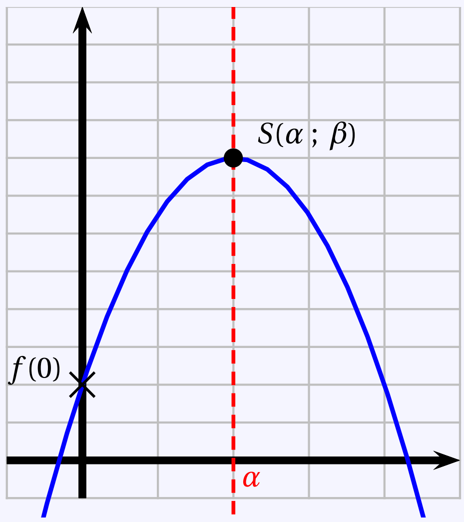
x	$-\infty$	$\alpha = \dfrac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	$+\infty$ ↘	β	↗ $+\infty$



Si $a < 0$

- f est croissante puis décroissante ;
- f atteint son **maximum β pour $x = \alpha = \dfrac{-b}{2a}$**.

x	$-\infty$	$\alpha = \dfrac{-b}{2a}$	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	β	↘ $-\infty$



Dans tous les cas :

- La courbe représentative de f, $\mathscr{C}_f$, est une **parabole** de **sommet $S(\alpha\ ;\ \beta)$** ;
- La courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite $D : x = \alpha$ comme axe de symétrie.
  L'équation de D s'écrit aussi $D : x = \dfrac{-b}{2a}$.

Remarque : Le terme parabole vient du grec *parabolê*, para = à côté et *ballein* = lancer, jeter. La parabole correspond à la trajectoire d'un projectile lancé hors la verticale, et retombant à terre. Le terme est d'Apollonius de Perge (v. 262-v. 190 av. J.-C.).