Math93.com

Expressions Algébriques, équations et systèmes

Seconde

Dans tout ce qui suit, a, b, c, d, k sont des réels.

I. Développements et factorisations (*to expand / to factorise*)

I.1 Définition

Définition 1

Développer une expression c'est l'écrire sous forme d'une <u>somme</u>.
Factoriser une expression c'est l'écrire sous forme d'un <u>produit</u>.

I.2 Propriété de distributivité (*Distributive property, simple and double*)

Proposition 1

Distributivité

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b$$

Double Distributivité

$$(a+b) \times (c+d) = a.c + a.d + b.c + b.d$$

$\xRightarrow{Developpement}$ et $\xLeftarrow[Factorisation]{}$

I.3 Identités remarquables (*binomial squares, no specific name in english*)

Proposition 2 (Identités remarquables)

$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$ $\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ $\boxed{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$

Preuve

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= (a+b)(a+b)\\ &= a^2 \underbrace{+ab+ba}_{2ab} + b^2\\ &= \underline{a^2+2ab+b^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a-b)(a-b)\\ &= a^2 \underbrace{-ab-ba}_{-2ab} + (-b)^2\\ &= \underline{a^2-2ab+b^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)(a-b) &= a^2 \underbrace{-ab+ba}_{0} - b^2\\ &= \underline{a^2-b^2}\end{aligned}$$

▷ *Faire les exercices 1 à 4 du TD*.

I.4 Factorisation

Un petit retour sur les différentes méthodes de factorisations.

- Méthodes de factorisation : lien vers le cours de 3e/seconde

▷ *Faire les exercices de la partie 2 du TD.*

I.5 Astuces et fourberies...

Remarque

- Ne pas confondre $\boxed{(3x)^2 = 3x \times 3x = 9x^2}$ et $\boxed{3x^2 = 3 \times x \times x = 3 \times (x^2)}$
- On a :
  - ✓ $\boxed{(-a-b)^2 = (a+b)^2}$
    car $(-a-b)^2 = \Big(-1 \times (a+b)\Big)^2 = (-1)^2 \times (a+b)^2 = (a+b)^2$.
  - ✓ $\boxed{(-a+b)^2 = (a-b)^2 = (b-a)^2}$
    car $(-a+b)^2 = \Big(-1 \times (a-b)\Big)^2 = (-1)^2 \times (a-b)^2 = (a-b)^2$.

Exemple

- $(-3x+1)^2 = (3x-1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$
- $(-3x-1)^2 = (3x+1)^2 = 9x^2 + 6x + 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-4x)^2 = (4x)^2 = 16x^2 \geqslant 0$

- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -x^2 = -(x)^2 = -\Big(x^2\Big) \leqslant 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-x)^2 = x^2 \geqslant 0$

▷ *Faire les exercices de la partie 3 du TD.*

I.6 Applications

I.6.1 Montrer une égalité « pour tout réel x »

Méthode

Méthode : Pour montrer qu'une égalité donnée est vraie, « pour tout réel x » il faut :

1. soit développer (ou factoriser) la partie droite de l'égalité afin d'obtenir la partie gauche;
2. soit développer (ou factoriser) la partie gauche de l'égalité afin d'obtenir la partie droite;
3. soit développer (ou factoriser) les parties gauche et droite afin d'obtenir une troisième expression :
4. soit encore montrer que la différence des deux expressions est nulle.

1. Soit développer (ou factoriser) la partie droite de l'égalité afin d'obtenir la partie gauche;

Exemple

Montrer que pour tout réel x, on a : $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\quad (x+1)^3 &= (x+1)^2(x+1)\\ &= \left(x^2+2x+1\right)(x+1)\\ &= x^3+x^2++2x^2+2x+x+1\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\quad (x+1)^3=x^3+3x^2+3x+1}$$

De même on pourrait aussi démontrer que : $(x+1)^4=x^4+4x^3+6x^2+4x+1$

2. Soit développer (ou factoriser) la partie gauche de l'égalité afin d'obtenir la partie droite;

Exemple

Classique aux SAT : Montrer que pour tout réel $x>1$, on a :

$$\frac{2x+1}{1-3x}-\frac{x}{1-9x^2}=\frac{6x^2+4x+1}{(1-3x)(1+3x)}$$

On remarque rapidement que les valeurs interdites sont $\frac{1}{3}$ et $-\frac{1}{3}$ donc l'expression existe bien pour $x>1$ par exemple mais ce n'est évidemment pas l'ensemble de définition.

