Math93.com

Fonctions et variations (élève)

Seconde

I. Sens de variation

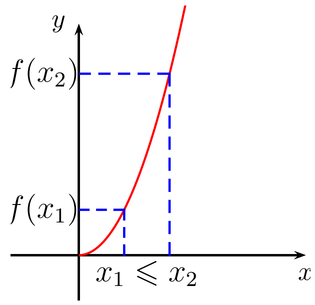
Définition 1 (Fonction croissante (*increasing function or non decreasing*))

La fonction f est dite **croissante sur l'intervalle *I*** inclus dans D_f si pour tous réels x_1 et x_2 de I

$$\text{si } x_1 \leqslant x_2 \text{ alors } f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

On dit que la fonction f **conserve l'ordre**.

f est dite <u>strictement croissante</u> lorsque les inégalités sont strictes.



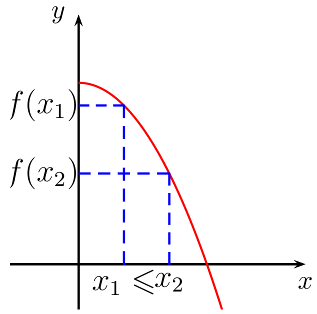
Définition 2 (Fonction décroissante (*decreasing function*))

La fonction f est dite **décroissante sur l'intervalle *I*** inclus dans D_f si pour tous réels x_1 et x_2 de I

$$\text{si } x_1 \leqslant x_2 \text{ alors } f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

On dit que la fonction f **change l'ordre**.

f est dite <u>strictement décroissante</u> lorsque les inégalités sont strictes.



Définition 3 (Fonction monotone (*monotonic function*))

La fonction f est dite **monotone sur l'intervalle *I*** inclus dans D_f si est soit croissante, soit décroissante sur I.

Exercice 1

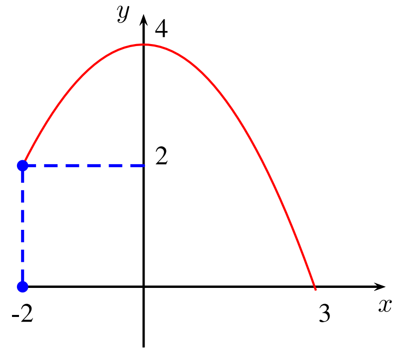
1. Montrer que la fonction $f : x \longmapsto x^2$ n'est ni croissante, ni décroissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 3]$.
2. Montrer que la fonction $g : x \longmapsto -3x + 1$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

II. Tableau de variations

Définition 4

Pour représenter les variations d'une fonction f, on utilise un tableau avec des flèches représentant la monotonie sur des intervalles les plus grands possible. Si on les connaît, on écrit les images au bout des flèches. L'ensemble forme le tableau de variations de f.

x	-2		0		3
Variations de f			$f(0)=4$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$f(-2)=2$				$f(3)=0$



Exercice 2

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[-8\ ;\ 7]$.

x	-8		-2		2		7
Variations de f			4				0
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	0				-3		

En justifiant, comparer :

1. $h(-5)$ et $h(-3)$; ....
....
....

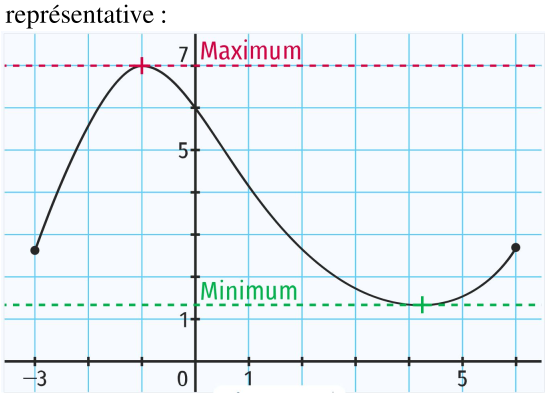
2. $h(-1)$ et $h(1)$; ....
....
....

3. $h(-4)$ et $h(3)$. ....
....
....

Exercice 3

Dresser le tableau de variations de la fonction suivante dont on donne la courbe représentative :

x	
Variations de f	

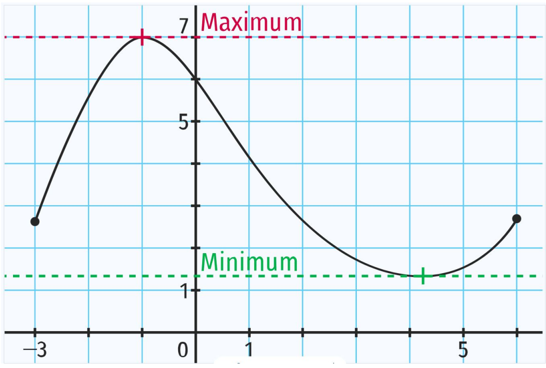


III. Extrema

III.1 Minimum et Maximum

Définition 5 (Extrema)

