Math93.com

Fonctions affines, étude se signe, inéquations

Seconde

Dans tout ce qui suit, m et p désignent des nombres réels.

I. Définitions et exemples

I.1 Définition

Définition 1 (Fonction affine)

Une **fonction affine** f est une fonction :

$$f \;:\; x \mapsto f(x) = mx + p$$

- Le coefficient $\boldsymbol{m}$ est le coefficient directeur ;
- La constante $\boldsymbol{p}$ est l'ordonnée à l'origine ;

Cas particuliers : si $p = 0$, la fonction $x \mapsto mx$ est dite **linéaire** et si $m = 0$ elle est constante.

I.2 Exemples

- La fonction $x \mapsto 2x - 8$ est affine car de la forme $x \mapsto mx + p$ avec :

Corrigé

$$\begin{cases} m = 2 \\ p = -8 \end{cases}$$

- La fonction $x \mapsto x + \dfrac{1}{2}$ est affine car de la forme $x \mapsto mx + p$ avec :

Corrigé

$$\begin{cases} m = 1 \\ p = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

- La fonction $x \mapsto \dfrac{x}{3} - \pi$ est affine car de la forme $x \mapsto mx + p$ avec :

Corrigé

$$\begin{cases} m = \dfrac{1}{3} \\ p = -\pi \end{cases}$$

Exercice 1

Parmi les fonctions suivantes, trouver les fonctions affines ; si besoin, préciser la valeur du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine.

1. $f(x) = \sqrt{2}x$
2. $g(x) = 2\sqrt{x}$
3. $h(x) = \pi - \dfrac{2}{3}x$
4. $i(x) = 3x^2 + 4$
5. $j(x) = \dfrac{2}{x}$
6. $k(x) = (x-2)(x+4) - x^2$

Corrigé

1. $f(x) = \sqrt{2}x$ est linéaire donc affine de la forme mx avec $m = \sqrt{2}$.
2. $g(x) = 2\sqrt{x}$ n'est pas affine.
3. $h(x) = \pi - \dfrac{2}{3}x$ est affine de la forme $mx + p$ avec $m = -\dfrac{2}{3}$ et $p = \pi$.
4. $i(x) = 3x^2 + 4$ n'est pas affine.
5. $j(x) = \dfrac{2}{x}$ n'est pas affine.
6. $k(x) = (x-2)(x+4) - x^2 = x^2 + 4x - 2x - 8 - x^2 = 2x - 8$ est affine de la forme $mx + p$ avec $m = 2$ et $p = -8$.

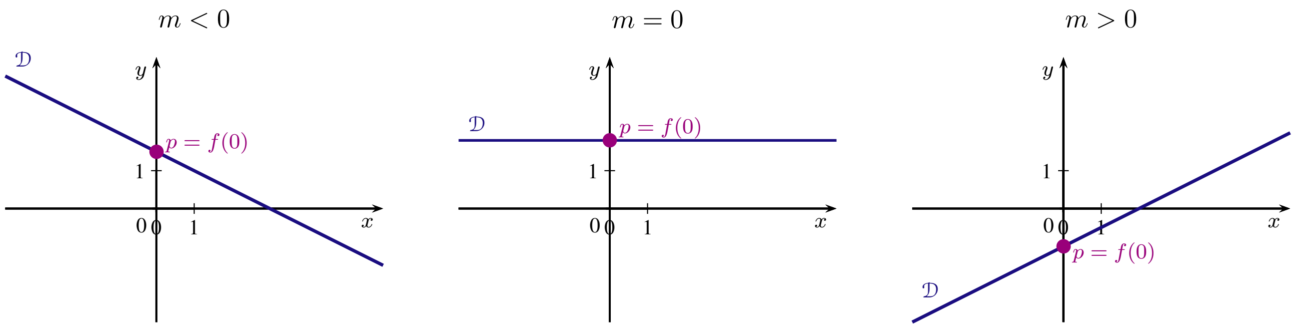
II. Représentation graphique

II.1 Propriété

Propriété 1

On se place dans un repère du plan. On considère f la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

- La courbe représentative de cette fonction affine est une droite d'équation $y = mx + p$.
- L'ordonnée à l'origine p se lit facilement sur l'axe (Oy). C'est l'ordonnée du point d'intersection de la droite et de cet axe. C'est l'image de 0 par f puisque $f(0) = p$.
- Cas particulier : la courbe représentative d'une fonction linéaire est une droite qui passe par l'origine du repère.