Remarque

ATTENTION

On remarque que :

$$(1-9x^2)=(1-3x)(1+3x)$$

On va mettre les fractions au même dénominateur en remarquant en multipliant la première au numérateur et dénominateur par $(1+3x)$, ce qui est licite car pour $x>1$, on a $(1+3x)\neq 0$

$$\begin{aligned}\forall x\in]1\,;\,+\infty[,\quad \frac{2x+1}{1-3x}-\frac{x}{1-9x^2} &= \frac{2x+1}{1-3x}-\frac{x}{(1-3x)(1+3x)}\\ &= \frac{(2x+1)(1+3x)}{(1-3x)(1+3x)}-\frac{x}{(1-3x)(1+3x)}\\ &= \frac{2x+6x^2+1+3x-x}{(1-3x)(1+3x)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in]1\ ;\ +\infty[,\quad \frac{2x+1}{1-3x} - \frac{x}{1-9x^2} = \frac{6x^2+4x+1}{(1-3x)(1+3x)}}$$

3. Soit développer (ou factoriser) les parties gauche et droite afin d'obtenir une troisième expression .

Exemple

Montrer que pour tout réel x, on a :

$$\left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x-12\right) = \left(x^2-3x-4\right)(x+3)(x-2)$$

- D'une part en développant le terme de gauche on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x-12\right) = x^4-2x^3-13x^2+14x+24$$

- D'autre part en développant le terme de droite on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \left(x^2-3x-4\right)(x+3)(x-2) = x^4-2x^3-13x^2+14x+24$$

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\quad \left(x^2-x-2\right)\left(x^2-x-12\right) = \left(x^2-3x-4\right)(x+3)(x-2)}$$

Remarque

Attention : Il ne faut **JAMAIS partir de l'égalité à démontrer** !

I.6.2 Remarque : Pour montrer qu'une égalité n'est pas vraie pour tout réel x

Pour montrer qu'une égalité n'est pas vraie pour tout réel x, il suffit de trouver un contre-exemple, c'est à dire un réel qui met en défaut l'égalité. Attention cependant à la rédaction !

Exemple

L'égalité suivante est-elle vraie pour tout réel x : $\sqrt{x^2+1} = x+1$?
On remarque que cette égalité est vraie pour $x = 0$, par contre :

- D'une part pour $x = 1$ dans le terme de gauche :

$$\sqrt{x^2+1} = \sqrt{1^2+1} = \sqrt{2}$$

- D'autre part pour $x = 1$ dans celui de droite :

$$x+1 = 1+1 = 2 \neq \sqrt{2}$$

Le réel $x = 1$ est un contre exemple qui prouve que l'égalité n'est pas vraie pour tout réel x.

▷ *Faire les exercices de la partie 4 du TD*.

I.6.3 La factorisation canonique (*vertex form*)

Cette méthode n'est pas explicitement au programme mais il est conseillé de la connaitre.
=> Voir le complément optionnel : http://www.math93.com.../seconde.

II. Résoudre une équation

II.1 Un peu d'histoire

Des équations du premier et du second degré (où les coefficients sont des nombres donnés) sont déjà résolues avec une méthode générale par les Babyloniens vers 1700 av. J.C et peut être même plus tôt.
Pour les équations du 3ème degré, il faut attendre 1515 avec l'italien Scipio del Ferro (1465-1526) dont les papiers sont cependant perdus.
Puis ses compatriotes Tartaglia et Gérolamo Cardan (1501-1576) poursuivent ses travaux.
Pour celles du 4ème degré, c'est Ludovico Ferrari (Bologne 1522-1565, en 1540), un élève de Cardan, a qui on doit une méthode habile de résolution.

=> Compléments sur la page : http://www.math93.com/...les équations

II.2 Définition et notation

Définition 2

Résoudre une équation donnée, dans un ensemble de nombres I (réels ou pas), c'est trouver tous les nombres de l'ensemble I qui vérifient l'égalité.

Exemple

L'équation $(E_1)\ :\ x^2 = 2$ n'a pas de solution dans $I = \mathbb{Q}$ mais elle en a deux dans $I' = \mathbb{R}$ qui sont $-\sqrt{2}\ ;\ ;\sqrt{2}$.
On note souvent S l'ensemble des solutions soit ici

$$S_{(E_1)} = \left\{-\sqrt{2}\ ;\ ;\sqrt{2}\right\}$$

On peut aussi rencontrer une autre notation indicée qui rend compte de l'ensemble sur lequel l'équation est résolue :

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\sqrt{2}\ ;\ ;\sqrt{2}\right\}$$

II.3 Résolution graphique

On ne prétend pas résoudre une équation par cette méthode, on reste au stade de la conjecture.

