



Nous allons ici reprendre l'étude de la fonction carré (*The square function*) vue dans le chapitre **Fonctions et variations**, puis étudier la fonction racine carrée (*the square root function*), la fonction inverse (*the reciprocal function*) et la fonction cube (*the cube function*).

I. La fonction carré (*The square function*)

Définition 1

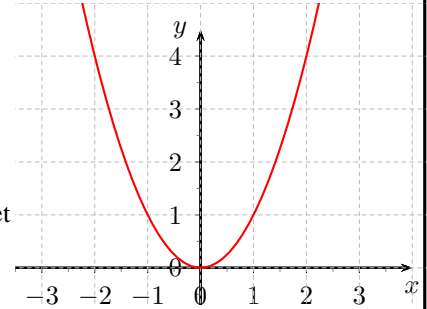
La fonction carré est la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto x^2 \end{cases}$$

Sa courbe représentative est une parabole (*a parabola*).

Son ensemble de définition (*natural domain or domain of definition*) est donc \mathbb{R} et elle est à valeurs dans \mathbb{R}_+ (*the codomain or set of destination*).

Remarque : sa courbe présente une tangente horizontale en 0.



Propriété 1

1. Pour tout réel x on a : $x^2 \geq 0$ soit :

$$\forall x \in \mathbb{R} ; x^2 \geq 0$$

2. La fonction carré est paire donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

3. La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de $x \mapsto x^2$	$+\infty$	0	$+\infty$



Preuve

Les deux premières assertions sont évidentes, étudions donc les variations de f .

1. Sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Soit a et b deux réels de $[0 ; +\infty[$ et tels que $0 \leq a \leq b$. Étudions le signe de $f(b) - f(a)$.

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= b^2 - a^2 \\ &= (b - a)(b + a) \end{aligned}$$

Or :

- $(b - a) \geq 0$ car on a supposé $b \geq a$;
- $(b + a) \geq 0$ car on a supposé que a et b sont positifs ou nuls .
- Donc le produit est positif et donc on a montré que :

$$0 \leq a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$$

Donc la fonction carré est croissante sur \mathbb{R}_+ .

2. Sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$.

Puisque la fonction carré est paire, sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. De ce fait, puisqu'elle est croissante sur \mathbb{R}_+ , elle est décroissante sur \mathbb{R}_- .

II. La fonction racine carrée (*The square root function*)

II.1 Définitions et premières propriétés de la racine carrée

Pour des exemples et compléments consultez la page sur les racines carrées (3e et seconde) : www.math93.com

Définition 2 (racine carrée (*square root*))

- Soit a un nombre positif ou nul.

La **racine carrée** de a est l'unique nombre positif dont le carré vaut a .

On note ce nombre : \sqrt{a}

On a donc d'après la définition :

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = a \quad \text{et} \quad \sqrt{a} \geq 0$$



Exemple

On a donc :

$$\sqrt{25} = 5 \quad \text{car} \quad 5^2 = 25 \quad \text{et} \quad \sqrt{36} = 6 \quad \text{car} \quad 6^2 = 36.$$

Pour les valeurs qui ne sont pas des carrés, il faut utiliser la calculatrice. Deux résultats sont à connaître (au millième) :

$$\sqrt{2} \approx 1,414 \quad \text{et} \quad \sqrt{3} \approx 1,732$$

Propriété 2

1. Pour tous nombres réels positifs a et b on a :

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$$

2. Pour tous nombres réels positifs a et $b \neq 0$ on a :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$



Preuve

Les propriétés 1 et 2 s'obtiennent par comparaisons des carrés des deux membres des égalités. Comparaison légitimes car ces membres sont tous positifs.

Attention, il n'y a pas de formule pour l'addition.



Exemple

$$D = \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$= \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{25}}$$

$$D = \boxed{\frac{4}{5}}$$

$$E = 2\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{20}{5}}$$

$$= 2\sqrt{4}$$

$$E = \boxed{4}$$

$$A = \sqrt{32}$$

$$= \sqrt{16 \times 2}$$

$$= \sqrt{16} \times \sqrt{2}$$

$$A = \boxed{4\sqrt{2}}$$

$$B = \sqrt{150}$$

$$= \sqrt{25 \times 6}$$

$$= \sqrt{25} \times \sqrt{6}$$

$$B = \boxed{5\sqrt{6}}$$

$$C = 3\sqrt{8} - \sqrt{200}$$

$$= 3\sqrt{4 \times 2} - \sqrt{100 \times 2}$$

$$= 3 \times 2 \times \sqrt{2} - 10 \times \sqrt{2}$$

$$C = \boxed{-4\sqrt{2}}$$

II.2 Suppression des radicaux au dénominateur

Pour supprimer les radicaux au dénominateur d'une expression fractionnaire, on utilise, soit la propriété 3a, soit l'expression conjuguée de $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ qui est $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$. Rappelons l'identité remarquable $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