II.2 Proportionnalité des accroissements

Théorème 1

f est une fonction affine si, et seulement si, pour tous nombres réels distincts x_1 et x_2, on a :

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A\left(x_1 \ ; \ f(x_1)\right) \\ B\left(x_2 \ ; \ f(x_2)\left(\right)\right. \end{cases}$$

Mémo :

$$\boxed{\text{coeff. directeur} = m = \frac{\text{écart des } y}{\text{écart des } x} = \frac{\text{écart des } f(x)}{\text{écart des } x}}$$

Preuve

Soit f affine de la forme $f(x) = mx + p$ et deux nombres réels distincts x_1 et x_2. Puisque $x_1 \neq x_2$ on a $(x_2 - x_1) \neq 0$ et donc le rapport est légitime :

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{mx_2 + p - (mx_1 + p)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{mx_2 - mx_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

Et puisque $(x_2 - x_1) \neq 0$, la simplification est légitime

$$\boxed{\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m}$$

Application 1 : déterminer par le calcul une fonction affine (il faut deux valeurs).

Deux façons de poser la même question :

- Déterminer la fonction affine f telle que $\begin{cases} f(-6) = 5 \\ f(3) = -1 \end{cases}$.
- Déterminer la fonction affine f dont la courbe est une droite passant par : $\begin{cases} A(-6\ ;\ 5) \\ B(\ 3\ ;\ -1) \end{cases}$.

Corrigé

f est une fonction affine d'où pour tout réel x, $f(x) = mx + p$ avec

$$m = \frac{f(3) - f(-6)}{3 - (-6)} \qquad \text{Soit} \qquad m = \frac{-1-5}{3+6} = -\frac{2}{3}$$

Ainsi,

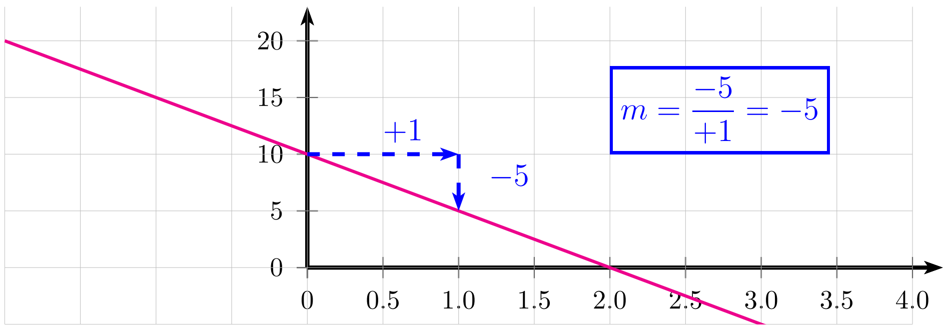
$$f(x) = -\frac{2}{3}x + p$$

Or $f(3) = -1$ (ou $A(3\ ;\ -1)$ est un point de la droite), d'où

$$\begin{aligned} f(3) = -1 &\iff -\frac{2}{3} \times 3 + p = -1 \\ &\iff -2 + p = -1 \\ &\iff p = 1 \end{aligned}$$

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f(x) = -\frac{2}{3}x + 1}$.

Application 2 (Point bac) : déterminer graphiquement une fonction affine ou une équation de droite.