II.3.1 Méthode

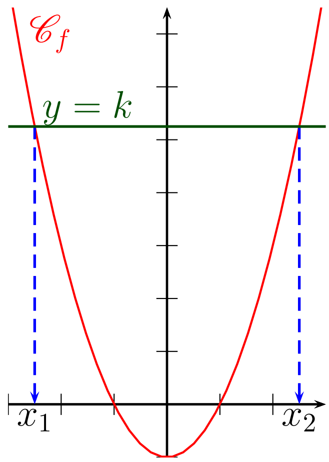
Soit k un réel quelconque, f et g sont des fonctions définies sur I.

Définition 3 (L'équation $(E_1) : f(x) = k$)

Résoudre graphiquement sur l'ensemble I l'équation

$$(E_1) : f(x) = k$$

- C'est trouver (si elles existent) les **abscisses des points d'intersection** de la courbe représentative de la fonction f avec la droite horizontale d'équation $y = k$.
- C'est aussi trouver graphiquement les **antécédents par f** du réel k.
- C'est aussi trouver graphiquement les **abscisses de tous les points** de la courbe $\mathscr{C}_f$ qui ont une ordonnée égale à k.



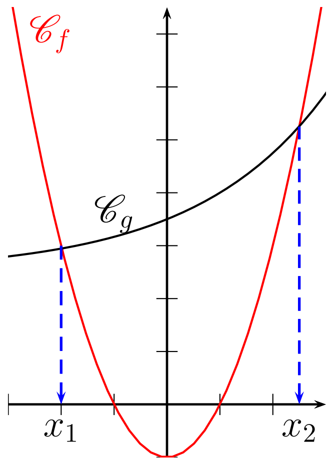
Ici par exemple, $S = \{x_1 \; ; \; x_2\}$ mais si il n'y a pas de solution, on peut noter $S = \varnothing$ (ensemble vide).

Définition 4 (L'équation $(E_2) : f(x) = g(x)$)

Résoudre graphiquement sur l'ensemble I l'équation

$$(E_2) : f(x) = g(x)$$

- C'est trouver (si elles existent) les **abscisses des points d'intersection** de $\mathscr{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f avec $\mathscr{C}_g$, celle de g.



II.3.2 Utilisation de la calculatrice

La calculatrice ou plus généralement, tout logiciel traceur de courbes (comme Géogébra), permet facilement d'avoir **une approximation** des éventuelles solutions d'une équation.
On ne prétend pas résoudre une équation par cette méthode, on reste au stade de la conjecture.

=> Voir pour cela la **fiche méthode** disponible sur la page http://www.math93.com.

II.4 Résolution algébrique

Dans ce qui suit a, b, c, d sont des réels.

Définition 5 (Équations équivalentes)

Deux équations (E_1) et (E_2) sont dites **équivalentes** lorsqu'elles ont les mêmes solutions.
On peux alors noter

$$(E_1) \iff (E_1)$$

Proposition 3 (Transformations d'équations)

Pour **transformer une équation en équation équivalente**, on peut utiliser les transformations suivantes :

- T_1 : Développer, factoriser, réduire certains termes ;
- T_2 : Ajouter ou soustraire un même terme à chaque membre de l'équation ;
- T_3 : Multiplier ou diviser chaque membre par un même nombre **non nul**.
  Et donc JAMAIS par un terme dépendant de x car il peut être nul.

II.4.1 Équations du premier degré

Les équation du premier degré sont « celles en x » c'est à dire de la forme $ax + b = cx + d$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) définie par : $2(3x - 3) = 8x - 1$

$$\begin{array}{rrcll}
2(3x-3) = 8x - 1 & \iff 6x - 6 & = & 8x - 1 & \text{par } T_1 \text{ : on développe le 1er membre} \\
& \iff 6x - 6 - 8x & = & -1 & \text{par } T_2 \text{ : on soustrait } 8x \text{ à membre} \\
& \iff -2x - 6 & = & -1 & \text{par } T_1 \text{ : on réduit le 1er membre} \\
& \iff -2x - 6 + 6 & = & -1 + 6 & \text{par } T_2 \text{ : on ajoute 6 aux deux membres} \\
& \iff -2x & = & 5 & \\
& \iff \dfrac{-2x}{-2} & = & \dfrac{5}{-2} & \text{par } T_3 \text{ : on divise les deux membres par } -2 \\
& \iff x & = & -\dfrac{5}{2} & \text{par } T_3 \text{ : on divise les deux membres par } -2
\end{array}$$