- **Le maximum de f sur l'intervalle I** est la plus grande valeurs possible des images, atteinte pour un réel a de I. On a donc :
$$\forall x \in I, f(x) \leqslant f(a)$$
- **Le minimum de f sur l'intervalle I** est la plus petite valeurs possible des images, atteinte pour un réel b de I. On a donc :
$$\forall x \in I, f(x) \geqslant f(b)$$



III.2 Minorant et majorant

Définition 6

1. **Majorant et maximum (*uper bound and maximum value*)** :
La fonction f est majorée sur I , s'il existe un réel M tel que pour tout x de I , $f(x) \leqslant M$.
On dit que M est UN majorant de f (il peut y en avoir une infinité).
Si ce majorant est atteint pour une valeur de $x = a$ de I, alors c'est le maximum de f sur I, c'est à dire la plus grande valeur possible des images de f sur I.
2. **Minorant et minimum (*lower bound and minimum value*)** :
La fonction f est minorée sur I , s' il existe un réel m tel que pour tout x de I , $f(x) \geqslant m$.
On dit que m est un minorant de f.
Si ce minorant est atteint pour une valeur de $x = a$ de I, alors c'est le minimum de f sur I, c'est à dire la plus petite valeur possible des images de f sur I.

Méthode

On va montrer que 1 est le minimum de $f : x \longmapsto f(x) = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$.
Pour montrer cela on procède en 2 étapes :

- Étape 1 : on cherche un minorant.
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geqslant 0 \Longrightarrow x^2 + 1 \geqslant 1$$
Donc 1 est UN minorant de f sur $\mathbb{R}$.
- Étape 2 : on montre que ce minorant est atteint pour une valeur de x, et que c'est donc LE minimum.
Par ailleurs ce minorant est atteint puisque $f(0) = 1$, donc c'est LE minimum de f sur $\mathbb{R}$.

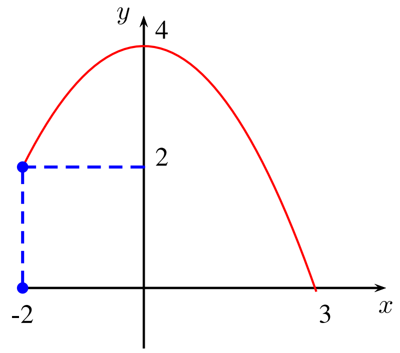
Remarque

- ✓ Il faut bien différencier **minorant et minimum** de la fonction f sur I ;
  Par exemple 1 est le minimum de $f : x \longmapsto f(x) = x^2 + 1$ sur $\mathbb{R}$. Il est atteint pour $x = 0$.

  Et donc $0,5$; 0 ; -10 ; -20 ; $-\pi$ sont tous des minorants de f sur $\mathbb{R}$.
- ✓ De même, il faut bien différencier **majorant et maximum** de la fonction f sur I ;

III.3 Exemple 1

x	-2		0		3
Variations de f	$f(-2) = 2$	$\nearrow$	$f(0) = 4$	$\searrow$	$f(3) = 0$



Exemple

Dans l'exemple ci-dessus :

- **Le maximum de f sur l'intervalle $I = [-2\ ;\ 3]$** est 4. C'est la plus grande valeurs possible des images, atteinte pour un réel $a = 0$ de I. On a donc :
$$\forall x \in [-2\ ;\ 3], f(x) \leqslant 4 = f(0)$$
- **Le minimum de f sur l'intervalle $I = [-2\ ;\ 3]$** est 0. C'est la plus petite valeurs possible des images, atteinte pour un réel $b = 3$ de I. On a donc :
$$\forall x \in [-2\ ;\ 3], f(x) \geqslant 0 = f(3)$$

III.4 Exemple 2

Exercice 4

Déterminer le minimum ou maximum de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2(x-3)^2 - 5$$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

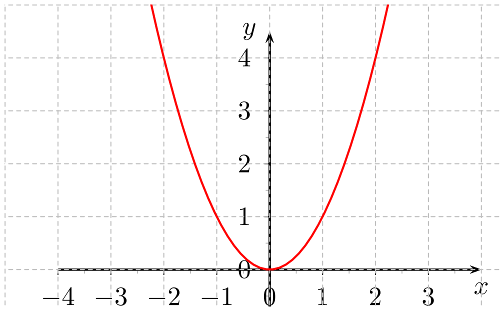
IV. La fonction carré (*The square function*)

Définition 7

La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2$$

Sa courbe représentative est une parabole (*a parabola*).



Propriété 1

1. La fonction carré est paire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
2. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. Son tableau de variation est donc :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de f	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Preuve

. . . .

↫ **Fin du cours** ↬