Corrigé

- On lit facilement l'ordonnée à l'origine $p = 10$
- La droite passe par les points $\begin{cases} A(0\ ;\ 10) \\ B(1\ ;\ 5) \end{cases}$ donc le coefficient directeur est :

$$m = \frac{\text{écart des } y}{\text{écart des } x} = \frac{5-10}{1-0} = -5$$

- La fonction affine associée à cette droite est donc définie par :

$$\boxed{f(x) = -5x + 10}$$

II.3 Équation et intersection avec l'axe des abscisses

Propriété 2

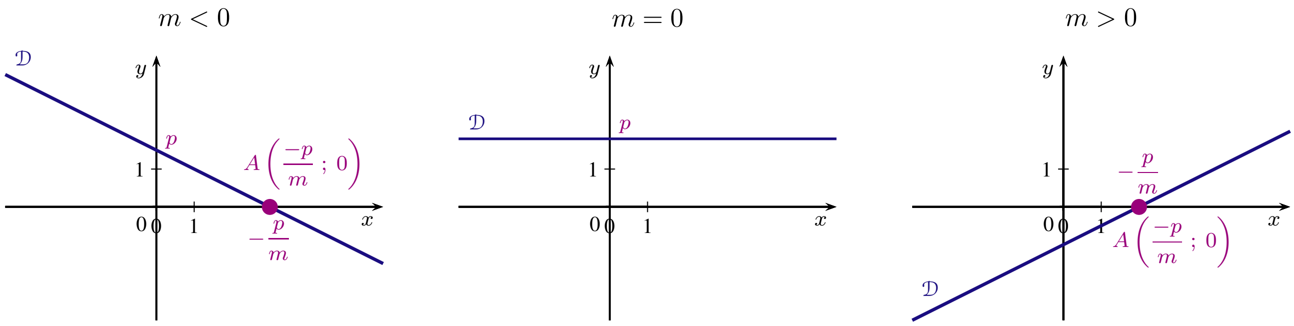
Soit f une fonction affine définie pour $m \neq 0$ par :

$$f \ : \ \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & mx+p \end{cases}$$

L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{f(x) = 0 \iff mx + p = 0 \iff x = \frac{-p}{m}}$$

La solution de cette équation correspond à l'abscisse du point d'intersection A de la droite associée à la fonction affine et de l'axe des abscisses (Ox), ses coordonnées sont $A\left(\frac{-p}{m} \ ; \ 0\right)$.



III. Étude des variations de f

Théorème 2

Soit f une fonction affine définie par :

$$f \ : \ \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & mx+p \end{cases}$$

1. Cas $m > 0$: Si le coefficient directeur m est strictement positif , alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Cas $m < 0$: Si le coeff. directeur m est strictement négatif , alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Cas $m = 0$: Si le coefficient directeur m est nul , alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

Preuve

Soit f affine définie par $f(x) = mx + p$ et et deux nombres réels distincts $x_1 < x_2$.
On a :

$$f(x_2) - f(x_1) = mx_2 + p - (mx_1 + p) = m(x_2 - x_1)$$

Puisque $x_1 < x_2$ on a $(x_2 - x_1) > 0$ donc $f(x_2) - f(x_1)$ est du signe de m.
De ce fait :

1. Cas $m > 0$: Si le coefficient directeur m est strictement positif , alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Cas $m < 0$: Si le coeff. directeur m est strictement négatif , alors la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Cas $m = 0$: Si le coefficient directeur m est nul , alors la fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.

III.1 Exemples

- La fonction $x \mapsto 2x - 8$ est affine car de la forme $x \mapsto mx + p$ avec

$$\begin{cases} m = 2 > 0 \\ p = -8 \end{cases}$$

Elle est donc croissante sur $\mathbb{R}$ car le coefficient directeur est positif.

- La fonction $x \mapsto 2 - 3x$ est affine car de la forme $x \mapsto mx + p$ avec

$$\begin{cases} m = -3 < 0 \\ p = 2 \end{cases}$$

Elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}$ car le coefficient directeur est négatif.