L'unique solution de l'équation (E) est donc le réel $x = -\dfrac{5}{2}$ et l'on peut noter

$$\boxed{S_{(E)} = \left\{-\frac{5}{2}\right\}}$$

Remarque

Une équation du premier degré peut avoir **aucune , une** ou une **infinité** de solution(s).

II.4.2 Pour les autres équations

- **Le développement** : Si après développement l'équation est équivalente à une équation du premier degré, on développe puis on résout.
- **La factorisation** : Sinon il ne reste qu'à essayer de factoriser en « passant tous les termes du même côté » afin d'obtenir une équation produit.
- **Quotient** : Dans le cas d'un quotient, prudence.

1. Cas des équations produit.

Théorème 1 (Équation produit)

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un au moins des facteurs est nul.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_1) : x^2 + x - 2 = -2$

$$\begin{aligned}(E_1) : x^2 + x - 2 = -2 &\iff x^2 + x - 2 + 2 = -2 + 2\\ &\iff x^2 + x = 0\\ &\iff x(x+1) = 0\end{aligned}$$

C'est une équation produit, or par théorème, un produit de facteurs est nul, si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul donc

$$\begin{aligned}(E_1) : x^2 + x - 2 = -2 &\iff \Big(x = 0\Big) \text{ ou } \Big(x + 1 = 0\Big)\\ &\iff x = 0 \text{ ou } x = -1\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) dans $\mathbb{R}$ est donc : $\boxed{S_{(E_1)} = \{0 ; -1\}}$.

2. Cas des quotients : équations du type $\boldsymbol{\dfrac{A}{B} = 0}$.

Théorème 2 (Équation avec quotient)

Un quotient est nul si, et seulement si, $\begin{cases} 1) & \text{son } \textbf{numérateur est nul} \\ 2) & \text{et son } \textbf{dénominateur est non nul}. \end{cases}$

Autrement dit

$$\frac{A}{B} = 0 \iff \begin{cases} 1) & A = 0 \\ & \text{et} \\ 2) & B \neq 0 \end{cases}$$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E_2) : \dfrac{2x+5}{4x-2} = 0$

- **1ère étape** : On détermine la ou les **valeurs interdites**.
  Ici il faut que le dénominateur soit non nul donc que $4x - 2 \neq 0$ soit après résolution $\boxed{x \neq 2}$.
- **2ème étape** : On applique le <u>théorème 2</u>.

$$\begin{aligned}(E_2) : \frac{2x+5}{4x-2} = 0 &\iff \begin{cases} 1) & 2x + 5 = 0 \\ 2) & x \neq 2 \end{cases}\\ &\iff \begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} \\ x \neq 2 \end{cases}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_2) dans $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ est donc : $\boxed{S_{(E_2)} = \left\{-\dfrac{5}{2}\right\}}$.

3. Cas des quotients : équations du type $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$.

Théorème 3 (Équation avec quotient)

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff \begin{cases} 1) \quad A \times D = C \times B \\ \text{et} \\ 2) \quad B \neq 0 \ \text{ et } \ D \neq 0 \end{cases}$$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_3) : $\dfrac{1}{x-3} = \dfrac{-3}{x(x-3)}$

- **1$^{\text{ère}}$ étape** : On détermine les **valeurs interdites**.

  Ici il faut que le dénominateur des deux membres soit non nul donc que $\begin{cases} x-3 \neq 0 & \iff & x \neq 3 \\ x(x-3) \neq 0 & \iff & x \neq 0 \ \text{ et } \ x \neq 3 \end{cases}$

  Soit $\boxed{x \neq 3 \ \text{ et } \ \text{ et } \ x \neq 0}$, on va résoudre l'équation sur $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{0\,;\,3\}}$.