Propriété 3

- **Propriété a :** $\forall b \in \mathbb{R}_+^*$ $\boxed{\frac{1}{\sqrt{b}} = \frac{1 \times \sqrt{b}}{\sqrt{b} \times \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{b}}{b}}$

- **Propriété b :**

$$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+^* \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{1 \times (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) \times (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{a - b}}$$



Exemple

$$E = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$E = \frac{4 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}$$

$$E = \boxed{\frac{4\sqrt{5}}{5}}$$

$$F = \frac{3}{\sqrt{5} - 2}$$

$$F = \frac{3 \times \dots\dots\dots}{(\sqrt{5} - 2) \times (\dots\dots\dots)}$$

$$F = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$F = \dots\dots\dots$$

$$G = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{5}}$$

$$G = \dots\dots\dots$$

$$G = \dots\dots\dots$$

$$G = \dots\dots\dots$$

II.4 Complément : Racine carrée d'un carré

Propriété 5

Pour tout nombre réel x , la racine carrée de x^2 est égale à la valeur absolue de x :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = |x|$$

Application : résolution de l'équation $x^2 = a$.

- Si $a > 0$. Les solutions de l'équation $x^2 = a$ sont \sqrt{a} et $-\sqrt{a}$.
- Si $a < 0$ l'équation n'admet pas de solution réelle et si $a = 0$ seul $x = 0$ est solution



Exemple

1. On a :

$$\sqrt{(-3)^2} = |-3| = 3$$

2. Équation :

$$\begin{aligned} x^2 = 5 &\iff \sqrt{x^2} = \sqrt{5} \\ &\iff |x| = \sqrt{5} \\ &\iff \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases} \end{aligned}$$



Autre méthode

$$\begin{aligned} x^2 = 5 &\iff x^2 - 5 = 0 \\ &\iff x^2 - (\sqrt{5})^2 = 0 \\ &\iff (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0 \\ &\iff \begin{cases} x - \sqrt{5} = 0 \\ \text{ou} \\ x + \sqrt{5} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ \text{ou} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases} \end{aligned}$$

3. Équation :

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 = 2 &\iff \sqrt{(2x + 1)^2} = \sqrt{2} \\ &\iff |2x + 1| = \sqrt{2} \\ &\iff \begin{cases} 2x + 1 = \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ 2x + 1 = -\sqrt{2} \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2} - 1}{2} \\ \text{ou} \\ x = \frac{-\sqrt{2} - 1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$



Autre méthode

$$\begin{aligned} (2x + 1)^2 = 2 &\iff (2x + 1)^2 - (\sqrt{2})^2 = 0 \\ &\iff (2x + 1 - \sqrt{2})(2x + 1 + \sqrt{2}) = 0 \\ &\iff \dots \end{aligned}$$

III. La fonction inverse (*The reciprocal function*)



Fonction réciproque et fonction inverse : Attention!

- La fonction bijection réciproque (ou fonction réciproque ou réciproque) se dit en anglais *the inverse function of*. Par exemple la fonction réciproque du sinus est la fonction arcsin ou \sin^{-1}
- La fonction inverse c'est à dire la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ se nomme en anglais *the reciprocal function*.

Définition 4

La fonction inverse est la fonction qui, à tout réel non nul x , associe son inverse $\frac{1}{x}$.

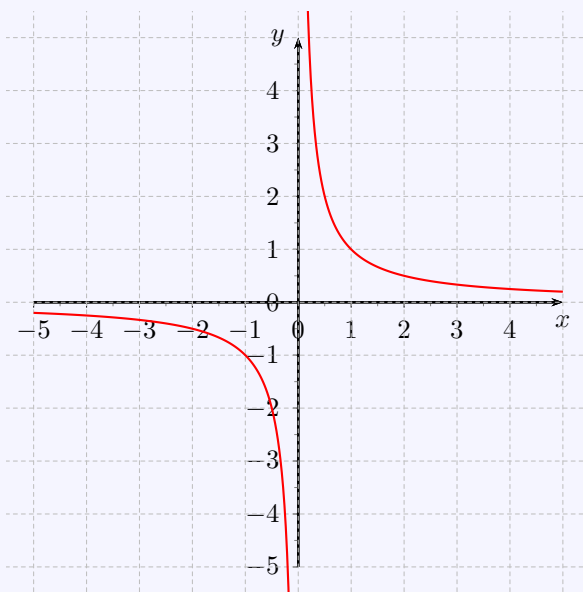
Son ensemble de définition (*natural domain or domain of definition*) est donc \mathbb{R}^* et elle est à valeurs dans \mathbb{R}^* (*the codomain or set of destination*).