- La fonction $x \mapsto -\dfrac{x}{3} + \pi$ est affine car de la forme $x \mapsto mx + p$ avec

$$\begin{cases} m = -\dfrac{1}{3} < 0 \\ p = \pi \end{cases}$$

Elle est donc décroissante sur $\mathbb{R}$ car le coefficient directeur est négatif.

IV. Étude du signe du binôme $mx + p$

Soit f une fonction affine, de courbe représentative la droite $\mathscr{C}_f$, définie par $f(x) = mx + p$.

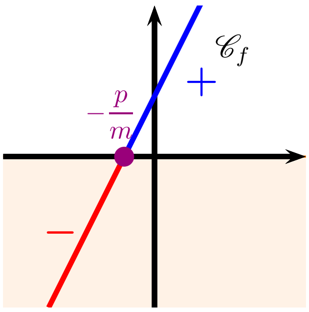
IV.1 Cas trivial : Si $m = 0$

Dans le cas où $m = 0$, $f(x) = p$ est donc trivialement du signe de p.

IV.2 Cas n°2 : Si $m > 0$

Tableau de signe (avec $m > 0$) :

x	$-\infty$		$\frac{-p}{m}$		$+\infty$
Signe de $mx + p$ $(m > 0)$		$-$	0	$+$	

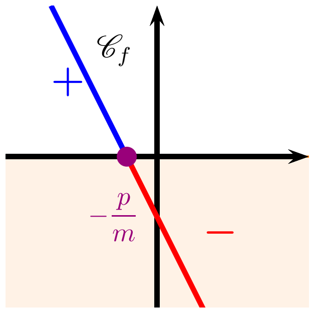


x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
Variations de f	$\nearrow$	0	$\nearrow$

IV.3 Cas n°3 : Si $m < 0$

Tableau de signe (avec $m < 0$) :

x	$-\infty$		$\frac{-p}{m}$		$+\infty$
Signe de $mx + p$ $(m < 0)$		$+$	0	$-$	



x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
Variations de f	$\searrow$	0	$\searrow$

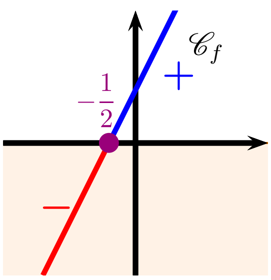
IV.4 Exemples

La fonction $f \ : \ x \mapsto 2x + 1$ est affine car de la forme $x \mapsto mx + p$ avec $m = 2$ et $p = 1$. Le coefficient directeur $m = 2 > 0$ est positif donc la fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre :

$$f(x) = 0 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2}$$

Donc $f(x)$ est négatif avant $x = -\frac{1}{2}$ et positif après.
Tableau de signe (avec $m = 2 > 0$) :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x + 1$		$-$	0	$+$	

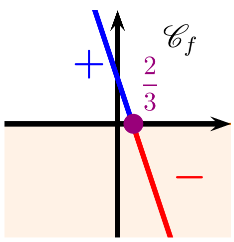


La fonction $g \ : \ x \mapsto 2 - 3x$ est affine car de la forme $x \mapsto mx + p$ avec $m = -3$ et $p = 2$. Le coefficient directeur $m = -3 < 0$ est négatif donc la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. En outre :

$$g(x) = 0 \iff 2 - 3x = 0 \iff x = \frac{2}{3}$$

Donc $g(x)$ est positif avant $x = \frac{2}{3}$ et négatif après.
Tableau de signe (avec $m = -3 < 0$) :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $2 - 3x$		$+$	0	$-$	



V. Application à l'étude du signe d'un produit ou d'un quotient

Exercice 2

Étudier, suivant les valeurs du réel x le signe du produit $A(x) = (2x-6)(5-x)$.

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $(2x-6)(5-x) \geqslant 0$.

Exercice 3

Étudier, suivant les valeurs du réel x le signe du quotient $\dfrac{1-x}{3x-6}$.

En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation $\dfrac{1-x}{3x-6} > 0$.

Fin du cours