- **2$^{\text{ème}}$ étape** : On applique le théorème 3.

$$\begin{aligned}
(E_3) : \frac{1}{x-3} = \frac{-3}{x(x-3)} &\iff \begin{cases} 1) \quad x(x-3) = -3(x-3) \\ 2) \quad x \neq 3 \ \text{ et } \ \text{ et } \ x \neq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 - 3x = -3x + 9 \\ x \neq 3 \ \text{ et } \ \text{ et } \ x \neq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ x \neq 3 \ \text{ et } \ \text{ et } \ x \neq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \boxed{x = 3} \ \text{ ou } \ x = -3 \\ \boxed{x \neq 3} \ \text{ et } \ \text{ et } \ x \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_3) dans $\mathbb{R} \setminus \{0\,;\,3\}$ est donc

$$\boxed{S_{(E_3)} = \{-3\}}$$

▷ *Faire les exercices de la partie 5 du TD, puis la suite.*

III. Résoudre un système d'équations

III.1 Définition d'un système d'équations à deux inconnues

Définition 6

Soit a, b, c, a', b' et c' six réels. On appelle système linéaires de deux équations à deux inconnues le système :

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right.$$

Résoudre le système consiste à trouver tous les couples $(x; y)$ qui vérifient simultanément les deux équations.

Exemple

On considère le système suivant :

$$(S_1)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 3y & = & -4 \\ -5x & + & y & = & -3 \end{array}\right.$$

On peut remarquer que le couple $(1\ ;\ 2)$ est bien une solution des deux équations. En effet :

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2\times 1 & - & 3\times 2 & = & -4 \\ -5\times 1 & + & 2 & = & -3 \end{array}\right.$$

L'idée maintenant est de trouver une méthode pour trouver ce couple solution ... si il existe et de savoir si il est bien unique. En effet par exemple :

$$(S_2)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 3y & = & -4 \\ 4x & - & 6y & = & -8 \end{array}\right.$$

Le système S_2 on le verra admet une infinité de solutions, car en fait la deuxième équation est identique à la première (multipliée par 2).
Par contre le système S_3 ci-dessous n'admet aucune solution, c'est évident non ?

$$(S_3)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & 3y & = & -4 \\ 2x & - & 3y & = & 1 \end{array}\right.$$

III.2 Unicité de la solution et Notion de déterminant

Propriété 1 (Propriété admise (pour l'instant))

Le système

$$(S)\ :\ \left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c' \end{array}\right.$$

admet <u>une unique solution</u> si et seulement si le tableau

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$$

n'est pas un tableau de proportionnalité, soit donc, si $ab' - a'b \neq 0$.
Dans le cas $ab' - a'b = 0$, le système possède soit aucune solution, soit une infinité de solution.

Définition 7

On appelle déterminant du tableau (de la matrice) $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}$ le réel $ab' - a'b$ et on le note :

$$\boxed{D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b}$$

Donc la propriété précédente peut s'écrire

Propriété 2 (Propriété admise (pour l'instant))

Soit système (S) : $\left\{\begin{array}{rcrcl} ax & + & by & = & c \\ a'x & + & b'y & = & c \end{array}\right.$

1. Si le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$, alors (S) admet une unique solution.
2. Si le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0$, alors (S) admet :
   - soit une infinité de solutions ;
   - soit aucune solution.

Exemple

On considère les système précédents :

(S_1) : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -4 \\ -5x & + & y & = & -3 \end{array}\right.$ (S_2) : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -4 \\ 4x & - & 6y & = & -8 \end{array}\right.$ (S_3) : $\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -4 \\ 2x & - & 3y & = & 1 \end{array}\right.$

1. Pour S_1 on obtient que le système admet une solution unique car

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13 \neq 0$$

Et cette unique solution est $(1\ ;\ 2)$.

2. Pour S_2 on obtient que le système n'admet pas une solution unique car

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$$

Il s'avère que ce système admet une infinité de solutions par exemple $(1\ ;\ 2)$, $(-2\ ;\ 0)$ et $\left(0\ ;\ \dfrac{4}{3}\right)$.

3. Pour S_3 on obtient que le système n'admet pas une solution unique car

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$$

Il s'avère que ce système n'admet aucune solution.

III.3 Résolution d'un système par équivalence

Définition 8 (Systèmes équivalents)

Deux systèmes (S_1) et (S_2) sont dits équivalents s'ils ont les mêmes solutions.