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{cases}$$

Propriété 6

1. La fonction inverse est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* et strictement décroissante sur \mathbb{R}_-^* .
2. La fonction inverse n'est pas décroissante sur \mathbb{R}^* .
3. La fonction inverse est impaire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Sa courbe est une hyperbole (*hyperbola*).



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$	0	+	$+\infty$
		-	0



Preuve

A large area of the page is filled with horizontal dotted lines, intended for writing a proof. A solid blue vertical line runs down the left side of this area, starting from the 'Preuve' header.

IV. La fonction cube (*The cube function*)

Définition 5

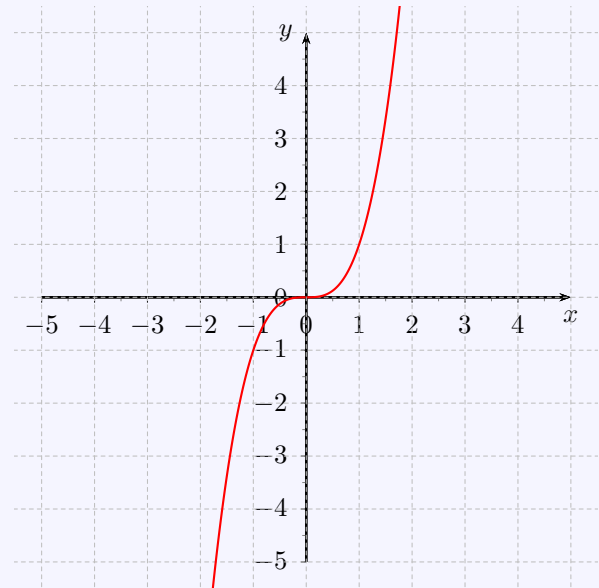
La fonction cube est la fonction qui, à tout réel non nul x , associe son cube x^3 .
 Son ensemble de définition (*natural domain or domain of definition*) est donc \mathbb{R} et elle est à valeurs dans \mathbb{R} (*the codomain or set of destination*).