III.3.1 Méthode par combinaisons linéaires

C'est la méthode qui paradoxalement est la plus simple et est basée sur cette propriété :

Propriété 3

On obtient un système (S_2) équivalent au système (S_1) si on applique à ce dernier l'une des opérations suivantes :

1. échange de deux lignes;
2. multiplication d'une ligne par un coefficient non nul;
3. ajout à une ligne d'un multiple d'une autre , (et plus généralement ajout à une ligne d'une combinaison linéaire des autres).

Méthode

On considère le système :

$$(S_1)\ :\ \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -5x + y = -3 \end{cases}$$

- <u>Étape 1</u> : calcul du déterminant.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13 \neq 0$$

Donc le système admet une solution unique.

- <u>Étape 2</u> : résolution par combinaisons linéaires.
L'idée est de multiplier les lignes par des nombres afin d'obtenir un même coefficient pour une inconnue, enfin souvent des coefficients opposés. Un peu comme dans la mise au même dénominateur de deux fractions. On a donc toujours plusieurs façons de procéder, soit avec la 1re soit avec la 2e inconnue.

  – <u>Méthode 1</u> : On cherche à éliminer les x :

$$(S_1)\ :\ \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -5x + y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} \left(2x - 3y\right) \times 5 = -4 \times 5 \\ \left(-5x + y\right) \times 2 = -3 \times 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10x - 15y = -20 \\ -10x + 2y = -6 \end{cases}$$

On va obtenir un système équivalent en gardant la 1re équation et en ajoutant la 1re à la 2e

$$\iff \begin{cases} 10x - 15y = -20 \\ 0 - 13y = -26 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10x - 15y = -20 \\ y = 2 \end{cases}$$

Il reste juste alors à remplacer y par 2 dans la 1re égalité

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 10x & - & 15\times 2 & = & -20 \\ & & y & = & 2 \end{array}\right.$$

$$\iff \boxed{\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & 2 \end{array}\right.}$$

– Méthode 2 : On cherche à éliminer les y :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -4 \\ -5x & + & y & = & -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -4 \\ \big(-5x & + & y\big)\times 3 & = & -3\times 3 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -4 \\ -15x & + & 3y & = & -9 \end{array}\right.$$

On va obtenir un système équivalent en gardant la 1re équation et en ajoutant la 1re à la 2e

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -4 \\ -13x & + & 0 & = & -13 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -4 \\ & & x & = & 1 \end{array}\right.$$

Il reste juste alors à remplacer x par 1 dans la 1re égalité

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2\times 1 & - & 3y & = & -4 \\ & & x & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\iff \boxed{\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & 2 \end{array}\right.}$$

III.3.2 Méthode par substitutions

Elle peut s'avérer périlleuse ou plus rapide, selon les cas :

Méthode

On considère le système :

$$(S_1)\ :\ \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -5x + y = -3 \end{cases}$$

- Étape 1 : calcul du déterminant.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 15 = -13 \neq 0$$

Donc le système admet une solution unique.

- Étape 2 : résolution par substitution.

  - Méthode 1 : On exprime x en fonction de y dans une des équations, généralement la plus simple :

$$(S_1)\ :\ \begin{cases} 2x - 3y = -4 \\ -5x + y = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{-4+3y}{2} \\ -5x + y = -3 \end{cases}$$

puis on remplace x par $\dfrac{-4+3y}{2}$ dans la 2e équation

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-4+3y}{2} \\ -5 \times \dfrac{-4+3y}{2} + y = -3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-4+3y}{2} \\ \dfrac{20-15y+2y}{2} = -3 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-4+3y}{2} \\ 20-15y+2y = -6 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-4+3y}{2} \\ y = 2 \end{cases}$$

Il reste juste alors à remplacer y par 2 dans la 1re égalité

$$\iff \boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}}$$

Ce n'était ici pas la meilleure méthode on en convient !

– Méthode 2 : On exprime y en fonction de x dans une des équations, ici c'est bien plus simple :

$$(S_1) : \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -4 \\ -5x & + & y & = & -3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & -4 \\ & & y & = & -3+5x \end{array}\right.$$

puis on remplace y par $-3+5x$ dans la 1re équation

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3(-3+5x) & = & -4 \\ & & y & = & -3+5x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & + & 9-15x & = & -4 \\ & & y & = & -3+5x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} -13x & = & -13 \\ y & = & -3+5x \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & -3+5x \end{array}\right.$$

Il reste juste alors à remplacer x par 1 dans la 2e égalité

$$\iff \boxed{\left\{\begin{array}{rcr} x & = & 1 \\ y & = & 2 \end{array}\right.}$$

Fin du cours