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{cases}$$

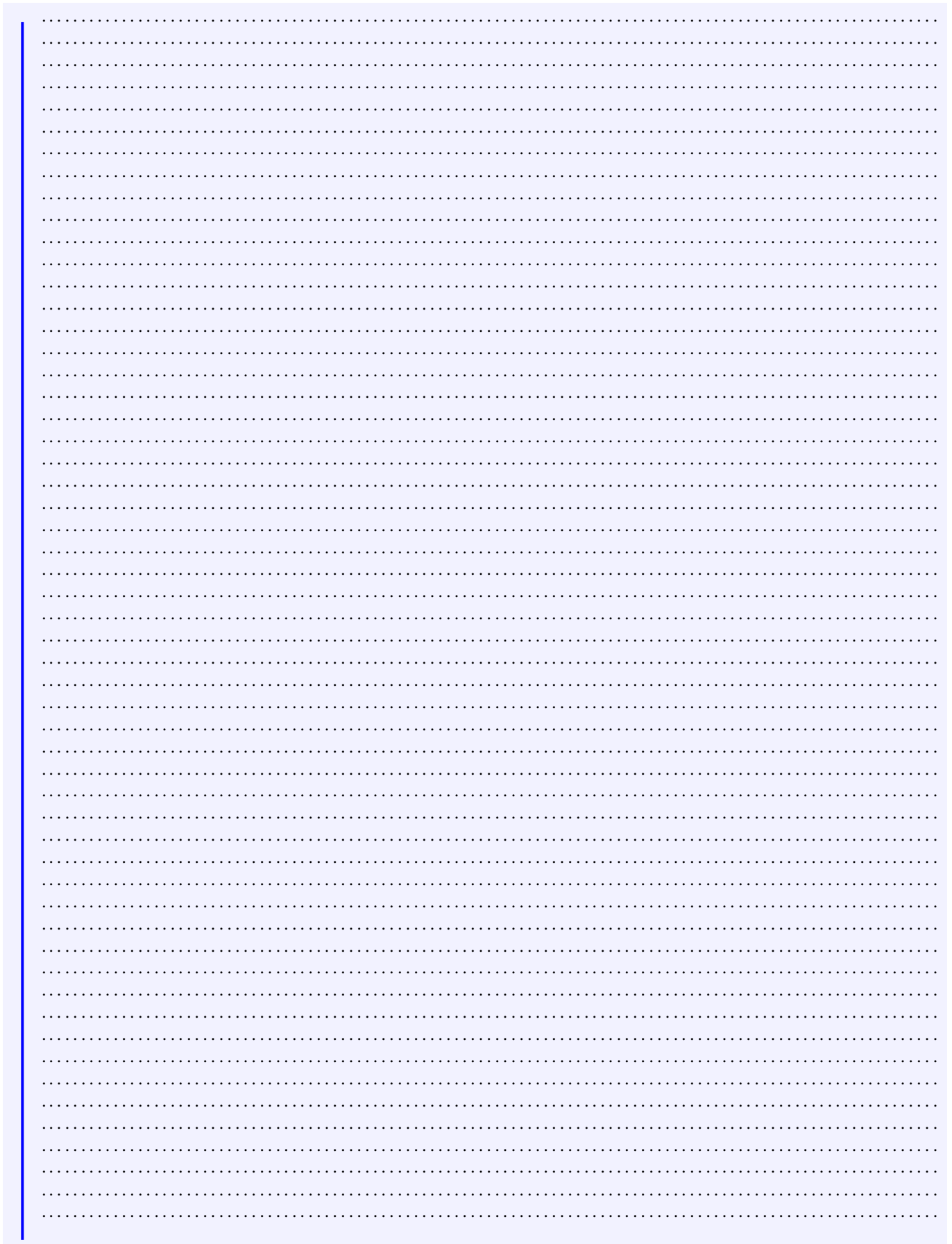
Propriété 7

1. La fonction cube est strictement croissante sur \mathbb{R} .
2. La fonction cube est impaire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Remarque : sa courbe présente une tangente horizontale en 0 qu'elle traverse, cela se nomme un point d'inflexion qui marque un changement de convexité.



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Variations de la fonction cube $x \mapsto x^3$	$-\infty$	0	$+\infty$



Propriété 8 (Racine cubique (Admis))

Pour tout réel a , l'équation $x^3 = a$ admet exactement une solution, que l'on appelle racine cubique de a et que l'on note $\sqrt[3]{a}$.

$$x^3 = a \iff x = \sqrt[3]{a}$$



Exemple

1. $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$.
2. $\sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 27$.
3. On peut en déduire un encadrement de $\sqrt[3]{20}$ car la fonction cube est croissante sur \mathbb{R} :

$$\begin{cases} \sqrt[3]{8} = 2 \\ \sqrt[3]{27} = 3 \end{cases} \implies 2 < \sqrt[3]{20} < 3$$

V. Positions relatives de plusieurs courbes de référence (relative position of curves)

Question : Comment, sans calculatrice, peut-on comparer $0,998^2$, $0,998^3$, $0,998$ et $\sqrt{0,998}$?

Propriété 9

Soit x un réel positif ou nul.

1. Si $0 < x < 1$, alors

$$x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$$

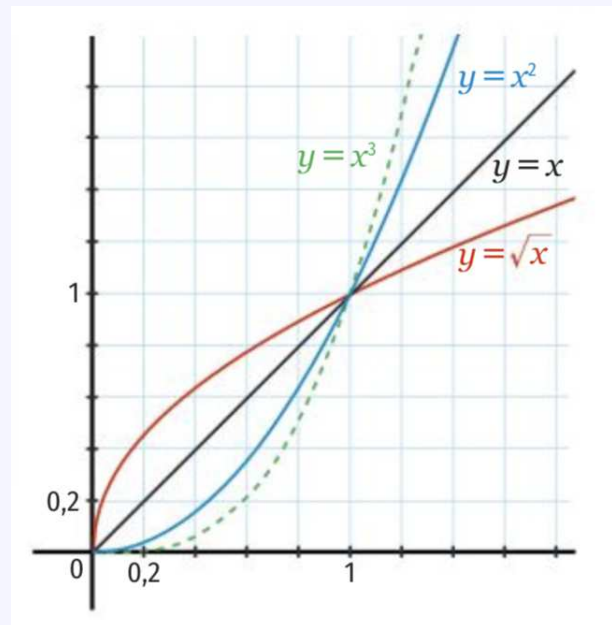
2. Si $x = 0$ ou $x = 1$, alors $x^3 = x^2 = x = \sqrt{x}$.

3. Si $x > 1$, alors

$$x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$$

4. Remarque : (Admis)

Si x est positif, les courbes d'équation $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).





Preuve

A large rectangular area with a light blue background, containing a vertical blue line on the left side and horizontal dotted lines for writing.



↩ **Fin du cours** ↪